T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇARPIMSAL GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HANDAN KARAHAN

Tez Danışmanı

PROF. DR. NEŞET AYDIN

ÇANAKKALE – 2022

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇARPIMSAL GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HANDAN KARAHAN

Tez Danışmanı

PROF. DR. NEŞET AYDIN

ÇANAKKALE – 2022

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Handan KARAHAN tarafından Prof. Dr. Neşet AYDIN yönetiminde hazırlanan ve **23/08/2022** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**Çarpımsal Genelleştirilmiş Türevli Halkalar**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Prof. Dr. Neşet AYDIN (Danışman)	…………………………
Prof. Dr. Ali ERDOĞAN	…………………………
Dr. Öğr. Üyesi Didem YEŞİL	………………………….

Tez No : 10485394

Tez Savunma Tarihi : 23/08/2022

…………………………

Doç. Dr. Yener PAZARCIK

Enstitü Müdürü

../../20..

ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Handan KARAHAN
23/08/2022

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresi boyunca engin bilgileri ile beni aydınlatan, desteğini üzerimden hiç eksik etmeyip beni yüreklendiren öğrencisi olmaktan gurur duyduğum kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Neşet AYDIN'a, bilgileriyle ışık tutan, yardım etmeye her zaman açık, naif ve ince kişiliği ile örnek aldığım hocam Dr. Öğr. Üyesi Didem YEŞİL'e, çalışma süresince yanımda olan fikirlerinden, bilim insanı kişiliğinden ve insaniyetinden çok şey öğrendiğim Ayşe AYRAN'a ve son olarak bu zorlu süreçte yanımda olan ve bana inanan Adem TAŞDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Handan KARAHAN

Çanakkale, Ağustos 2022

ÖZET

ÇARPIMSAL GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ HALKALAR

Handan KARAHAN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Neşet AYDIN
23/08/2022, 88

Bu çalışmada çarpımsal genelleştirilmiş-(α,α)-ters türevler üzerine sonuçlar elde edilmiştir. Başka bir ifadeyle R bir yarı-asal halka, $(0) \neq I$, R halkasının bir ideali, $\alpha: R \rightarrow R$ bir anti-epimorfizma fakat $I \nsubseteq Ker\alpha$, $d: R \rightarrow R$ bir dönüşüm ve $F: R \rightarrow R$ d dönüşümü ile belirli çarpımsal genelleştirilmiş-(α,α)-ters türev olmak üzere aşağıda yazılı eşitliklerden en az biri sağlandığında her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olduğu gösterilmiştir.

i. $F([\rho, y]) = 0$

ii. $F(\rho \circ y) = 0$

iii. $F([\rho, y]) = \pm\alpha([\rho, y])$

iv. $F(\rho \circ y) = \pm\alpha(\rho \circ y)$

v. $F([\rho, y]) = \pm\alpha(\rho \circ y)$

vi. $F(\rho \circ y) = \pm\alpha([\rho, y])$

vii. $F([\rho, y]) = \pm\alpha([F(\rho), y])$

viii. $F(\rho \circ y) = \pm\alpha(F(\rho) \circ y)$

ix. $F(\rho y) - F(\rho)F(y) = 0$

x. $F(\rho y) + F(\rho)F(y) = 0$

Ayrıca her $\rho, y \in I$ için $F(\rho y) - F(y)F(\rho) = 0$ ve $F(\rho y) + F(y)F(\rho) = 0$ eşitlikleri için $\alpha(I)d(I) = 0$ ve her y elemanı için $[F(y), \alpha(y)] = 0$ olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarı-asal Halka, Anti-epimorfizma, Ters Türev, Genelleştirilmiş Türev, Çarpımsal Genelleştirilmiş-(α,α)-Ters Türev

ABSTRACT

THE MULTIPLICATIVE GENERALIZED DERIVATIONS OF RINGS

Handan KARAHAN

Çanakkale Onsekiz Mart University
School of Graduate Studies
Master of Science Thesis in Mathematics
Advisor: Prof. Dr. Neşet AYDIN
23/08/2022, 88

In this study, results on multiplicative (generalized)-(α,α)-reverse derivation were obtained. Let R be a ring and I a nonzero ideal of R. A mapping $F: R \to R$ is called a multiplicative (generalized)-(α,α)-reverse derivation if there exists a mapping, $d: R \to R$ such that $F(\rho y) = F(y)\alpha(\rho) + \alpha(y)d(\rho)$, for all $\rho, y \in R$ where $\alpha: R \to R$ is an anti-epimorphism and $I \nsubseteq Ker\alpha$. In the present study, we will prove that $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$, for all $\rho \in I$ if any one of the following holds:

i. $F([\rho,y]) = 0$
ii. $F(\rho \circ y) = 0$
iii. $F([\rho,y]) = \pm\alpha([\rho,y])$
iv. $F(\rho \circ y) = \pm\alpha(\rho \circ y)$
v. $F([\rho,y]) = \pm\alpha(\rho \circ y)$
vi. $F(\rho \circ y) = \pm\alpha([\rho,y])$
vii. $F([\rho,y]) = \pm\alpha([F(\rho),y])$
viii. $F(\rho \circ y) = \pm\alpha(F(\rho) \circ y)$
ix. $F(\rho y) - F(\rho)F(y) = 0$
x. $F(\rho y) + F(\rho)F(y) = 0$

Also, If $F(\rho y) - F(y)F(\rho) = 0$ and $F(\rho y) + F(y)F(\rho) = 0$ for all $\rho, y \in I$, then $\alpha(I)d(I) = (0)$ and $[F(y), \alpha(y)] = 0$ for all $y \in I$.

Keywords: Semi-prime Ring, Anti-epimorphism, Reverse Derivation, Generalized Derivation, Multiplicative (Generalized)-(α,α)-Reverse Derivation

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\in$	Elemanı
$\notin$	Elemanı değil
$\emptyset$	Boş küme
$=$	Eşit
$\cap$	Kesişim
$\subseteq$	Alt küme veya eşit
$\nsubseteq$	Alt küme veya eşit değil
$\forall$	Her
$\Rightarrow$	İse
$\vee$	Veya
(0)	Sıfır ideali
$[\rho,y]$	ρ ve y elemanlarının komütatör çarpımı
$\rho \circ y$	ρ ve y elemanlarının anti-komütatör çarpımı
1_R	Birim eleman
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

"Çarpımsal Genelleştirilmiş Türevli Halkalar" başlıklı bu tezde α halka üzerinde tanımlı anti-epimorfizma olmak üzere çarpımsal (genelleştirilmiş)-(α, α)-ters türev kullanılarak çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Halkada ters türev kavramı ilk defa 1957 yılında I. N. Herstein tarafından ortaya atılmıştır. Herstein, R bir asal halka olmak üzere halkanın sıfır dönüşümünden farklı d ters türevi varsa R halkasının değişmeli tamlık bölgesi ve d dönüşümünün türev olduğunu göstermiştir. 1957 yılından günümüze kadar birçok matematikçi halkada ters türev ve ters türevin genelleştirilmesi ile oluşturulmuş dönüşümleri kullanarak halkanın cebirsel özelliklerini tespit etmek adına birçok çalışma yapmıştır.

İlk olarak (Samman ve Alyamani., 2007) tarafından bir yarı-asal halkanın ters türevi aracılığıyla Herstein'in iyi bilinen sonucu genelleştirilmiştir. 2018 yılında (Tiwari,vd., 2018) tarafından genelleştirilmiş ters türev tanımı verilmiştir. Bahsedilen makalede bir yarı-asal halkanın genelleştirilmiş ters türev yardımı ile halkanın değişmeli olup olmadığı incelenmiştir. Daha sonra (Asma ve Bano., 2018) tarafından çarpımsal (genelleştirilmiş) ters türev tanımı verilmiştir. İlgili makalede bir yarı-asal halkanın çarpımsal (genelleştirilmiş) ters türev içeren özdeşlikleri yardımıyla halkanın değişmeliliği araştırılmıştır. Son olarak 2021 yılında (Alhaidary ve Majeed., 2021) tarafından çarpımsal (genelleştirilmiş)-(α, β)-ters türev kavramı verilmiştir. Burada α ve β halkanın iki otomorfizmasıdır. Bahsedilen makalede yazarlar bir asal halkanın genelleştirilmiş-(α, β)-ters türev özdeşlikleri sayesinde değişmeli olduğunu göstermişlerdir.

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerden ikincisinde tezin anlaşılması hususunda kolaylık sağlamak açısından halka teorideki bazı genel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir..

Tezin üçüncü bölümünde (Ulutaş ve Gölbaşı., 2020), (Dhara, vd,, 2014) ve (Dhara, vd,, 2020) tarafından yapılan çalışmalar incelenmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde ise yarı-asal halkada, α halkada tanımlı anti-epimorfizma olmak üzere çarpımsal genelleştirilmiş-(α, α)-ters türev kullanılarak on iki sonuç elde edilmiştir. Bu sonuçların ilk sekizi (Ulutaş ve Gölbaşı., 2020) tarafından yapılan çalışma motivasyon alınarak, son dört sonuç ise (Dhara, vd., 2014) tarafından yapılan çalışma motivasyon alınarak elde edilmiştir.

İKİNCİ BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilk olarak, halka teoride önemli olan temel kavramların bazıları verilmiştir.

Tanım 2.1. $\emptyset \neq G$ olsun ve $\star: G \times G \to G$, $(\rho, \omega) \to \rho \star \omega$ işlemi tanımlansın. Böylece

(G1) Her $\rho, \omega, y \in G$ için $\rho \star (\omega \star y) = (\rho \star \omega) \star y$

(G2) Her $\rho \in G$ için $\rho \star e = e \star \rho = \rho$ olacak biçimde $e \in G$ vardır.

(G3) Her $\rho \in G$ için $\rho \star a = a \star \rho = e$ olacak biçimde $a \in G$ vardır.

koşulları sağlanıyorsa G kümesine $\star$ işlemine göre bir **grup** denir ve $(G,\star)$ ile gösterilir. Ayrıca her $\rho, \omega \in G$ için $\rho \star \omega = \omega \star \rho$ koşulu da sağlanıyorsa G grubuna **değişmeli grup** denir.

Tanım 2.2. $\emptyset \neq S \subseteq G$ olmak üzere, eğer S, G grubu üzerinde tanımlı olan işleme göre bir grup oluyorsa S kümesi G grubunun bir **altgrubu** olarak adlandırılır.

Tanım 2.3. G grubunun G ve $\{e_G\}$ dışındaki bir alt grubuna **öz altgrubu** denir.

Tanım 2.4. $H \neq \emptyset$ olacak şekilde bir küme, $+$ ve $\cdot$ H kümesi üzerinde tanımlı ikili işlemler olsun. Eğer

(H1) $(H, +)$ değişmeli bir grup,

(H2) Her $\rho, \omega, y \in H$ için $\rho \cdot (\omega \cdot y) = (\rho \cdot \omega) \cdot y$

(H3) Her $\rho, \omega, y \in H$ için

$$\rho \cdot (\omega + y) = (\rho \cdot \omega) + (\rho \cdot y)$$

ve

$$(\rho + \omega) \cdot y = (\rho \cdot y) + (\omega \cdot y)$$

koşullarını sağlayan H kümesine $+$ ve $\cdot$ işlemlerine göre bir **halka** denir ve $(\boldsymbol{H}, +, \cdot)$ ile gösterilir. Eğer H halkası;

(H4) Her $\rho, y \in H$ için $\rho \cdot y = y \cdot \rho$ koşulunu sağlıyorsa **değişmeli halka**,

(H5) Her $\rho \in H$ için $\rho \cdot 1_H = 1_H \cdot \rho = \rho$ olacak şekilde bir $1_H \in H$ elemanı varsa ve H halkası bu koşulu sağlıyorsa **birimli halka** adını alır.

Aksi belirtilmedikçe bu tez çalışmasında $(R, +, \cdot)$ bir halkayı ve 0, R halkasının $+$ işlemine göre birim elemanı olarak gösterilecektir. Ayrıca, yazımda kolaylık sağlaması için $\rho . y$ notasyonu yerine ρy kullanılacaktır.

Tanım 2.5. K, H halkasının boştan farklı bir altkümesi olsun. Eğer, K, H halkasındaki işlemlerine göre bir halka oluyorsa, K kümesi R halkasının bir **althalkası** olarak adlandırılır.

Tanım 2.6. $(K, ▫ , ▪)$ bir halka olmak üzere her $\rho, y \in K$ için

$$\star : K \times K \to K \,,\ (\rho, y) \to \rho \star y = y ▪ \rho$$

işlemi tanımlansın böylece $(K, ▫ , \star)$ halkasına **opposite halka** denir ve K^{op} olarak gösterilir.

Tanım 2.7. K, H halkasının bir altgrubu olsun. Eğer her $y \in K$ ve $\rho \in H$ için

$y\rho \in K$ ise K kümesine H halkasının bir sağ ideali

$\rho y \in K$ ise K kümesine H halkasının bir sol ideali

denir. Eğer K, H halkasının sağ ve sol ideali ise K'ya H halkasının bir **ideali (iki yanlı ideali)** denir ve $K < H$ ile gösterilir.

Önerme 2.8. Her ideal bir althalkadır fakat her althalka bir ideal olmayabilir.

Tanım 2.9. $(L, +, \cdot)$ ve $(J, *, \circ)$ iki halka olsun eğer $\mu : L \to J$ fonksiyonu her $\rho, y \in L$ için

$$\mu(\rho + y) = \mu(\rho) * \mu(y)$$

$$\mu(\rho \cdot y) = \mu(\rho) \circ \mu(y)$$

şartlarını sağlıyor ise μ fonksiyonuna **halka homomorfizması** denir. μ halka homomorfizması eğer bire-bir ise **halka monomorfizması,** örten ise **halka epimorfizması,** bire-bir ve örten ise **halka izomorfizması** adı verilir**.**

Tanım 2.10. $\mu : L \to L$ homomorfizmasına L halkasının **endomorfizması** ve μ izomorfizma ise μ fonsiyonuna L halkasının **otomorfizması** denir.

Tanım 2.11. $(L, +, \cdot)$ ve $(J, *, \circ)$ iki halka olsun eğer $\mu : L \to J$ fonksiyonu her $\rho, y \in L$ için

$$\mu(\rho + y) = \mu(\rho) * \mu(y)$$

$$\mu(\rho \cdot y) = \mu(y) \circ \mu(\rho)$$

koşulunu sağlıyor ise μ fonksiyonuna **halka anti-homomorfizması** denir.

Tanım 2.12. μ bir halka anti-homomorfizması olsun**.**

● μ bire-bir ise μ anti-homomorfizmasına **halka anti-monomorfizması,**

● μ örten ise μ anti-homomorfizmasına **halka anti-epimorfizması,**

● μ bire-bir ve örten ise μ anti-homomorfizmasına **halka anti-izomorfizması,**

adı verilir**.**

Tanım 2.13. H bir halka, $a \in H$ olmak şartıyla $a^n = 0$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa a elemanına H halkasının bir **nilpotent elemanı** denir.

Tanım 2.14. H bir halka ve $(0) \neq I$, H halkasının bir ideal olmak şartıyla $I^n = (0)$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa I idealine H halkasının **nilpotent ideali** denir.

Tanım 2.15. $Z(H) = \{\rho \in H \mid \rho y = y\rho, \forall y \in H\}$ şeklinde tanımlanan kümeye **merkez** denir. Biliniyor ki merkez halkanın althalkasıdır.

Tanım 2.16. H, K birer halka ayrıca $f: H \to K$ bir halka homomorfizması olsun

$$Kerf = \{\ \rho \in H \mid g(\rho) = 0_K\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye f homomorfizmasının **çekirdeği** denir.

Tanım 2.17. H bir halka. A, B ve θ, H halkanın idealleri ve $H \neq \theta$ olmak üzere

$$AB \subseteq \theta \Rightarrow A \subseteq \theta \ \vee \ B \subseteq \theta$$

koşulları sağlanıyorsa θ idealine H halkasının **asal ideali** denir.

Tanım 2.18. Bir halkanın sıfır ideali asal ideal ise bu halkaya **asal halka** denir.

Örnek 2.19. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tamsayılar halkası bir asal halkadır.

Not 2.20. H bir asal halka olsun. Her $\rho, y \in H$ için

$$\rho H y = (0) \Rightarrow \ \rho = 0 \vee y = 0$$

olur.

Tanım 2.21. Sıfır idealinden başka nilpotent ideal bulundurmayan halkaya **yarı-asal** halka denir.

Not 2.22. H yarı-asal halka ayrıca $(0) \neq K$, H halkasının bir asal ideali olsun. Her $\rho, y \in H$ için

$$\rho H \omega \subseteq K \Rightarrow \rho \in K \ \vee y \in K$$

dir.

Not 2.23. H bir yarı-asal halka olsun. $\rho \in H$ için

$$\rho H \rho = (0) \Rightarrow \rho = 0$$

dır.

Sonuç 2.24. Her asal halka bir yarı-asal halkadır fakat her yarı-asal halka bir asal halka olmayabilir.

Not 2.25. Bir yarı-asal halkanın merkezi sıfırdan farklı nilpotent eleman içermez.

Tanım 2.26. Bir H halkasında her $\rho \in H$ için $n\rho = 0$ olacak biçimde ρ elemanından bağımsız $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa bu şekildeki en küçük n'ye halkanın **karakteristiği** denir ve $\boldsymbol{CharH = n}$ ile gösterilir.

Tanım 2.27. H bir halka $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\rho \in H$ olmak şartıyla $n\rho = 0$ iken $\rho = 0$ ise H halkasına bir $\boldsymbol{n}$ **-torsion free (n-burulmasız)** halka denir.

●**Uyarı 2.28.** H halkası $\boldsymbol{n}$**-torsion free** ise $\mathbf{CharH} \neq \boldsymbol{n}$ dir.

●**Uyarı 2.29.** H asal halka olmak şartıyla $\mathrm{CharH} \neq 2$ ise H halkası 2-burulmasız bir halka olur.

İspat: Varsayalım ki $\mathrm{CharH} \neq 2$ ve $x \in H$ için $2x = 0$ olsun. O halde her $\rho, y \in H$ için $0 = 2x\rho y = x\rho(2y)$ olur. Buda her $y \in H$ için $xH(2y) = (0)$ dır. H bir asal halka olduğundan $x = 0$ veya her $y \in H$ için $2y = 0$ dır. $\mathrm{CharH} \neq 2$ olduğundan $x = 0$ bulunur. Yani H, 2-burulmasız bir halka olur.

Tanım 2.30. H bir halka olsun

$$[,]: H \times H \rightarrow H, \qquad [\rho, y] = \rho y - y\rho$$

olacak şekilde tanımlanan dönüşüm **komütatör (Lie komütatör)** olarak adlandırılır. Lie komütatör aşağıda yazılı özellikleri sağlar her $\rho, \omega, y \in H$ için

$$[\rho, \rho] = 0 \tag{2.1}$$

$$[\rho, \omega] = -[\omega, \rho] \tag{2.2}$$

$$[\rho + \omega, y] = [\rho, y] + [\omega, y] \tag{2.3}$$

$$[\rho, \omega + y] = [\rho, \omega] + [\rho, y] \tag{2.4}$$

$$[\rho, [\omega, y]] + [\omega, [y, \rho]] + [y, [\rho, \omega]] = 0 \tag{2.5}$$

Tanım 2.31. H bir halka olsun

$$\circ: H \times H \to H, \quad \rho \circ y = \rho y + y\rho$$

olacak şekilde tanımlanan dönüşüm **anti-komütatör (Jordan komütatör)** olarak adlandırılır. Jordan komütatör aşağıda yazılı özellikleri sağlar her $\rho, y, \omega \in H$ için

$$\rho \circ \rho = 2\rho^2 \tag{2.6}$$

$$(\rho + \omega) \circ y = \rho \circ y + \omega \circ y \tag{2.7}$$

$$\rho \circ (\omega + y) = \rho \circ \omega + \rho \circ y \tag{2.8}$$

$$\rho \circ k = k \circ \rho \tag{2.9}$$

Özellikler: Her $\rho, \omega, y \in H$ için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

$$[\rho\omega, y] = \rho[\omega, y] + [\rho, y]\omega \tag{2.10}$$

$$[\rho, \omega y] = \omega[\rho, y] + [\rho, \omega]y \quad (2.11)$$

$$\rho \circ (\omega\, y) = (\rho \circ \omega)y - \omega[\rho, y] \quad (2.12)$$

$$\rho \circ (\omega\, y) = \omega(\rho \circ y) + [\rho, \omega]y \quad (2.13)$$

$$(\rho\omega) \circ y = \rho(\omega \circ y) - [\rho, y]\omega \quad (2.14)$$

$$(\rho\omega) \circ y = (\rho \circ y)\omega + \rho[\omega, y] \quad (2.15)$$

Tanım 2.32. H bir halka, $d: H \to H$ bir dönüşüm olmak üzere her $\rho, y \in H$ için

$$d(\rho + y) = d(\rho) + d(y)$$

koşulu sağlanıyorsa d, H üzerinde bir **toplamsal dönüşüm** olarak adlandırılır.

Tanım 2.33. H halka ve $d: H \to H$ bir dönüşüm olmak üzere her $\rho, y \in H$ için

$$d(\rho + y) = d(\rho) + d(y)$$

$$d(\rho y) = d(\rho)y + \rho d(y)$$

koşullarını sağlayan d dönüşümüne H halkası üzerinde bir **türev** denir.

Örnek 2.34. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi olmak üzere $H = \left\{\begin{bmatrix} \rho & \omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \rho, \omega \in \mathbb{Z}\right\}$ halkası verilsin, $\theta: H \to H,\ \theta\left(\begin{bmatrix} \rho & \omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile tanımlanan dönüşüm H halkası üzerinde bir türevdir.

Çözüm: $\rho, \omega, n, r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $G = \begin{bmatrix} \rho & \omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} n & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in H$ olsun,

$$GT = \begin{bmatrix} \rho & \omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho n & \rho r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G + T = \begin{bmatrix} \rho & \omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho + n & \omega + r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

i. $\theta(G + T) = \theta(G) + \theta(T)$ mi?

$$\theta(G+T)=\theta\left(\begin{bmatrix}\rho+n & \omega+r\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & \rho+n\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

olur. Öte yandan, $\theta(G)=\begin{bmatrix}0 & \rho\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ve $\theta(T)=\begin{bmatrix}0 & n\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ olduğundan

$$\theta(G)+\theta(T)=\begin{bmatrix}0 & \rho\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & n\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \rho+n\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

dir. Böylece

$$\theta(G+T)=\theta(G)+\theta(T)$$

elde edilir.

ii. $\theta(GT)=\theta(G)T+G\theta(T)$ mi?

$$\theta(GT)=\theta\left(\begin{bmatrix}\rho n & \rho r\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & \rho n\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

dir. Öte yandan

$$\theta(G)T=\begin{bmatrix}0 & \rho\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n & r\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

ve

$$\theta(T)=\begin{bmatrix}\rho & \omega\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & n\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \rho n\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

olmak üzere

$$\theta(G)T+G\theta(T)=\begin{bmatrix}0 & \rho n\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$\theta(GT)=\theta(G)T+G\theta(T)$$

eşitliği bulunur. Böylece θ'nın H halkası üzerinde bir türev olduğu gösterilmiş olunur.

Tanım 2.35. H bir halka ve d, H halkası üzerinde tanımlı bir dönüşüm (toplamsal olmak zorunda değil) olmak üzere her $\rho, y \in H$ için

$$d(\rho y)=d(\rho)y+\rho d(y)$$

koşulunu sağlayan d dönüşümü H halkası üzerinde bir **çarpımsal türev** olarak adlandırılır.

Uyarı 2.36. Her türev bir çarpımsal türevdir fakat tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.37. $H = C[0,1]$ sürekli fonksiyonlar halkası ve $\mu: H \to H$ dönüşüm, $\phi \in H$ olmak üzere $\mu(\phi)$ aşağıdaki biçimde tanımlansın, o halde her $\omega \in [0,1]$ için

$$\mu(\phi)(\omega) = \begin{cases} \phi(\omega)\, log|\phi(\omega)|, & \phi(\omega) \neq 0 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

μ bir çapımsal türevdir ancak μ bir türev değildir.

Çözüm: $\phi(\omega), \gamma(\omega) \in \mathbb{R}$ olmak üzere

i. $\mu\big(\phi(\omega) + \gamma(\omega)\big) = \mu\big(\phi(\omega)\big) + \mu\big(\gamma(\omega)\big)$ mi?

$$\mu\big(\phi(\omega) + \gamma(\omega)\big) = \big(\phi(\omega) + \gamma(\omega)\big)\, log|\phi(\omega) + \gamma(\omega)|$$

$$= \phi(\omega)\, log|\phi(\omega) + \gamma(\omega)| + \gamma(\omega)\, log|\phi(\omega) + \gamma(\omega)|$$

dir. Öte yandan

$$\mu\big(\phi(\omega)\big) + \mu(\gamma(\omega)) = \phi(\omega) log \mid \phi(\omega) \mid + \gamma(\omega) log \mid \gamma(\omega) \mid$$

elde edilir. Böylece

$$\mu\big(\phi(\omega) + \gamma(\omega)\big) \neq \mu\big(\phi(\omega)\big) + \mu\big(\gamma(\omega)\big)$$

olur.

ii. $\mu(\phi(\omega)\gamma(\omega)) = \mu\big(\phi(\omega)\big)\gamma(\omega) + \phi(\omega)\mu\big(\gamma(\omega)\big)$ midir?

$$\mu\big(\phi(\omega)\gamma(\omega)\big) = \phi(\omega)\gamma(\omega) log \mid \phi(\omega)\gamma(\omega) \mid$$

$$= \phi(\omega)\gamma(\omega) log \mid \phi(\omega) \mid + \phi(\omega)\gamma(\omega) log \mid g(\omega) \mid$$

dir. Ayrıca

$$\mu\big(\phi(\omega)\big)\gamma(\omega) + \phi(\omega)\mu\big(\gamma(\omega)\big) = \phi(\omega)\gamma(\omega) log \mid \phi(\omega) \mid + \phi(\omega)\gamma(\omega) log \mid \gamma(\omega) \mid$$

elde edilir. Yani

$$\mu(\phi(\omega)\gamma(\omega)) = \mu\big(\phi(\omega)\big)\gamma(\omega) + \phi(\omega)\mu\big(\gamma(\omega)\big)$$

olduğu görülür. Böylece μ bir çapımsal türevdir ancak türev değildir.

Tanım 2.38. H bir halka, $T: H \to H$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $\rho, y \in H$ için

$$T(\rho y) = T(\rho)y + \rho d(y)$$

koşulunu sağlayan bir $d: H \to H$ türevi varsa T dönüşümüne $\boldsymbol{d}$ **ile belirlenmiş genelleştirilmiş türev** denir. (Braser 1991) (T, d) ikilisi d ile belirlenen T genelleştirilmiş türevini ifade eder.

Sonuç 2.39. Her türev kendisi ile belirli genelleştirilmiş türevdir fakat tersi her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 2.40. $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası olmak üzere ve $H = \left\{ \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \omega & y \end{pmatrix} \mid \rho,\ \omega,\ y \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi matrisler halkası üzerinde bilinen işlemler ile bir halkadır. $\mu, T: H \to H$ dönüşümleri

$$T\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \omega & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho + \omega & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\mu\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \omega & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T dönüşümü μ türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türevdir ancak türev değildir.

Çözüm: $\rho, \omega,\ y, e, j, l \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \omega & y \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} e & 0 \\ j & l \end{pmatrix} \in H$ olsun

$$nr = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \omega & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ j & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho e & 0 \\ \omega e + yj & yl \end{pmatrix}$$

$$n + r = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \omega & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & 0 \\ j & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho + e & 0 \\ \omega + j & y + l \end{pmatrix}$$

dir.

i. $\mu(n + r) = \mu(n) + \mu(r)$ midir?

$$\mu(n + r) = \mu\begin{pmatrix} \rho + e & 0 \\ \omega + j & y + l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega + j & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Öte yandan $\mu(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ ve $\mu(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ j & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$\mu(n) + \mu(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega + j & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$\mu(n+r) = \mu(n) + \mu(r)$$

olur.

ii. $\mu(nr) = \mu(n)r + n\mu(r)$ midir?

$$\mu(nr) = \mu\begin{pmatrix} \rho e & 0 \\ \omega e + yj & yl \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega e + yj & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca

$$\mu(n)r + n\mu(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ j & l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \omega & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega e + yj & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Böylece

$$\mu(nr) = \mu(n)r + n\mu(r)$$

elde edilir. Dolayısıyla μ dönüşümünün türev olduğu görülmüş olur.

iii. $T(nr) = T(n)r + n\mu(r)$ *ve* $T(nr) = T(n)r + nT(r)$ mi?

$T(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho + \omega & 0 \end{pmatrix}$, $T(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e + j & 0 \end{pmatrix}$ ve $\mu(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ j & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$T(nr) = T\begin{pmatrix} \rho e & 0 \\ \omega e + yj & yl \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho e + \omega e + yj & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca

$$T(n)r + n\mu(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho + \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ j & l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \omega & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho e + \omega e + yj & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Öte yandan

$$T(n)r + nT(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho + \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ j & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \omega & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e + j & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho e + \omega e + ye + yj & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece $T(nr) = T(n)r + n\mu\,(r)$ ve $T(nr) \neq T(n)r + nT(r)$ olduğu görülür. O halde (T, μ) genelleştirilmiş türevdir fakat T türev değildir.

Tanım 2.41. H bir halka $T: H \to H$ bir dönüşüm (toplamsal olmak zorunda değil) ve $d: H \to H$ bir çarpımsal türev olmak üzere her $\rho, y \in H$ için

$$T(\rho y) = T(\rho)y + \rho d(y)$$

koşulunu sağlayan T dönüşümüne ***d* ile belirlenmiş çarpımsal genelleştirilmiş türev** denir.

Sonuç 2.42. Her genelleştirilmiş türev çarpımsal genelleştirilmiş türevdir. Ancak her çarpımsal genelleştirilmiş türev genelleştirilmiş türev olmayabilir.

Örnek 2.43. K bir halka ve $H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \rho, \omega, y \in K \right\}$ şeklinde bir halka olsun $d, F: H \to H$ dönüşümleri

$$d\begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$S\begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda S, d çarpımsal türevi ile belirli çarpımsal genelleştirilmiş türevdir ancak genelleştirilmiş türev değildir.

Çözüm: $\rho, \omega, y, e, j, l \in K$ olmak üzere $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ olsun

$$\mathcal{M}\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho l \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} + \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho + e & \omega + j \\ 0 & 0 & y + l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i. $d(\mathcal{M} + \mathcal{F}) = d(\mathcal{M}) + d(\mathcal{F})$ mi?

$d(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $d(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$d(\mathcal{M}+\mathcal{F}) = d\begin{pmatrix} 0 & \rho+e & \omega+j \\ 0 & 0 & y+l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^2+2\rho e+e^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca

$$d(\mathcal{M})+d(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^2+e^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Böylece

$$d(\mathcal{M}+\mathcal{F}) \neq d(\mathcal{M})+d(\mathcal{F})$$

olduğu görülür. d toplamsal bir dönüşüm değildir. Dolayısıyla d bir türev değildir.

ii. $d(\mathcal{M}\mathcal{F}) = d(\mathcal{M})\mathcal{F} + \mathcal{M}d(\mathcal{F})$ mi?

$$d(\mathcal{M}\mathcal{F}) = d\begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho l \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca

$$d(\mathcal{M})\mathcal{F} + \mathcal{M}d(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Dolayısıyla

$$d(\mathcal{M}\mathcal{F}) = d(\mathcal{M})\mathcal{F} + \mathcal{M}d(\mathcal{F})$$

olduğu görülür. Yani d bir çarpımsal türevdir.

iii. $\mathrm{S}(\mathcal{M}\mathcal{F}) = \mathrm{S}(\mathcal{M})\mathcal{F} + \mathcal{M}d(\mathcal{F})$ midir?

$\mathrm{S}(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & jl \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$\mathrm{S}(\mathcal{M}\mathcal{F}) = S\begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca

$$\mathrm{S}(\mathcal{M})N + \mathcal{M}d(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu ise

$$\mathrm{S}(\mathcal{MF}) = \mathrm{S}(\mathcal{M})\mathcal{F} + \mathcal{M}d(\mathcal{F})$$

demektir. Böylece S, d çarpımsal türevi ile belirli çarpımsal genelleştirilmiş türevdir ancak d türev olmadığından (S, d) genelleştirilmiş türev değildir.

Tanım 2.44. H bir halka, $F: H \to H$ bir dönüşüm (toplamsal olmak zorunda değil) olmak üzere her $\rho, y \in H$ için

$$F(\rho y) = F(\rho)y + \rho d(y)$$

olacak biçimde bir $d: H \to H$ dönüşümü (toplamsal olmak zorunda değil) var ise F dönüşümüne ***d* ile belirlenmiş çarpımsal (genelleştirilmiş) türev** denir.

Tanım 2.45. S halka, $d: S \to S$ toplamsal dönüşüm ve $\alpha, \beta: S \to S$ iki dönüşüm olsun. Her $\rho, y \in S$ için

$$d(\rho y) = d(\rho)\alpha(y) + \beta(\rho)d(y)$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümüne **$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$-türev** denir.

Tanım 2.46. H bir halka, $d: H \to H$ (α, β)-türev ve $D: H \to H$ toplamsal dönüşüm olmak şartıyla her $\rho, y \in H$

$$D(\rho y) = D(\rho)\alpha(y) + \beta(\rho)d(y)$$

biçiminde tanımlanan D dönüşümüne ***d* ile belirlenmiş genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$-türev** denir.

denir.

Tanım 2.47. H halka, $d: H \to H$ bir dönüşüm (toplamsal olmak zorunda değil), $\alpha, \beta: H \to H$ iki dönüşüm ve $D: H \to H$ bir dönüşüm (toplamsal olmak zorunda değil) olmak üzere her $\rho, y \in H$ için

$$D(\rho y) = D(\rho)\alpha(y) + \beta(\rho)d(y)$$

şeklinde tanımlanan D dönüşümüne ***d* ile belirlenmiş çarpımsal (genelleştirilmiş)-$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$-türev** denir.

Örnek 2.48. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \rho, \omega, y \in \mathbb{Z} \right\}$ bir halka ve $d, F, \alpha, \beta: H \to H$ dönüşümleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$d\begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho & -\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta\begin{pmatrix} 0 & \rho & \omega \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Böylece F, d dönüşümü ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(α, β)-türevdir fakat genelleştirilmiş (α, β)-türev değildir.

Tanım 2.49. H halka ve $d: H \to H$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $\rho, y \in H$ için

$$d(\rho y) = d(y)\rho + y d(\rho)$$

koşulunu sağlayan d dönüşümüne H halkası üzerinde bir **ters türev** denir.

Tanım 2.50. H halka ve $d: H \to H$ bir dönüşüm (toplamsal olmak zorunda değil) olmak üzere her $\rho, y \in H$ için

$$d(\rho y) = d(y)\rho + y d(\rho)$$

koşulunu sağlayan d dönüşümüne H halkası üzerinde bir **çarpımsal ters türev** denir.

Tanım 2.51. H halka, $\theta: H \to H$ toplamsal bir dönüşüm olmak şartıyla her $\rho, y \in H$ için

$$\theta(\rho y) = \theta(y)\rho + y d(\rho)$$

ve

$$\theta(\rho y) = d(y)\rho + y\theta(\rho)$$

koşulunu sağlayan bir $d: H \to H$ ters türevi varsa θ dönüşümüne $\boldsymbol{d}$ **ile belirlenmiş sol(sağ) genelleştirilmiş ters türev** denir.

Tanım 2.52. H bir halka, $d: H \to H$ toplamsal bir dönüşüm ve $\alpha, \beta: H \to H$ iki dönüşüm olsun. Her $\rho, y \in H$ için

$$d(\rho y) = d(y)\alpha(\rho) + \beta(y)d(\rho)$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümüne $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$**-ters türev** denir.

Tanım 2.53. H bir halka, $d: H \to H$ (α, β)-ters türev olmak üzere $D: H \to H$ toplamsal dönüşüm her $\rho, y \in H$ için

$$D(\rho y) = D(y)\alpha(\rho) + \beta(y)d(\rho)$$

şeklinde tanımlanan D dönüşümüne $\boldsymbol{d}$ **ile belirlenmiş genelleştirilmiş-**$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$**-ters türev** denir.

Tanım 2.54. H bir halka, $d: H \to H$ bir dönüşüm (toplamsal olmak zorunda değil), $\alpha, \beta: H \to H$ iki dönüşüm ve $D: H \to H$ bir dönüşüm (toplamsal olmak zorunda değil) olmak üzere her $\rho, y \in H$ için

$$D(\rho y) = D(y)\alpha(\rho) + \beta(y)d(\rho) \; (D(\rho y) = d(y)\alpha(\rho) + \beta(y)D(\rho))$$

biçiminde tanımlanan D dönüşümüne $\boldsymbol{d}$ **ile belirlenmiş çarpımsal (genelleştirilmiş)-** $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$**-ters türev** denir.

Tanım 2.55. H bir halka, $M \subseteq H$ olsun. Eğer $m, n \in M$ için $m\rho n \in M$ olacak şekilde an az bir $\rho \in H$ var ise M kümesine bir $\boldsymbol{m}$**_sistem** denir.

Tanım 2.56. H bir halka ve S, H halkasının bir ideali olmak üzere

$$B(S) = \{r \in H \mid \forall M, m\_sistem \; \ni r \in M \Rightarrow M \cap S \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanan $B(S)$ kümesine S idealinin **asal radikali** denir.

Tanım 2.57. H halkasının sıfır idealinin asal radikaline H halkasının **asal radikali** denir.

Teorem 2.58. (McCoy N. H. , 1964, Teorem 4.20) Bir halkanın asal radikali, o halkanın tüm asal ideallerin kesişimidir ve her yarı-asal ideal tarafından kapsanılan bir yarı-asal idealdir.

Lemma 2.59. H yarı-asal halka, $a \in H$ olsun. Eğer her $\rho \in H$ için $a[a, \rho] = 0$ ise $a \in Z(H)$ olur.

İspat: Varsayalım ki her $\rho \in H$ için

$$0 = a[a, \rho]$$

olsun. Bu eşitlik $r \in H$ olmak üzere ρ yerine ρr yazılıp (2.11) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, r \in H$ için

$$0 = a[a, \rho r] = a\rho[a, r] + a[a, \rho]r$$

eşitliğine ulaşılır. Burada hipotez kullanılırsa her $\rho, r \in H$ için

$$0 = a\rho[a, r] \tag{2.16}$$

olur. (2.16) eşitliğinde ρ yerine $r\rho$ yazılarak düzenlenirse her $\rho, r \in H$ için

$$0 = ar\rho[a, r] \tag{2.17}$$

Bulunur. (2.16) eşitliği soldan r ile çarpılırsa her $\rho, r \in H$ için

$$0 = ra\rho[a, r] \tag{2.18}$$

elde edilir. (2.17) eşitliğinden (2.18) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, r \in H$ için

$$0 = [a, r]\rho[a, r]$$

olur. Yani her $r \in H$ için

$$(0) = [a, r]H[a, r]$$

dır. H yarı-asal halka olduğundan her $r \in H$ için

$$0 = [a, r]$$

eşitliğine ulaşılır. Bu da $a \in Z(H)$ demektir.

Lemma 2.60. $(\boldsymbol{a})$ R yarı-asal halka, $(0) \neq I, R$ halkasının tek yanlı herhangi bir ideali olmak üzere $Z(I) \subset Z(R)$ dir. Ayrıca halkanın tek yanlı ideali değişmeli ise $I \subset Z(R)$ olur.

(b) Eğer R asal halka, $(0) \neq I$, R halkasının tek yanlı herhangi bir ideali olmak şartıyla $I \subset Z(R)$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: $(\boldsymbol{a})$ Varsayalım ki $(0) \neq I$, R halkasının bir sağ ideali $\rho \in Z(I)$ ve $y \in R$ olsun. Böylece I sağ ideal olduğundan $\rho y \in Z(I)$ olur. Ayrıca merkez tanımından her $y \in R$ için

$$0 = [\rho, \rho y]$$

dır. Bu ifade (2.1) ve (2.11) eşitliğine göre düzenlenirse her $y \in R$ için

$$0 = \rho[\rho, y]$$

olur. Bu ise Lemma 2.59. dan $\rho \in Z(R)$ demektir. Dolayısıyla $Z(I) \subset Z(R)$ olduğu görülür.

Eğer I değişmeli bir sağ ideal ise $I = Z(I)$ olur. Burada $Z(I) \subset Z(R)$ olduğundan $I \subset Z(R)$ olduğu görülür. Bu ispat benzer şekilde bir sol ideal için de yapılabilir.

(b) Hipotezden $(0) \neq I$, R asal halkasının bir sağ ideali olmak şartıyla $I \subset Z(R)$ olsun. Böylece $\rho, y \in R$, $a \in I$ için $a\rho \in I$ ve dolayısıyla $a\rho \in Z(R)$ olur. Bu ise her $\rho, y \in R$ ve $a \in I$ için

$$0 = [a\rho, y]$$

demektir. Bu eşitlik Lie komütatör tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in R$ ve $a \in I$ için

$$0 = [a\rho, y] = (a\rho)y - y(a\rho)$$

bulunur. Burada $a \in I \subset Z(R)$ olduğundan her $\rho, y \in R$ ve $a \in I$ için

$$(a\rho)y = y(a\rho) = (ya)\rho = (ay)\rho = a(y\rho)$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in R$ ve $a \in I$ için

$$0 = a(\rho y) - a(y\rho)$$

olur. Elden edilen bu eşitlik Lie komütatör tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in R$ ve $a \in I$ için

$$0 = a[\rho, y]$$

olur. Bu eşitlik $r \in R$ olmak üzere a yerine ar yazılarak düzenlenirse $\rho, y, r \in R$ ve $a \in I$ için

$$0 = ar[\rho, y]$$

elde edilir. Buradan her $\rho, y \in R$ ve $a \in I$ için

$$(0) = aR[\rho, y]$$

olur. R asal halka olduğundan her $a \in I$ için $a = 0$ yani $I = (0)$ veya her $\rho, y \in R$ için $[\rho, y] = 0$ olur. Kabulümüze göre $I \neq (0)$ olduğundan her $\rho, y \in R$ için $[\rho, y] = 0$ olur. Böylece R halkasının değişmeli olduğu gösterilmiş olur. İspat bir sol ideal içinde benzer şekilde yapılabilir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
ÇARPIMSAL GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ HALKALAR İLE İLGİLİ ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

3.1. Yarı-asal Halkalarda Çarpımsal (Genelleştirilmiş)-(α, α)-Türevler Üzerine Sonuçlar

Bu bölümde (Ulutaş ve Gölbaşı., 2020) tarafından yapılan “Results on Multiplicative (Generalized)-(α, α)-Derivation” adlı çalışma incelenmiştir.

Lemma 3.1.1. R bir yarı-asal halka ve $(0) \neq I$, R halkasının ideali olmak üzere $a \in R$ ve her $\rho \in I$ için $a\rho a = 0$ ise $a = 0$ olur.

İspat: Varsayalım ki $a \in R$ olmak şartıyla her $\rho \in I$ için

$$0 = a\rho a$$

olsun. Bu eşitlikte $r \in R$ olmak şartıyla ρ yerine $r\rho$ yazılırsa her $\rho \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = ar\rho a$$

bulunur. Bulunan bu eşitlik soldan ρ elemanı ile çarpılırsa her $\rho \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = \rho ar\rho a$$

olur. Yani her $\rho \in I$ için

$$(0) = \rho aR\rho a$$

elde edilir. Burada R yarı-asal halka olduğundan her $\rho \in I$ için $\rho a = 0$ olur.

Öte yandan hipotezde $r \in R$ olmak üzere ρ yerine ρr yazılırsa $a\rho ra = 0$ olur. Bu eşitlik sağdan ρ ile çarpılırsa her $r \in R$ ve $\rho \in I$ için $a\rho ra\rho = 0$ eşitliğine ulaşılır. Bu ise her $\rho \in I$ için $a\rho Ra\rho = (0)$ demektir. R yarı-asal halka olduğundan her $\rho \in I$ için $a\rho = 0$ olur. Dolayısıyla her $\rho \in I$ için $a\rho = \rho a$ olur. Burada Lemma 2.60. (a) kullanılarak $a \in Z(I) \subset Z(R)$ bulunur. O halde $a \in Z(R)$ dir.

Hipotezde ρ yerine a alınırsa $a^3 = 0$ olur. Böylece Not 2.27. den $a = 0$ olur.

Ele alınan bu bölümde R yarı-asal halka, $(0) \neq I$, R halkasının ideali, $d: R \to R$ bir dönüşüm, $\alpha: R \to R$ bir otomorfizma ve $F: R \to R$ ise (F, d) çarpımsal (genelleştirilmiş)-(α, α)-türev olarak alınacaktır.

Teorem 3.1.1 Her $\rho, y \in I$ için $F([\rho, y]) = 0$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$0 = F([\rho, y]) \tag{3.1}$$

olsun. (3.1) eşitliği y elemanı $y\rho$ elemanıyla değiştirilip sırasıyla (2.11) eşitliği, (2.1) eşitliği ve F'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= F([\rho, y\rho]) \\ &= F([\rho, y]\rho) \\ &= F([\rho, y])\alpha(\rho) + \alpha([\rho, y])d(\rho) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bir üst satırdaki eşitlikte (3.1) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$\alpha([\rho, y])d(\rho) = 0$$

bulunur. Bu son eşitlikte α'nın tanımı ve Lie komütatör tanımı kullanılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \alpha(y)]d(\rho) \tag{3.2}$$

olduğu görülür. Yani her $\rho, y \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \alpha(I)]d(\rho)$$

olur. Bir idealin bir otomorfizma altındaki görüntüsü ideal olduğundan $\alpha(I)$ idealdir. Burada $\alpha(I) = J$ olarak adlandırılırsa her $\rho, y \in I$ için $[\alpha(\rho), J]d(\rho) = (0)$ olur. Bu ise her $\omega \in J$ ve $\rho \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \omega]d(\rho) \tag{3.3}$$

demektir. $r \in R$ olacak şekilde (3.3) eşitliği ω elemanı $r\omega$ elemanıyla değiştirilip (2.11) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\omega \in J$, $\rho \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = r[\alpha(\rho), \omega]d(\rho) + [\alpha(\rho), r]\omega d(\rho)$$

elde edilir. (3.3) eşitliği soldan r elemanıyla çarpılıp bir üst satırdaki eşitlikten çıkarılırsa her $\omega \in J$, $\rho \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(\rho), r]\omega d(\rho) \tag{3.4}$$

bulunur. Elde edilen (3.4) eşitliği sağdan $\alpha(\rho)$ ile çarpılırsa her $\omega \in J$, $\rho \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(\rho), r]\omega d(\rho)\alpha(\rho) \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.4) ω elemanı yerine $\omega\alpha(\rho)$ elemanı yazılarak düzenlenirse her $\omega \in J$, $\rho \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(\rho), r]\omega\alpha(\rho)d(\rho) \tag{3.6}$$

olur. Elde edilen (3.6) eşitliğinden (3.5) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\omega \in J$, $\rho \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(\rho), r]\omega[\alpha(\rho), d(\rho)] \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) eşitliğinde r elemanı yerine $d(\rho)$ elemanı yazılırsa her $\omega \in J$ ve $\rho \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), d(\rho)]\omega[\alpha(\rho), d(\rho)]$$

olduğu görülür. Yani her $\omega \in J$ ve $\rho \in I$ için

$$(0) = [\alpha(\rho), d(\rho)]J[\alpha(\rho), d(\rho)]$$

denklemine ulaşılır. J yarı-asal halka olduğundan her $\rho \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), d(\rho)]$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho \circ y) = 0$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$0 = F(\rho \circ y) \tag{3.8}$$

olsun. (3.8) eşitliğinde y yerine $y\rho$ yazılıp F'nin tanımı, (2.12) ve (2.1) eşitlikleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= F\big((\rho \circ y)\rho\big) \\ &= F(\rho \circ y)\alpha(\rho) + \alpha(\rho \circ y)d(\rho) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlik (3.8) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha(\rho \circ y)d(\rho) \tag{3.9}$$

elde edilir. $r \in R$ olmak şartıyla (3.9) eşitliği y elemanı ry elemanıyla değiştirilip (2.13) eşitliğinden yararlanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(\rho \circ (ry))d(\rho) \\ &= \alpha(r(\rho \circ y) + [\rho, r]y)d(\rho) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Elde edilen bu eşitlik α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = \alpha(r)\alpha(\rho \circ y)d(\rho) + \alpha([\rho, r])\alpha(y)d(\rho)$$

elde edilir. (3.9) eşitliği soldan $\alpha(r)$ çarpılıp üst satırdaki eşitlikten çıkarılırsa her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = \alpha([\rho, r])\alpha(y)d(\rho)$$

bulunur. Bu eşitlik α'nın tanımı ve Lie komütatör tanımından faydalanarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \alpha(r)]\alpha(y)d(\rho)$$

olduğu görülür. α otomorfizma olduğundan $\alpha(R) = R$ dir. Burada $\alpha(I) = J$ olarak adlandırılırsa her $\rho \in I$ için

$$(0) = [\alpha(\rho), R]Jd(\rho)$$

olur. Bu ise $\omega \in J$, $\rho \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(\rho), r]\omega d(\rho)$$

demektir. Böylece Teorem 3.1.1. (3.4) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Teorem 3.1.3. Her $\rho, y \in I$ için $F([\rho, y]) = \pm\alpha([\rho, y])$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y]) = \pm\alpha([\rho, y]) \tag{3.10}$$

olsun. (3.10) eşitliği y yerine $y\rho$ yazılıp (2.1) ve (2.11) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y]\rho) = \pm\alpha([\rho, y]\rho)$$

olduğu görülür. Bu son eşitlik F ve α dönüşümlerinin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y])\alpha(\rho) + \alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha([\rho, y])\alpha(\rho)$$

bulunur. Bu ifade (3.10) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ *için*

$$\pm\alpha([\rho, y])\,\alpha(\rho) + \alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha([\rho, y])\alpha(\rho)$$

olur. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha([\rho, y])d(\rho)$$

bulunur. Bu eşitlik α'nın tanımı ve Lie komütatör tanımından faydalanarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \alpha(y)]d(\rho)$$

eşitliği elde edilir. Buradan Teorem 3.1.1 (3.2) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Teorem 3.1.4. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho \circ y) = \pm\alpha(\rho \circ y)$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho \circ y) = \pm\alpha(\rho \circ y) \tag{3.11}$$

olsun. (3.11) eşitliği y yerine $y\rho$ yazılıp α'nın tanımı, (2.1) ve (2.12) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F((\rho \circ y)\rho) = \pm\alpha((\rho \circ y)\rho)$$

bulunur. Bu eşitlik F'nin ve α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse he$r$ $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho \circ y)\alpha(\rho) + \alpha(\rho \circ y)d(\rho) = \pm\alpha(\rho \circ y)\alpha(\rho)$$

elde edilir. Bu son eşitlik (3.11) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$\pm\alpha(\rho \circ y)\alpha(\rho) + \alpha(\rho \circ y)d(\rho) = \pm\alpha(\rho \circ y)\alpha(\rho)$$

bulunur. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha(\rho \circ y)d(\rho)$$

olur. Böylece Teorem 3.1.2. (3.9) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Teorem 3.1.5. Her $\rho, y \in I$ için $F([\rho, y]) = \pm\alpha(\rho \circ y)$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y]) = \pm\alpha(\rho \circ y)$$

olsun. Bu eşitlik y yerine $y\rho$ yazılıp (2.1), (2.11) ve (2.12) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y]\rho) = \pm\alpha((\rho \circ y)\rho)$$

bulunur. Burada F'nin ve α'nın tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y])\alpha(\rho) + \alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha(\rho \circ y)\alpha(\rho)$$

elde edilir. Bu ifade hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$\pm\alpha(\rho \circ y)\alpha(\rho) + \alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha(\rho \circ y)\alpha(\rho)$$

olur. Elde edilen bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha([\rho, y])d(\rho)$$

bulunur. Son eşitlik α'nın tanımı ve Lie komütatör tanımından yararlanarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \alpha(y)]d(\rho)$$

eşitliği elde edilir. Böylece Teorem 3.1.1 (3.2) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Teorem 3.1.6. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho \circ y) = \pm\alpha([\rho, y])$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho \circ y) = \pm\alpha([\rho, y])$$

olsun. Bu eşitlik y yerine $y\rho$ yazılıp (2.1), (2.12) ve (2.11) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F((\rho \circ y)\rho) = \pm\alpha([\rho, y]\rho)$$

elde edilir. Burada F'nin ve α'nın tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho \circ y)\alpha(\rho) + \alpha(\rho \circ y)d(\rho) = \pm\alpha([\rho, y])\alpha(\rho)$$

bulunur. Bu ifade hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$\pm\alpha([\rho, y])\alpha(\rho) + \alpha(\rho \circ y)d(\rho) = \pm\alpha([\rho, y])\alpha(\rho)$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha(\rho \circ y)d(\rho)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece Teorem 3.1.2. (3.9) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Teorem 3.1.7. Her $\rho, y \in I$ için $F([\rho, y]) = \pm\alpha([F(\rho), y])$ ise her ρ elemanı için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y]) = \pm\alpha([F(\rho), y])$$

olsun. Bu eşitlik y yerine $y\rho$ yazılıp (2.1) eşitliği ve (2.11) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y]\rho) = \pm\alpha(y[F(\rho), \rho] + [F(\rho), y]\rho)$$

olur. Burada F'nin ve α'nın tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y])\alpha(\rho) + \alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho]) \pm \alpha([F(\rho), y])\alpha(\rho)$$

elde edilir. Benzer şekilde bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$\pm\alpha([F(\rho), y])\alpha(\rho) + \alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho]) \pm \alpha([F(\rho), y])\alpha(\rho)$$

olur. Böylece gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$\alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho]) \tag{3.12}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.12) eşitliği $r \in R$ olmak şartıyla y elemanı ry elemanı ile değiştirilip (2.11) eşitliği ve α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$\alpha([\rho, r])\alpha(y)d(\rho) + \alpha(r)\alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha(r)\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho])$$

bulunur. Son eşitlikte (3.12) eşitliği kullanılırsa her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$\alpha([\rho, r])\alpha(y)d(\rho) \pm \alpha(r)\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho]) = \pm\alpha(r)\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho])$$

olduğu görülür. Burada gerekli düzenleme yapıldıktan sonra her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = \alpha([\rho, r])\alpha(y)d(\rho)$$

bulunur. Bu eşitlik α'nın tanımı ve Lie komütatör tanımından faydalanarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \alpha(r)]\alpha(y)d(\rho)$$

olur. Buradan her $\rho \in I$ için

$$(0) = [\alpha(\rho), \alpha(R)]\alpha(I)d(\rho)$$

bulunur. α otomorfizma olduğundan $\alpha(R) = R$ dir. Ayrıca $\alpha(I) = J$ olarak adlandırılsa her $\rho \in I$ için

$$(0) = [\alpha(\rho), R]Jd(\rho)$$

elde edilir. Bu ifade her $\rho \in I$, $\omega \in J$ ve $r \in R$ için $0 = [\alpha(\rho), r]\omega d(\rho)$

olur. Böylece Teorem 3.1.1. (3.4) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Teorem 3.1.8. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho o y) = \pm\alpha(F(\rho) o y)$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho \circ y) = \pm\alpha(F(\rho) \circ y)$$

olsun. Bu ifade y elemanı yerine $y\rho$ elemanı yazılıp (2.1) ve (2.12) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F((\rho \circ y)\rho) = \pm\alpha((F(\rho) \circ y)\rho - y[F(\rho), \rho])$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik F'nin ve α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho \circ y)\alpha(\rho) + \alpha(\rho \circ y)d(\rho) = \pm\alpha(F(\rho) \circ y)\alpha(\rho) \mp \alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho])$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$\pm\alpha(F(\rho) \circ y)\alpha(\rho) + \alpha(\rho \circ y)d(\rho) = \pm\alpha(F(\rho) \circ y)\alpha(\rho) \mp \alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho])$$

bulunur. Bu ifadede gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra her $\rho, y \in I$ için

$$\alpha(\rho \circ y)d(\rho) = \mp\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho]) \tag{3.13}$$

olur. (3.13) eşitliğinde $r \in R$ olmak üzere y yerine ry yazılıp (2.13) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$\alpha(r(\rho \circ y) + [\rho, r]y)d(\rho) = \mp\alpha(ry)\alpha([F(\rho), \rho])$$

olduğu görülür. Bu eşitlik α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$\alpha(r)\alpha(\rho \circ y)d(\rho) + \alpha([\rho, r])\alpha(y)d(\rho) = \mp\alpha(r)\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho])$$

olur. Böylece bu eşitlikte (3.13) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$\mp\alpha(r)\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho]) + \alpha([\rho, r])\alpha(y)d(\rho) = \mp\alpha(r)\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho])$$

bulunur. Bulunan bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = \alpha([\rho, r])\alpha(y)d(\rho)$$

eşitliğine ulaşılır. Elde edilen bu eşitlik α'nın tanımı ve Lie komütatör tanımından yararlanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \alpha(r)]\alpha(y)d(\rho)$$

olur. Buradan her $\rho \in I$ için

$$(0) = [\alpha(\rho), \alpha(R)]\alpha(I)d(\rho)$$

bulunur. α otomorfizma olduğundan $\alpha(R) = R$ dir. Burada $\alpha(I) = J$ olarak adlandırılsa her $\rho \in I$ için

$$(0) = [\alpha(\rho), R]Jd(\rho)$$

olur. Buradan her $\rho \in I$, $\omega \in J$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(\rho), r]\omega d(\rho)$$

bulunur. Böylece Teorem 3.1.1 (3.4) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

3.2. Yarı-asal Halkalarda Homomorfizma ve Anti-Homomorfizma Gibi Davranan Çarpımsal (Genelleştirilmiş)-(σ, σ)-Türevler

Bu bölümde (Dhara, vd., 2014) tarafından yapılmış olan "A Multiplicative (Generalized)-(σ, σ)-Derivation Acting as (Anti-) Homomorphism in Semiprime Rings" adlı çalışma incelenmiştir.

Bu bölümde aksi belirtilmediği sürece R yarı-asal halka, $(0) \neq I$, R halkasının bir sol ideali, d: R → R bir dönüşüm, σ: R → R bir epimorfizma ve F: R → R dönüşümü ise (F, d) bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-(σ, σ)-türev olarak alınacaktır.

Teorem 3.2.1. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho y) - F(\rho)F(y) = 0$ ise $\sigma(I)d(I) = (0)$ ve her $\rho \in I$ için $\sigma(I)[F(\rho), \sigma(\rho)] = (0)$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho y) = F(\rho)F(y)$$

olsun. Bu eşitlik $\omega \in I$ olmak üzere y yerine $y\omega$ yazılıp F'nin tanımı ve hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in I$ için

$$F(\rho(y\omega)) = F(\rho)F(y\omega) = F(\rho)(F(y)\sigma(\omega) + \sigma(y)d(\omega))$$

elde edilir. Yani her $\rho, y, \omega \in I$ için

$$F(\rho(y\omega)) = F(\rho)F(y)\sigma(\omega) + F(\rho)\sigma(y)d(\omega) \tag{3.14}$$

olur. Ayrıca F'nin tanımı gereği her $\rho, y, \omega \in I$ için $F\big((\rho y)\omega\big) = F(\rho y)\sigma(\omega) + \sigma(\rho y)d(\omega)$ dir. Bu eşitlik σ'nın tanımı ve hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in I$ için

$$F\big((\rho y)\omega\big) = F(\rho)F(y)\sigma(\omega) + \sigma(\rho)\sigma(y)d(\omega) \tag{3.15}$$

elde edilir. $\rho(y\omega) = (\rho y)\omega$ dir. Burada (3.14) eşitliğinden (3.15) eşitliği çıkarılırsa her $\rho, y, \omega \in$ I için

$$0 = (F(\rho) - \sigma(\rho))\sigma(y)d(\omega)$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlik $r \in R$ olmak üzere y yerine ry yazılıp σ'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = (F(\rho) - \sigma(\rho))\sigma(r)\sigma(y)d(\omega)$$

olur. Bu son eşitlik soldan $F(y)$ ile çarpılıp düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = F(y)(F(\rho) - \sigma(\rho))\sigma(r)\sigma(y)d(\omega)$$

olur. σ epimorfizma olduğundan $\sigma(R) = R$ dir. Yani her $\rho, y, \omega \in I$ için

$$(0) = F(y)(F(\rho) - \sigma(\rho))R\sigma(y)d(\omega) \tag{3.16}$$

elde edilir. F'nin tanımı ve hipotez gereği her $\rho, y \in I$ için $F(\rho)F(y) = F(\rho y) = F(\rho)\sigma(y) + \sigma(\rho)d(y)$ dir. Bu eşitlik düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho)\big(F(y) - \sigma(y)\big) = \sigma(\rho)d(y) \tag{3.17}$$

olur. (3.17) eşitliğinde y elemanı yerine ρ elemanı ve ρ elemanı yerine y elemanı yazılırsa her $\rho, y \in I$ için $F(y)\big(F(\rho) - \sigma(\rho)\big) = \sigma(y)d(\rho)$ bulunur. Elde edilen bu eşitlik (3.16) eşitliğinde yerine yazılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$(0) = \sigma(y)d(\rho)R\sigma(y)d(\rho)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.17) eşitliğinde y yerine ω ve ρ yerine y yazılırsa her $y, \omega \in I$ için $F(y)\big(F(\omega) - \sigma(\omega)\big) = \sigma(y)d(\omega)$ olur. Bu eşitlik (3.16) eşitliğinde kullanılırsa her $\rho, y, \omega \in I$ için

$$(0) = F(y)\big(F(\rho) - \sigma(\rho)\big)RF(y)(y(\omega) - \sigma(\omega))$$

bulunur. Elde edilen bu son eşitlikte ω elemanı ρ elemanıyla değiştirilirse her $\rho, y \in I$ için $(0) = F(y)\big(F(\rho) - \sigma(\rho)\big)RF(y)(F(\rho) - \sigma(\rho))$ olur. Böylece her $\rho, y \in I$ için

$$(0) = \sigma(y)d(\rho)R\sigma(y)d(\rho)$$

ve

$$(0) = F(y)\big(F(\rho) - \sigma(\rho)\big)RF(y)(F(\rho) - \sigma(\rho))$$

eşitlikleri elde edilir. R yarı-asal halka olduğundan her ρ, y elemanları için $0 = \sigma(y)d(\rho)$ yani $0 = \sigma(I)d(I)$ ve her $\rho, y \in I$ için

$$F(y)\big(F(\rho) - \sigma(\rho)\big) = 0 \qquad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) eşitliğinde y yerine $y\rho$ yazılıp F'nin tanımı ve $0 = \sigma(I)d(I)$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$0 = F(y)\sigma(\rho)\big(F(\rho) - \sigma(\rho)\big)$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = F(y)\sigma(\rho)F(\rho) - F(y)\sigma(\rho)\sigma(\rho) \qquad (3.19)$$

bulunur. (3.18) eşitliği ρ yerine ρρ yazılıp F'nin tanımı, σ'nın tanımı ve $0=\sigma(I)d(I)$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$0=F(y)(F(\rho)\sigma(\rho)-\sigma(\rho)\sigma(\rho))$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0=F(y)F(\rho)\sigma(\rho)-F(y)\sigma(\rho)\sigma(\rho) \qquad (3.20)$$

elde edilir. (3.20) eşitliğinden (3.19) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımından yararlanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0=F(y)[F(\rho),\sigma(\rho)]$$

olur. Bu son eşitlik y yerine $y\omega$ yazılıp F'nin tanımı ve $0=\sigma(I)d(I)$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse yararlanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in I$ için

$$0=F(y)\sigma(\omega)[F(\rho),\sigma(\rho)] \qquad (3.21)$$

elde edilir. (3.21) eşitliği ω yerine $y\omega$ yazılıp σ'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in I$ için

$$0=F(y)\sigma(y)\sigma(\omega)[F(\rho),\sigma(\rho)] \qquad (3.22)$$

bulunur. Ayrıca (3.21) eşitliği soldan $\sigma(y)$ ile çarpılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in I$ için

$$0=\sigma(y)F(y)\sigma(\omega)[F(\rho),\sigma(\rho)] \qquad (3.23)$$

olur. Elde edilen (3.22) eşitliğinden (3.23) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \omega \in I$ için

$$0=[F(y),\sigma(y)]\sigma(\omega)[F(\rho),\sigma(\rho)]$$

elde edilir. Son eşitlikte y yerine ρ yazılırsa her $\rho,\omega\in I$ için

$$0=[F(\rho),\sigma(\rho)]\sigma(\omega)[F(\rho),\sigma(\rho)]$$

bulunur. Bu son ifade $r\in R$ olmak üzere ω yerine $r\omega$ yazılıp σ'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho,\omega\in I$ ve $r\in R$ için

$$0=[F(\rho),\sigma(\rho)]\sigma(r)\sigma(\omega)[F(\rho),\sigma(\rho)]$$

olur. σ epimorfizma olduğundan $\sigma(R)=R$ dir. O halde her $\rho,\omega\in I$ için

$$(0)=[F(\rho),\sigma(\rho)]R\sigma(\omega)[F(\rho),\sigma(\rho)]$$

demektir. Bu eşitlik soldan $\sigma(\omega)$ ile çarpılırsa her $\rho,\omega\in I$ için

$$(0)=\sigma(\omega)[F(\rho),\sigma(\rho)]R\sigma(\omega)[F(\rho),\sigma(\rho)]$$

eşitliğine ulaşılır. R yarı-asal halka olduğundan her $\rho,\omega\in I$ için

$$0=\sigma(\omega)[F(\rho),\sigma(\rho)]$$

olduğu görülür. Buradan her $\rho\in I$ için $0=\sigma(I)[F(\rho),\sigma(\rho)]$ olur.

Teorem 3.2.2. Her $\rho,y\in I$ için $F(\rho y)+F(\rho)F(y)=0$ ise $\sigma(I)d(I)=(0)$ ve her $\rho\in I$ için $\sigma(I)[F(\rho),\sigma(\rho)]=(0)$ olur.

İspat: F, d dönüşümü ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(σ,σ)-türev**,** $-F$, $-d$ dönüşümü ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(σ,σ)-türevdir Teorem 3.2.1. de F dönüşümü yerine $-F$, d dönüşümü yerine $-d$ dönüşümü yazılarak sonuca ulaşılır.

Teorem 3.2.3. Her $\rho,y\in I$ için $F(\rho y)-F(y)F(\rho)=0$ ise her $\rho\in I$ için $\sigma(I)[d(\rho),\sigma(\rho)]=(0)$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho,y\in I$ için

$$F(\rho y)=F(y)F(\rho)$$

olsun. Ayrıca F dönüşümü tanımı gereği her $\rho,y\in I$ için $F(\rho y)=F(\rho)\sigma(y)+\sigma(\rho)d(y)$ dir. Bu eşitlikte ρ yerine ρy yazılırsa her $\rho,y\in I$ için $F((\rho y)y)=F(\rho y)\sigma(y)+\sigma(\rho y)d(y)$ olur. Hipotezde ρ yerine ρy yazılıp F'nin tanımı kullanılırsa her ρ,y elemanları için

$F((\rho y)y) = F(y)F(\rho y) = F(y)(F(\rho)\sigma(y) + \sigma(\rho\,)d(y))$ eşitliği elde edilir. Görüldüğü üzere bu elde edilen iki eşitlik birbirine eşittir yani her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho y)\sigma(y) + \sigma(\rho y)d(y) = F(y)(F(\rho)\sigma(y) + \sigma(\rho)d(y))$$

olur. Bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F(y)F(\rho)\sigma(y) + \sigma(\rho y)d(y) = F(y)F(\rho)\sigma(y) + F(y)\sigma(\rho)d(y)$$

elde edilir. Böylece her $\rho, y \in I$ için

$$0 = (\sigma(\rho y) - F(y)\sigma(\rho))d(y) \tag{3.24}$$

olur. Bu eşitlik $r \in R$ olmak üzere ρ yerine $r\rho$ yazılıp σ'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = (\sigma(r)\sigma(\rho y) - F(y)\sigma(r)\sigma(\rho))d(y)$$

elde edilir. σ epimorfizma olduğundan $\sigma(R) = R$ olur. Yani her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = (r\sigma(\rho y) - F(y)r\sigma(\rho))d(y)$$

olur. Bu eşitlik $\omega \in I$ olmak üzere r yerine $F(\omega)$ yazılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in I$ için

$$0 = F(\omega)\sigma(\rho y)d(y) - F(y)F(\omega)\sigma(\rho)d(y) \tag{3.25}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (3.24) ifadesi soldan $F(\omega)$ elemanıyla çarpılıp düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in I$ için $0 = F(\omega)\sigma(\rho y)d(y) - F(\omega)F(y)\sigma(\rho)d(y)$ olur. Bu eşitlik (3.25) eşitliğinden çıkarılırsa her $\rho, y, \omega \in I$ için

$$0 = (F(y)F(\omega) - F(\omega)F(y))\sigma(\rho)d(y)$$

olur. Bu ifade hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in I$ için

$$0 = (F(\omega y) - F(y\omega))\sigma(\rho)d(y) \tag{3.26}$$

bulunur. Elde edilen (3.26) bu eşitliği ω yerine ωy yazılıp F'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her ρ, y, ω ∈ I için

$$0 = (F(\omega y)\sigma(y) + \sigma(\omega y)d(y) - F(y\omega)\sigma(y) - \sigma(y\omega)d(y))\sigma(\rho)d(y)$$

elde edilir. Bu ifade de σ'nın tanımı ve Lie komütatör tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her ρ, y, ω ∈ I için

$$0 = (F(\omega y) - F(y\omega))\sigma(y)\sigma(\rho)d(y) + \sigma([\omega, y])d(y)\sigma(\rho)d(y)$$

olur. (3.26) eşitliğinde ρ yerine yρ yazılıp σ'nın tanımı kullanarak elde edilen eşitlik bir üst satırdaki eşitlikten çıkarılırsa her ρ, y, ω ∈ I için

$$0 = \sigma([\omega, y])d(y)\sigma(\rho)d(y)$$

elde edilir. Bu eşitlik $r \in R$ ve $r[\omega, y] \in I$ olmak üzere ρ yerine $r[\omega, y]$ yazılıp σ'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her y, ω ∈ I ve $r \in R$ için

$$0 = \sigma([\omega, y])d(y)\sigma(r)\sigma([\omega, y])d(y)$$

bulunur. σ epimorfizma olduğundan $\sigma(R) = R$ olur. Yani her y, ω ∈ I için

$$(0) = \sigma([\omega, y])d(y)R\sigma([\omega, y])d(y)$$

olur. R yarı-asal halka olduğundan her y, ω ∈ I için

$$0 = \sigma([\omega, y])d(y) \tag{3.27}$$

bulunur. (3.27) eşitliğinde $r \in R$ olmak şartıyla ω elemanı rω elemanı ile değiştirilip σ'nın tanımı ve (2.10) eşitliği kullanılırsa her y, ω ∈ I ve $r \in R$ için

$$0 = \sigma([r\omega, y])d(y) = (\sigma(r[\omega, y] + [r, y]\omega)d(y)$$

$$= \sigma(r)\sigma([\omega, y])d(y) + \sigma([r, y])\sigma(\omega)d(y)$$

bulunur. Yani her y, ω ∈ I ve $r \in R$ için

$$0 = \sigma(r)\sigma([\omega, y])d(y) + \sigma([r, y])\sigma(\omega)d(y)$$

olur. Bu eşitlikten (3.27) eşitliği soldan $\sigma(r)$ ile çarpılıp çıkarılırsa her $y, \omega \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = \sigma([r, y])\sigma(\omega)d(y)$$

bulunur. Burada Lie komütatör tanımı ve σ'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $y, \omega \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\sigma(r), \sigma(y)]\sigma(\omega)d(y) \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.28) eşitliği sağdan $\sigma(y)$ ile çarpılırsa her $y, \omega \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\sigma(r), \sigma(y)]\sigma(\omega)d(y)\sigma(y) \tag{3.29}$$

olur. (3.28) eşitliği ω yerine ωy yazılıp σ'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $y, \omega \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\sigma(r), \sigma(y)]\sigma(\omega)\sigma(y)d(y) \tag{3.30}$$

bulunur. Elde edilen (3.29) eşitliğinden (3.30) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $y, \omega \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\sigma(r), \sigma(y)]\sigma(\omega)[d(y), \sigma(y)]$$

elde edilir. σ epimorfizma olduğundan $\sigma(R) = R$ dir. O halde her $y, \omega \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [r, \sigma(y)]\sigma(\omega)[d(y), \sigma(y)]$$

olur. Bu son eşitlikte r elemanı $d(y)$ elemanı ile değiştirilirse her $y, \omega \in I$ için

$$0 = [d(y), \sigma(y)]\sigma(\omega)[d(y), \sigma(y)]$$

elde edilir. Burada ω yerine $r\omega$ yazılıp σ'nın tanımı kullanılarak her $y, \omega \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [d(y), \sigma(y)]\sigma(r)\sigma(\omega)[d(y), \sigma(y)]$$

olur. Bu eşitlik soldan $\sigma(\omega)$ ile çarpılırsa her $y, \omega \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = \sigma(\omega)[d(y), \sigma(y)]\sigma(r)\sigma(\omega)[d(y), \sigma(y)]$$

bulunur. σ epimorfizma olduğundan $\sigma(R) = R$ dir. Böylece her $y, \omega \in I$ için

$$0 = \sigma(\omega)[d(y), \sigma(y)]R\sigma(\omega)[d(y), \sigma(y)]$$

olur. R yarı-asal halka olduğundan her $y, \omega \in I$ için

$$0 = \sigma(\omega)[d(y), \sigma(y)]$$

elde edilir. Buradan $y \in I$ için $0 = \sigma(I)[d(y), \sigma(y)]$ demektir.

Teorem 3.2.4. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho y) + F(y)F(\rho) = 0$ ise her $\rho \in I$ için $\sigma(I)[d(\rho), \sigma(\rho)] = (0)$ olur.

İspat: F, d dönüşümü ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(σ, σ)-türev, $-F$, $-d$ dönüşümü ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(σ, σ)-türevdir. Teorem 3.2.3. de F dönüşümü yerine $-F$, d dönüşümü yerine $-d$ dönüşümü yazılarak sonuca ulaşılır.

3.3. Yarı-asal Halkalarda Çarpımsal Genelleştirilmiş Türevler ve Sol İdealler

Bu alt bölümde, (Dhara, vd., 2020) tarafından yapılan "A Note on Multiplicative (Generalized) Derivation and Left Ideals in Semi-prime Rings" adlı çalışma incelenmiştir.

Bu bölümde aksi belirtilmediği sürece R 2-torsion free yarı-asal halka, $(0) \neq \lambda$, R halkasının bir sol ideali, $d: R \to R$ bir çarpımsal türev ve F, R halkası üzerinde tanımlı d ile belirli bir çarpımsal (genelleştirilmiş) türev olarak alınacaktır.

Teorem 3.3.1. Her $\rho, y \in \lambda$ için $[d(\rho), F(y)] = \pm [\rho, y]$ ise her $\rho \in \lambda$ için $\lambda[d(\rho), \rho] = (0)$ olur. Ayrıca R asal halka ve d türev iken her $\rho, y \in \lambda$ için $[d(\rho), F(y)] = \pm [\rho, y]$ ise $\lambda[\lambda, \lambda] = (0)$ olur.

İspat: Varsayalım ki her $\rho, y \in \lambda$ için

$$[d(\rho), F(y)] = \pm[\rho, y]$$

olsun. Bu eşitlik $\omega \in \lambda$ olmak üzere ρ yerine $\rho\omega$ yazılıp (2.10) eşitliği ve d'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$[d(\rho)\omega, F(y)] + [\rho d(\omega), F(y)] = \pm[\rho, y]\omega \pm \rho[\omega, y]$$

olur. Bu eşitlik (2.10) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$d(\rho)[\omega, F(y)] + [d(\rho), F(y)]\omega + \rho[d(\omega), F(y)] + [\rho, F(y)]d(\omega) = \pm[\rho, y]\omega \pm \rho[\omega, y]$$

elde edilir. Bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$d(\rho)[\omega, F(y)] \pm [\rho, y]\omega \pm \rho[\omega, y] + [\rho, F(y)]d(\omega) = \pm[\rho, y]\omega \pm \rho[\omega, y]$$

bulunur. Yani her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = d(\rho)[\omega, F(y)] + [\rho, F(y)]d(\omega) \tag{3.31}$$

olur. (3.31) eşitliği ρ yerine $\omega\rho$ yazılıp d'nin tanımı ve (2.10) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = (d(\omega)\rho + \omega d(\rho))[\omega, F(y)] + \omega[\rho, F(y)]d(\omega) + [\omega, F(y)]\rho d(\omega)$$

eşitliği bulunur. Yani her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$\begin{aligned} 0 = d(\omega)\rho[\omega, F(y)] + \omega d(\rho)[\omega, F(y)] + \omega[\rho, F(y)]d(\omega) \\ + [\omega, F(y)]\rho d(\omega) \end{aligned} \tag{3.32}$$

demektir. (3.31) eşitliği soldan ω ile çarpılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = \omega d(\rho)[\omega, F(y)] + \omega[\rho, F(y)]d(\omega)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (3.32) eşitliğinden çıkarılıp düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = d(\omega)\rho[\omega, F(y)] + [\omega, F(y)]\rho d(\omega)$$

olur. Yani her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$d(\omega)\rho[\omega, F(y)] = -[\omega, F(y)]\rho d(\omega) \quad (3.33)$$

olur. (3.33) eşitliğinde $t \in \lambda$ olmak üzere ρ elemanı yerine $\rho d(\omega)t$ elemanı yazılırsa her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ için

$$d(\omega)\rho d(\omega)t[\omega, F(y)] = -[\omega, F(y)]\rho d(\omega)td(\omega) \quad (3.34)$$

elde edilir. (3.33) eşitliği sağdan $td(\omega)\rho[\omega, F(y)]$ elemanı ile çarpılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ için

$$d(\omega)\rho[\omega, F(y)]td(\omega)\rho[\omega, F(y)] = -[\omega, F(y)]\rho d(\omega)td(\omega)\rho[\omega, F(y)] \quad (3.35)$$

olur. (3.35) eşitliği (3.34) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ için

$$d(\omega)\rho[\omega, F(y)]td(\omega)\rho[\omega, F(y)] = d(\omega)\rho d(\omega)t[\omega, F(y)]\rho[\omega, F(y)] \quad (3.36)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.33) eşitliğinde $t \in \lambda$ olmak şartıyla ρ elemanı t elemanıyla değiştirilip (3.36) eşitliğinde yerine yazılırsa her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ için

$$d(\omega)\rho[\omega, F(y)]td(\omega)\rho[\omega, F(y)] = -d(\omega)\rho[\omega, F(y)]td(\omega)\rho[\omega, F(y)]$$

olur. Bu ise her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ için

$$0 = 2d(\omega)\rho[, F(y)]td(\omega)\rho[\omega, F(y)]$$

demektir. R 2_burulmasız yarı-asal halka olduğundan her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ için

$$0 = d(\omega)\rho[\omega, F(y)]td(\omega)\rho[\omega, F(y)]$$

bulunur. Son eşitlik $r \in R$ olmak esasıyla t yerine rt yazılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = d(\omega)\rho[\omega, F(y)]rtd(\omega)\rho[\omega, F(y)]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik soldan t ile çarpılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = td(\omega)\rho[\omega, F(y)]rtd(\omega)\rho[\omega, F(y)]$$

bulunur. Buradan $\rho, y, \omega, t \in \lambda$

$$(0) = td(\omega)\rho[\omega, F(y)]Rtd(\omega)\rho[\omega, F(y)]$$

olur. R yarı-asal halka olduğundan her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ için

$$0 = td(\omega)\rho[\omega, F(y)]$$

elde edilir. Bu son ifade $r \in R$ olmak şartıyla ρ elemanı $r\rho$ elemanıyla değiştirilip düzenlenirse her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = td(\omega)r\rho[\omega, F(y)]$$

bulunur. Yani her $y, \omega \in \lambda$

$$(0) = \lambda d(\omega)R\lambda[\omega, F(y)]$$

elde edilir. Ayrıca $B(R) = \cap\{P \mid P\ asal\ ideal\}$ R halkasının asal radikali ve $P = \{P_\alpha \mid \alpha \in I, P_\alpha, R\ halkasının\ idealleri\}$ olmak üzere her $y, \omega \in \lambda$ için $\lambda d(\omega)R\lambda[\omega, F(y)] \subseteq P_\alpha$ olur. Burada P_α asal ideal olduğundan her $y, \omega \in \lambda$ için $\lambda d(\omega) \subseteq P_\alpha$ veya $\lambda[\omega, F(y)] \subseteq P_\alpha$ bulunur. Bu ise her $y, \omega \in \lambda$ için $[\omega, F(y)]\lambda d(\omega) \subseteq P_\alpha$ veya $d(\omega)\lambda[\omega, F(y)] \subseteq P_\alpha$ demektir. (3.33) eşitliğinden her $y, \omega \in \lambda$ ve $P_\alpha \in P$ için iki durum içinde $d(\omega)\lambda[\omega, F(y)] \subseteq P_\alpha$ sonucuna ulaşılır. Yani her $y, \omega \in \lambda$ için

$$d(\omega)\lambda[\omega, F(y)] \subseteq \cap P$$

olur. Yani her $y, \omega \in \lambda$ için

$$(0) = d(\omega)\lambda[\omega, F(y)]$$

dir. Bu eşitlikte y elemanı $y\omega$ elemanıyla değiştirilip F'nin tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d(\omega)\rho[\omega, F(y\omega)] \\ &= d(\omega)\rho[\omega, F(y)\omega + yd(\omega)] \\ &= d(\omega)\rho[\omega, F(y)\omega] + d(\omega)\rho[\omega, yd(\omega)] \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen son eşitlik (2.11) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = d(\omega)\rho[\omega, F(y)]\omega + d(\omega)\rho[\omega, yd(\omega)]$$

elde edilir. Bu son eşitlik daha önce elde edilen $(0) = d(\omega)\lambda[\omega, F(y)]$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = d(\omega)\rho[\omega, yd(\omega)]$$

olduğu görülür. Bu ifade soldan ωy elemanı ile çarpılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için $0 = \omega yd(\omega)\rho[\omega, yd(\omega)]$, aynı ifade daha sonra ρ elemanı yerine $\omega\rho$ elemanı yazılıp soldan y elemanıyla çarpılırsa $0 = yd(\omega)\omega\rho[\omega, yd(\omega)]$ olur. Elde edilen bu son eşitlikler birbirinden çıkarılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = [\omega, yd(\omega)]\rho[\omega, yd(\omega)]$$

eşitliğine ulaşılır. Elde edilen son eşitlik $r \in R$ olmak üzere ρ yerine $r\rho$ yazılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\omega, yd(\omega)]r\rho[\omega, yd(\omega)]$$

bulunur. Son eşitlik soldan ρ ile çarpılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = \rho[\omega, yd(\omega)]r\rho[\omega, yd(\omega)]$$

olur. Yani $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$(0) = \rho[\omega, yd(\omega)]R\rho[\omega, yd(\omega)]$$

dır. R yarı-asal halka olduğundan her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = \rho[\omega, yd(\omega)] \tag{3.37}$$

olur. Bu eşitlikte y yerine $d(\omega)y$ yazılıp Lie komütatör tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = \rho(\omega d(\omega)yd(\omega) - d(\omega)yd(\omega)\omega) = \rho\omega d(\omega)yd(\omega) - \rho d(\omega)yd(\omega)\omega$$

bulunur. Yani her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$\rho\omega d(\omega)yd(\omega) = \rho d(\omega)yd(\omega)\omega \tag{3.38}$$

olur. Bu ifade $u \in \lambda$ olmak üzere y elemanı yerine $yd(\omega)u$ elemanı yazılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, u \in \lambda$ için

$$0 = \rho\omega d(\omega)yd(\omega)ud(\omega) - \rho d(\omega)yd(\omega)ud(\omega)\omega$$

elde edilir. Son eşitlik (3.38) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, u \in \lambda$ için

$$0 = \rho d(\omega)yd(\omega)\omega ud(\omega) - \rho d(\omega)yzd(\omega)ud(\omega)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik Lie komütatör tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, u \in \lambda$ için

$$0 = \rho d(\omega)y[d(\omega), \omega]ud(\omega) \tag{3.39}$$

olur. (3.39) eşitliğinde y yerine ωy yazılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, u \in \lambda$ için

$$0 = \rho d(\omega)\omega y[d(\omega), \omega]ud(\omega) \tag{3.40}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.39) eşitliğinde ρ elemanı yerine $\rho\omega$ elemanı yazılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, u \in \lambda$ için

$$0 = \rho\omega d(\omega)y[d(\omega), \omega]ud(\omega) \tag{3.41}$$

olur. (3.40) eşitliğinden (3.41) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılırsa her $\rho, y, \omega, u \in \lambda$ için

$$0 = \rho[d(\omega), \omega]y[d(\omega), \omega]ud(\omega) \tag{3.42}$$

elde edilir. (3.42) eşitliği sağdan ω elemanı ile çarpılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, u \in \lambda$ için

$$0 = \rho[d(\omega), \omega]y[d(\omega), \omega]ud(\omega)\omega \tag{3.43}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.42) eşitliğinde u elemanı $u\omega$ elemanıyla değiştirilirse her $\rho, y, \omega, u \in \lambda$ için

$$0 = \rho[d(\omega), \omega]y[d(\omega), \omega]u\omega d(\omega) \tag{3.44}$$

eşitliği elde edilir. (3.43) eşitliğinden (3.44) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, u \in \lambda$ için

$$0 = \rho[d(\omega), \omega]y[d(\omega), \omega]u[d(\omega), \omega]$$

bulunur. Bu ise her $\omega \in \lambda$ için

$$(0) = \lambda[d(\omega), \omega]\lambda[d(\omega), \omega]\lambda[d(\omega), \omega]$$

demektir. Yani her $\omega \in \lambda$ için

$$(0) = (\lambda[d(\omega), \omega])^3$$

dir. R yarı-asal halka olduğundan her $\rho, y, \omega, u \in \lambda$ için

$$(0) = \lambda[d(\omega), \omega]$$

olur.

R'nin asal halka ve d'nin türev olması durumunda hipotez incelenirse;

(3.37) eşitliği y yerine ty yazılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ için

$$0 = \rho[\omega, yd(\omega)] + \rho[\omega, t]yd(\omega)$$

elde edilir. (3.37) eşitliğinde ρ elemanı ρt elemanıyla değiştirilerek elde edilen eşitlik üst satırda yazan eşitlikten çıkarılırsa her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ için

$$0 = \rho[\omega, t]yd(\omega)$$

bulunur. Bu eşitlik benzer şekilde $r \in R$ olmak üzere y elemanı yerine ry elemanı yazılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = \rho[\omega, t]ryd(\omega)$$

olur. Buradan her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ için

$$(0) = \rho[\omega, t]Ryd(\omega)$$

olur. R asal halka olduğundan her $\rho, y, \omega, t \in \lambda$ için $\rho[\omega, t] = 0$ veya $yd(\omega) = 0$ bulunur. Yani $\lambda\,[\lambda\,, \lambda\,] = 0$ veya $\lambda\,d(\lambda\,) = 0$ olur. Varsayalım ki $\lambda\,d(\lambda\,) = 0$ olsun. Hipotezde ρ yerine ρt yazılırsa her $\rho, y, t \in \lambda$ için $[d(\rho t), F(y)] = \pm[\rho t, y]$ olur. Bu eşitlik d'nin tanımı ve (2.10) eşitliği kullanılarak düzenlenirse $\rho, y, t \in \lambda$ için

$$[d(\rho)t, F(y)] + [\rho d(t), F(y)] = \pm\rho[t, y] \pm [\rho, y]t$$

olur. Burada $\lambda\,d(\lambda\,) = 0$ eşitliğinden her $\rho, y, t \in \lambda$ için

$$[d(\rho)t, F(y)] = \pm\rho[t, y] \pm [\rho, y]t$$

bulunur. Bu eşitlik (2.10) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, t \in \lambda$ için

$$d(\rho)[t, F(y)] + [d(\rho), F(y)]t = \pm\rho[t, y] \pm [\rho, y]t$$

olur. Bu son ifade hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, t \in \lambda$ için

$$d(\rho)[t, F(y)] \pm [\rho, y]t = \pm\rho[t, y] \pm [\rho, y]t$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ise her $\rho, y, t \in \lambda$ için

$$d(\rho)[t, F(y)] = \pm\rho[t, y]$$

demektir. Son eşitlik soldan λ ile çarpılıp düzenlenirse her $\rho, y, t \in \lambda$ için

$$\lambda d(\rho)[t, F(y)] = \pm\lambda\rho[t, y]$$

olur. Bu ifade $\lambda\,d(\lambda\,) = 0$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, t \in \lambda$ için

$$(0) = \pm\lambda\rho[t, y]$$

bulunur. Burada $r \in R$, $a \in \lambda$ olmak üzere ρ yerine $r\rho$ yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $a, \rho, y, t \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = \pm ar\rho[t, y]$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan her $a, \rho, y, t \in \lambda$ için

$$(0) = \pm aR\rho[t, y]$$

bulunur. R asal halka olduğundan her $a, \rho, y, t \in \lambda$ için

$$a = 0 \text{ veya } \rho[t, y] = 0$$

olur. Buradan $\lambda = (0)$ veya $\lambda[\lambda, \lambda] = (0)$ olur. Kabulümüzden dolayı $\lambda \neq (0)$ dir. O halde $\lambda[\lambda, \lambda] = (0)$ olur.

Sonuç 3.3.2. Her $\rho, y \in R$ için $[d(\rho), F(y)] = \pm[\rho, y]$ ise her ρ elemanı için $[d(\rho), \rho] = 0$ olur.

İspat: Teorem 3.3.1. den ve her halka bir sol ideal olduğundan her $\rho, y \in R$ için $[d(\rho), F(y)] = \pm[\rho, y]$ ise her $\rho \in R$ için

$$(0) = R[d(\rho), \rho]$$

olur. Bu ifade soldan $[d(\rho), \rho]$ ile çarpılarak düzenlenirse her $\rho \in R$ için

$$(0) = [d(\rho), \rho]\, R[d(\rho), \rho]$$

bulunur. R yarı-asal halka olduğundan her $\rho \in R$ için

$$0 = [d(\rho), \rho]$$

olur.

Teorem 3.3.3. Her $\rho, y \in \lambda$ için $[d(\rho), F(y)] = \pm(\rho o y)$ ise her $\rho \in \lambda$ için $\lambda[d(\rho), \rho] = (0)$

olur.

İspat: Varsayalım ki her $\rho, y \in \lambda$ için

$$[d(\rho), F(y)] = \pm(\rho o y)$$

olsun. Bu eşitlik $\omega \in \lambda$ olmak şartıyla ρ elemanı yerine ρω elemanı yazılıp d'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$[d(\rho)\omega + \rho d(\omega), F(y)] = \pm((\rho\omega) o y)$$

elde edilir. Bu eşitlik (2.3), (2.10) ve (2.15) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$d(\rho)[\omega,F(y)]+[d(\rho),F(y)]\omega+\rho[d(\omega),F(y)]+[\rho,F(y)]d(\omega)=\pm(\rho o y)\omega\pm\rho[\omega,y]$$

olur. Burada hipotez kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho,y,\omega\in\lambda$ için

$$d(\rho)[\omega,F(y)]\pm(\rho o y)\omega+\rho[d(\omega),F(y)]+[\rho,F(y)]d(\omega)=\pm(\rho o y)\omega\pm\rho[\omega,y]$$

elde edilir. Yani her $\rho,y,\omega\in\lambda$ için

$$d(\rho)[\omega,F(y)]+\rho[d(\omega),F(y)]+[\rho,F(y)]d(\omega)=\pm\rho[\omega,y] \qquad (3.45)$$

bulunur. (3.45) eşitliği ρ yerine $\omega\rho$ yazılıp d'nin tanımı ve (2.10) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho,y,\omega\in\lambda$ için

$$d(\omega)\rho[\omega,F(y)]+\omega\big(d(\rho)[\omega,F(y)]+\rho[d(\omega),F(y)]+[\rho,F(y)]d(\omega)\big)+[\omega,F(y)]\rho$$
$$=\pm\omega\rho[\omega,y]$$

eşitliğine ulaşılır. Elde edilen bu eşitlikte (3.45) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho,y,\omega\in\lambda$ için

$$d(\omega)\rho[\omega,F(y)]\pm\omega\rho[\omega,y]+[\omega,F(y)]\rho=\pm\omega\rho[\omega,y]$$

elde edilir. Bu ise her $\rho,y,\omega\in\lambda$ için

$$0=d(\omega)\rho[\omega,F(y)]+[\omega,F(y)]\rho$$

demektir. Böylece Teorem 3.3.1. (3.33) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.3.4. Her $\rho,y\in R$ için $[d(\rho),F(y)]=\pm(\rho\circ y)$ ise her $\rho\in\lambda$ için $[d(\rho),\rho]=0$ olur.

İspat: Teorem 3.3.3. ve her halkanın bir sol ideal olduğu kullanılırsa her $\rho,y\in R$ için $[d(\rho),F(y)]=\pm(\rho\circ y)$ ise her $x\in R$ için $(0)=R[d(\rho),\rho]$ olur. Bu eşitlik soldan $[d(\rho),\rho]$ elemanıyla çarpılarak düzenlenirse her $\rho\in R$ için

$$(0)=[d(\rho),\rho]\,R[d(\rho),\rho]$$

elde edilir. Böylece R yarı-asal halka olduğundan her $\rho\in R$ için

$$0=[d(\rho),\rho]$$

olur.

Teorem 3.3.5. Her $\rho, y \in \lambda$ için $[d(\rho), F(y)] = 0$ ise her $\rho \in \lambda$ için $\lambda[d(\rho), \rho] = (0)$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = [d(\rho), F(y)]$$

olsun. Bu eşitlik $\omega \in \lambda$ olmak üzere ρ yerine $\rho\omega$ yazılıp d'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = [d(\rho)\omega + \rho d(\omega), F(y)]$$

elde edilir. Bu ifade (2.3) ve (2.10) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = d(\rho)[\omega, F(y)] + [d(\rho), F(y)]\omega + \rho[d(\omega), F(y)] + [\rho, F(y)]d(\omega)$$

bulunur. Son eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = d(\rho)[\omega, F(y)] + [\rho, F(y)]d(\omega) \tag{3.46}$$

olur. (3.46) eşitliği ρ elemanı yerine $\omega\rho$ elemanı yazılıp d'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = d(\omega)\rho[\omega, F(y)] + \omega d(\rho)[\omega, F(y)] + \omega[\rho, F(y)]d(\omega) + [\omega, F(y)]\rho d(\omega)$$

elde edilir. (3.46) eşitliği soldan ω ile çarpılıp son eşitlikten çıkarılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = d(\omega)\rho[\omega, F(y)] + [\omega, F(y)]\rho d(\omega)$$

bulunur. Böylece Teorem 3.3.1. (3.33) eşitliğinden sonraki basamaklar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Teorem 3.3.6. $\delta: R \to R$ bir dönüşüm, $F: R \to R$ δ ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş) türev, d, R halkası üzerinde tanımlı bir çarpımsal türev olmak üzere,

her $\rho, y \in \lambda$ için $F([\rho, y]) \pm [d(\rho), d(y)] \pm [\rho, y] = 0$ ise her $\rho \in \lambda$ için $\lambda[d(\rho), \rho] = (0)$ ve $\lambda[\delta(\rho), \rho] = (0)$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = F([\rho, y]) + [d(\rho), d(y)] + [\rho, y]$$

olsun. Bu eşitlik y elemanı yerine $y\rho$ elemanı yazılıp F'nin tanımı, d'nin tanımı, (2.3) eşitliği ve (2.11) eşitliliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = F([\rho, y])\rho + [\rho, y]\delta(\rho) + d(y)[d(\rho), \rho] + [d(\rho), d(y)]\rho + [d(\rho), y]d(\rho) + [\rho, y]\rho$$

elde edilir. Hipotez sağdan ρ ile çarpılıp bu son eşitlikten çıkarılırsa her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = [\rho, y]\delta(\rho) + d(y)[d(\rho), \rho] + [d(\rho), y]d(\rho) \tag{3.47}$$

olur. (3.47) eşitliğinde y yerine ρy yazılıp d'nin tanımı ve (2.11) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in \lambda$ için

$$\begin{aligned} 0 = \rho[\rho, y]\delta(\rho) + d(\rho)y[d(\rho), \rho] + \rho d(y)[d(\rho), \rho] + \rho[d(\rho), y]d(\rho) \\ + [d(\rho), \rho]yd(\rho) \end{aligned} \tag{3.48}$$

bulunur. (3.47) eşitliği soldan ρ elemanı ile çarpılırsa $0 = \rho[\rho, y]\delta(\rho) + \rho d(y)[d(\rho), \rho] + \rho[d(\rho), y]d(\rho)$ olur. Bu eşitlik (3.48) eşitliğinden çıkarılırsa her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = d(\rho)y[d(\rho), \rho] + [d(\rho), \rho]yd(\rho)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in \lambda$ için

$$d(\rho)y[d(\rho), \rho] = -[d(\rho), \rho]yd(\rho) \tag{3.49}$$

olur. (3.49) eşitliği $\omega \in \lambda$ olmak üzere y elemanı yerine $yd(\rho)\omega$ elemanı yazılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$d(\rho)yd(\rho)\omega[d(\rho), \rho] = -[d(\rho), \rho]yd(\rho)\omega d(\rho) \tag{3.50}$$

bulunur. (3.49) eşitliği sağdan $\omega d(\rho)y[d(\rho),\rho]$ elemanı ile çarpılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$d(\rho)y[d(\rho),\rho]\omega d(\rho)y[d(\rho),\rho] = -[d(\rho),\rho]yd(\rho)\omega d(\rho)y[d(\rho),\rho] \tag{3.51}$$

olur. (3.51) eşitliğinde (3.50) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$d(\rho)y[d(\rho),\rho]\omega d(\rho)y[d(\rho),\rho] = d(\rho)yd(\rho)\omega[d(\rho),\rho]y[d(\rho),\rho] \tag{3.52}$$

bulunur. (3.49) eşitliğinde y yerine ω yazılırsa her $\rho, \omega \in \lambda$ için $d(\rho)\omega[d(\rho),\rho] = -[d(\rho),\rho]\omega d(\rho)$ elde edilir. Bu eşitlik (3.52) eşitliğinde yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$d(\rho)y[d(\rho),\rho]\omega d(\rho)y[d(\rho),\rho] = -d(\rho)y[d(\rho),\rho]\omega d(\rho)y[d(\rho),\rho]$$

olur. Bu ise her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = 2d(\rho)y[d(\rho),\rho]\omega d(\rho)y[d(\rho),\rho]$$

demektir. R 2_burulmasız halka olduğundan her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = d(\rho)y[d(\rho),\rho]\omega d(\rho)y[d(\rho),\rho]$$

olur. Burada $r \in R$ olmak üzere ω elemanı yerine $r\omega$ elemanı yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = d(\rho)y[d(\rho),\rho]r\omega d(\rho)y[d(\rho),\rho]$$

elde edilir. Son eşitlik soldan ω ile çarpılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = \omega d(\rho)y[d(\rho),\rho]r\omega d(\rho)y[d(\rho),\rho]$$

bulunur. Yani her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$(0) = \omega d(\rho)y[d(\rho),\rho]R\omega d(\rho)y[d(\rho),\rho]$$

olur. Burada R yarı-asal halka olduğundan her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = \omega d(\rho)y[d(\rho),\rho] \tag{3.53}$$

olur. (3.53) eşitliği ω elemanı yerine ωρ elemanı yazılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = \omega\rho d(\rho)y[d(\rho),\rho] \tag{3.54}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.53) eşitliğinde y elemanı yerine ρy elemanı yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = \omega d(\rho)\rho y[d(\rho),\rho] \tag{3.55}$$

bulunur. (3.55) eşitliğinden (3.54) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \omega \in \lambda$ için

$$0 = \omega[d(\rho),\rho]y[d(\rho),\rho]$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece son ifade $r \in R$ olmak üzere y elemanı yerine ry elemanı yazılarak düzenlenirse her $\rho, y, \omega \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = \omega[d(\rho),\rho]ry[d(\rho),\rho]$$

bulunur. Bu eşitlikte ω elemanı yerine y elemanı yazılırsa her $\rho, y \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = y[d(\rho),\rho]ry[d(\rho),\rho]$$

olur. Buradan her $\rho, y \in \lambda$ için

$$(0) = y[d(\rho),\rho]Ry[d(\rho),\rho]$$

elde edilir. R yarı-asal halka olduğundan her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = y[d(\rho),\rho]$$

bulunur. Yani her $\rho \in \lambda$ için $\lambda[d(\rho),\rho] = (0)$ olur.

Şimdi benzer şekilde (3.47) eşitliği $s \in R$ olmak üzere y yerine sy yazılıp d'nin tanımı ve (2.11) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in \lambda$ ve $s \in R$ için

$$0 = [\rho, s]y\delta(\rho) + s[\rho, y]\delta(\rho) + d(s)y[d(\rho), \rho] + sd(y)[d(\rho), \rho] + [d(\rho), s]yd(\rho) + s[d(\rho), y]d(\rho)$$

elde edilir. (3.47) eşitliği soldan s ile çarpılırsa her $\rho, y \in \lambda$ ve $s \in R$ için $0 = s[\rho, y]\delta(\rho) + sd(y)[d(\rho), \rho] + s[d(\rho), y]d(\rho)$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlik bir üst satırdaki eşitlikten çıkarılarak düzenlenirse her $\rho, y \in \lambda$ ve $s \in R$ için

$$0 = [\rho, s]y\delta(\rho) + d(s)y[d(\rho), \rho] + [d(\rho), s]yd(\rho)$$

bulunur. Bu ifade daha önce elde edilen $\lambda[d(\rho), \rho] = 0$ denkleminden yararlanarak düzenlenirse her $\rho, y \in \lambda$ ve $s \in R$ için

$$0 = [\rho, s]y\delta(\rho) + [d(\rho), s]yd(\rho) \tag{3.56}$$

elde edilir. (3.56) eşitliği y elemanı yerine $y\rho$ elemanı yazılarak düzenlenirse her $\rho, y \in \lambda$ ve $s \in R$ için

$$0 = [\rho, s]y\rho\delta(\rho) + [d(\rho), s]y\rho d(\rho) \tag{3.57}$$

olur. (3.56) eşitliği sağdan ρ ile çarpılırsa her $\rho, y \in \lambda$ ve $s \in R$ için

$$0 = [\rho, s]y\delta(\rho)\rho + [d(\rho), s]yd(\rho)\rho \tag{3.58}$$

bulunur. Elde edilen (3.58) eşitliğinden (3.57) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılırsa her $\rho, y \in \lambda$ ve $s \in R$ için

$$0 = [\rho, s]y[\delta(\rho), \rho] + [d(\rho), s]y[d(\rho), \rho]$$

olur. Bu eşitlik daha önce elde edilen $\lambda[d(\rho), \rho] = (0)$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in \lambda$ ve $s \in R$ için

$$0 = [\rho, s]y[\delta(\rho), \rho]$$

elde edilir. Bu eşitlikte s elemanı yerine $\delta(\rho)$ elemanı yazılıp (2.2) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = [\delta(\rho), \rho\,]y[\delta(\rho), \rho]$$

bulunur. Son eşitlik $r \in R$ olmak üzere y elemanı yerine ry elemanı yazılarak düzenlenirse her $\rho, y \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\delta(\rho), \rho\,]ry[\delta(\rho), \rho]$$

olur. Elde edilen son ifade soldan y ile çarpılırsa her $\rho, y \in \lambda$ ve $r \in R$ için

$$0 = y[\delta(\rho), \rho\,]ry[\delta(\rho), \rho]$$

bulunur. Burada her $\rho, y \in \lambda$ için

$$(0) = y[\delta(\rho), \rho\,]Ry[\delta(\rho), \rho]$$

olur. R yarı-asal halka olduğunda her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = y[\delta(\rho), \rho]$$

bulunur. Yani her $\rho \in \lambda$ için $\lambda[\delta(\rho), \rho] = 0$ olur.

Sonuç 3.3.7. $\delta: R \to R$ bir dönüşüm, $F: R \to R$ δ ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş) türev ve d, R halkası üzerinde tanımlı bir çarpımsal türev olmak üzere,

her $\rho, y \in R$ için $F([\rho, y]) \pm [d(\rho), d(y)] \pm [\rho, y] = 0$ ise her ρ elemanı için $[d(\rho), \rho] = 0$ ve $[\delta(\rho), \rho] = 0$ olur.

İspat: Teorem 3.3.6. ve her halkanın bir sol ideal olduğu kullanılırsa her $\rho, y \in R$ için $F([\rho, y]) \pm [d(\rho), d(y)] \pm [\rho, y] = 0$ ise her ρ elemanı için

$$(0) = R[d(\rho), \rho]$$

olur. Bu ifade soldan $[d(\rho), \rho]$ ile çarpılarak düzenlenirse her $\rho \in R$ için

$$(0) = [d(\rho), \rho]\, R[d(\rho), \rho]$$

eşitliğine ulaşılır. R yarı-asal halka olduğundan her $\rho \in R$ için

$$0 = [d(\rho), \rho]$$

olur. Aynı şekilde $[\delta(\rho),\rho] = 0$ içinde yapılır.

Sonuç 3.3.8. $d,\delta: R \rightarrow R$ iki çarpımsal türev olmak üzere,

her $\rho, y \in \lambda$ için $\delta([\rho,y]) \pm [d(\rho), d(y)] \pm [\rho,y] = 0$ ise her $\rho \in \lambda$ için $\lambda[d(\rho),\rho] = (0)$ ve $\lambda[\delta(\rho),\rho] = (0)$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = \delta([\rho,y]) + [d(\rho), d(y)] + [\rho,y]$$

olsun. Bu ifadede y elemanı yerine $y\rho$ elemanı yazılıp d'nin tanımı, δ'nin tanımı ve (2.11) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = \delta([\rho,y])\rho + [\rho,y]\delta(\rho) + d(y)[d(\rho),\rho] + [d(\rho), d(y)]\rho + [d(\rho),y]d(\rho) + [\rho,y]\rho$$

eşitliği elde edilir. Hipotez sağdan ρ ile çarpılıp bu son ifadeden çıkarılırsa her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = [\rho,y]\delta(\rho) + d(y)[d(\rho),\rho] + [d(\rho),y]d(\rho)$$

bulunur. Böylece Teorem 3.3.6. (3.47) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.3.9. $d,\delta: R \rightarrow R$ iki çarpımsal türev olmak üzere,

her $\rho, y \in \lambda$ için $\delta([\rho,y]) \pm [d(\rho), d(y)] = 0$ ise her ρ elemanı için $\lambda[d(\rho),\rho] = (0)$ ve $\lambda[\delta(\rho),\rho] = (0)$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = \delta([\rho,y]) + [d(\rho), d(y)]$$

olsun. Bu ifadede y yerine $y\rho$ yazılıp d'nin tanımı, δ'nin tanımı, (2.3) ve (2.11) eşitlikleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in \lambda$ için

$$0 = (\delta([\rho,y]) + [d(\rho), d(y)])\rho + [\rho,y]\delta(\rho) + d(y)[d(\rho),\rho] + [d(\rho),y]d(\rho)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte hipotez kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in \lambda$ için

$$[\rho,y]\delta(\rho) + d(y)[d(\rho),\rho] + [d(\rho),y]d(\rho) = 0$$

olur. Böylece Teorem 3.3.6. (3.47) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Örnek 3.3.10. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere, $R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid e, j, l \in \mathbb{Z} \right\}$ biçiminde tanımlanan R halkası

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0)$$

olduğundan yarı-asal halka değildir. $F, d: R \to R$ olmak üzere,

$$d \begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e & j^2 \\ 0 & 0 & -l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bir dönüşüm,

$$F \begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & -l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan F dönüşümü d dönüşümü ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş) türev, burada her $\rho, y \in \lambda$ için $[d(\rho), F(y)] = \pm[\rho, y]$ iken her $\rho \in \lambda$ için $[d(\rho), \rho] \neq 0$ dir. Dolayısıyla, Sonuç 3.2.2.'deki yarı-asallık şartı kaldırılamaz.

Örnek 3.3.11. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere, $R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid e, j, l \in \mathbb{Z} \right\}$ biçiminde tanımlanan R halkası

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0)$$

olduğundan yarı-asal halka değildir. $F, d: R \to R$ olmak üzere,

$$d \begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e & j^2 \\ 0 & 0 & -l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bir dönüşüm,

$$F \begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan F dönüşümü d dönüşümü ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş) türev, burada her $\rho, y \in \lambda$ için $[d(\rho), F(y)] = \pm(\rho o y)$ iken her $\rho \in \lambda$ için $[d(\rho), \rho] \neq 0$ dir. Dolayısıyla Sonuç 3.2.4.'deki yarı-asallık şartı kaldırılamaz.

Örnek 3.3.12. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere, $R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid e, j, l \in \mathbb{Z} \right\}$ biçiminde tanımlanan R halkası

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0)$$

olduğundan yarı-asal halka değildir. $F, d, \delta: R \to R$ olmak üzere

$$d\begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & -l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\delta\begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^2 & j^2 \\ 0 & 0 & -l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F\begin{pmatrix} 0 & e & j \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & el^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan F dönüşümü δ dönüşümü ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş) türev ve d çarpımsal dönüşümdür. Burada, her $\rho, y \in \lambda$ için $F([\rho, y]) + [d(\rho), d(y)] + [\rho, y] = 0$ iken her $\rho \in \lambda$ için $[d(\rho), \rho] \neq 0$ ve $[\delta(\rho), \rho] \neq 0$ olur. Dolayısıyla, Sonuç 3.2.7.'deki yarı-asallık şartı kaldırılamaz.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
YARI-ASAL HALKALAR ÜZERİNDE ÇARPIMSAL (GENELLEŞTİRİLMİŞ)-(α, α)-TERS TÜREVLER İLE İLGİLİ SONUÇLAR

Bu alt bölümde (Karahan, vd., 2022) tarafından elde edilen bu sonuçlar orijinaldir ve Journal of New Theory adlı dergide “On the Multiplicative (Generalized)-(α, α)-Derivations of Semi-prime Ring” adı ile 01/07/2022 tarihinde yayınlanmıştır.

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe R yarı-asal halka, I, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ (sol) ideali, $d: R \to \mathrm{R}$ bir dönüşüm, α, R halkası üzerinde tanımlı bir anti-epimorfizma fakat $I \nsubseteq Ker\{\alpha\}$, $F: R \to R$ dönüşümü ise (F, d) çarpımsal (genelleştirilmiş)-(α, α)-ters türev olarak alınacaktır ve $\alpha(I) = J$ olarak adlandırılacaktır.

Lemma 4.1. (F, d) çarpımsal (genelleştirilmiş)-(α, α)-ters türev ise her $\rho, y \in I$ için $d(\rho y) = d(y)\alpha(\rho) + \alpha(y)d(\rho)$ olur.

İspat: Varsayalım ki her $\rho, \upsilon \in I$ için

$$F(\rho\upsilon) = F(\upsilon)\alpha(\rho) + \alpha(\upsilon)d(\rho) \tag{4.1}$$

olsun. Bu eşitlik ρ elemanı yerine ρy elemanı yazılıp α’nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$F\big((\rho y)\upsilon\big) = F(\upsilon)\alpha(y)\alpha(\rho) + \alpha(\upsilon)d(\rho y) \tag{4.2}$$

olur. (4.1) eşitliğinde υ yerine $y\upsilon$ yazılıp F’nin tanımı ve α’nın tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \upsilon \in I$ için $F\big(\rho(y\upsilon)\big) = F(\upsilon)\alpha(y)\alpha(\rho) + \alpha(\upsilon)d(y)\alpha(\rho) + \alpha(\upsilon)\alpha(y)d(\rho)$ bulunur. Elde edilen bu eşitlik (4.2) eşitliğinden çıkarılarak gerekli düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = \alpha(\upsilon)(d(\rho y) - d(y)\alpha(\rho) - \alpha(y)d(\rho))$$

olur. Buradan her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha(R)(d(\rho y) - d(y)\alpha(\rho) - \alpha(y)d(\rho))$$

elde edilir. α anti-epimorfizma olduğundan $\alpha(R) = R$ dir. Böylece her $\rho, y \in I$ için

$$(0) = R(d(\rho y) - d(y)\alpha(\rho) - \alpha(y)d(\rho))$$

bulunur. Bu son eşitlik soldan $(d(\rho y) - d(y)\alpha(\rho) - \alpha(y)d(\rho))$ elemanı ile çarpılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$(0) = (d(\rho y) - d(y)\alpha(\rho) - \alpha(y)d(\rho))R(d(\rho y) - d(y)\alpha(\rho) - \alpha(y)d(\rho))$$

olur. Burada R yarı-asal halka olduğundan her $\rho, y \in I$ için

$$0 = d(\rho y) - d(y)\alpha(\rho) - \alpha(y)d(\rho)$$

eşitliğine ulaşılır. Yani her $\rho, y \in I$ için $d(\rho y) = d(y)\alpha(\rho) + \alpha(y)d(\rho)$ olur. Bu ise d'nin (α, α)-ters türev olduğunu gösterir.

Lemma 4.2. $F(0) = 0$.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho y) = F(y)\alpha(\rho) + \alpha(y)d(\rho)$$

olsun. Burada $\rho = 0$ ve $y = 0$ olarak alınırsa her $\rho, y \in I$ için

$$F(00) = F(0)\alpha(0) + \alpha(0)d(0)$$

olur. α dönüşümü anti-epimorfizma olduğundan $\alpha(0) = 0$ dir. Böylece her $\rho, y \in I$ için $F(0) = 0$ elde edilir.

Örnek 4.1. $(H, +, \cdot)$ değişmeli bir halka, $(S, \oplus, \odot)$ değişmeli olmayan bir halka, $(S^{op}, \oplus, \star)$ halkası $(S, \oplus, \odot)$ halkasının opposite halkası, $\alpha: S^{op} \to S^{op}$ bir anti-homomorfizma, $d: S^{op} \to S^{op}$ çarpımsal (α, α)-ters türev ve $F: S^{op} \to S^{op}$ d ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(α, α)-ters türev $\mu, \Phi, \varphi: H \times S^{op} \to H \times S^{op}$ dönüşümler sırasıyla $\mu(u, \rho) = \big(u, F(\rho)\big)$, $\Phi(u, \rho) = (u, d(\rho))$, $\varphi(u, \rho) = (u, \alpha(\rho))$ biçiminde tanımlansın. Ayrıca φ, $H \times S^{op}$ üzerinde bir anti-homomorfizma ve Φ çarpımsal (φ, φ)-ters türev olmak üzere μ, Φ ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(φ, φ)-ters türev iken çarpımsal (genelleştirilmiş)-(φ, φ)-türev değildir.

Çözüm. $u, v \in H$ ve $\rho, y \in S^{op}$ olmak üzere φ'nın tanımı kullanılarak her $(u, \rho), (v, y) \in H \times S^{op}$ için

$$\varphi\big((u,\rho)(v,y)\big) = \varphi\big((uv,y\rho)\big) = (uv,\alpha(y\rho))$$

elde edilir. Bu eşitlik H halkasının değişmeli olması ve α'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\big(uv,\alpha(y\rho)\big) = (vu,\alpha(\rho)\alpha(y)) = (v,\alpha(y))((u,\alpha(\rho))$$

olur. Son ifade φ'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\big(v,\alpha(y)\big)\big(u,\alpha(\rho)\big) = \varphi(v,y)\varphi(u,\rho)$$

bulunur. Yani her $(u,\rho),(b,y) \in H \times S^{op}$ için $\varphi\big((u,\rho)(b,y)\big) = \varphi(b,y)\varphi(u,\rho)$ elde edilir. Böylece φ'nın bir anti-homomorfizma olduğu gösterilmiş olur.

Ayrıca $u,v \in H$ ve $\rho,y \in S^{op}$ olmak üzere Φ'nın tanımı kullanılırsa her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\Phi\big((u,\rho)(v,y)\big) = \varphi\big((uv,y\rho)\big) = (uv,d(y\rho))$$

olur. Yani her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\Phi\big((u,\rho)(v,y)\big) = (uv,d(y\rho)) \tag{4.3}$$

bulunur. Daha sonra $\Phi(v,y)\varphi(u,\rho) + \varphi(v,y)\Phi(u,\rho)$ φ'nın tanımı ve Φ'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\Phi(v,y)\varphi(u,\rho) + \varphi(v,y)\Phi(u,\rho) = \big(v,d(y)\big)\big(u,\alpha(\rho)\big) + (v,\alpha(y))(u,d(\rho))$$

elde edilir. Bu ise her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\big(v,d(y)\big)\big(u,\alpha(\rho)\big) + (v,\alpha(y))(u,d(\rho)) = \big(vu,\alpha(\rho)d(y)\big) + (vu,d(\rho)\alpha(y))$$

demektir. Bu eşitlik d'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\big(vu,\alpha(\rho)d(y)\big) + (vu,d(\rho)\alpha(y)) = \big(vu,\alpha(\rho)d(y) + d(\rho)\alpha(y)\big) = (u,d(y\rho))$$

olur. H halkası değişmeli olduğundan her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\big(vu,d(y\rho)\big) = (uv,d(y\rho))$$

elde edilir. Yani her $(u, \text{ρ}),(v, \text{y}) \in H \times S^{op}$ için

$$\Phi(v, \text{y})\varphi(u, \text{ρ}) + \varphi(v, \text{y})\Phi(u, \text{ρ}) = (vu, d(\text{yρ})) \qquad (4.3a)$$

olur. Ayrıca $\Phi(u, \text{ρ})\varphi(v, \text{y}) + \varphi(u, \text{ρ})\Phi(v, \text{y})$ Φ'nin tanımı ve φ'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(u, \text{ρ}),(v, \text{y}) \in H \times S^{op}$ için

$$\Phi(u, \text{ρ})\varphi(v, \text{ρ}) + \varphi(u, \text{ρ})\Phi(v, \text{y}) = \big(u, d(\text{ρ})\big)\big(v, \alpha(\text{y})\big) + (u, \alpha(\text{ρ}))(v, d(\text{y}))$$

elde edilir. Yani her $(u, \text{ρ}),(v, \text{y}) \in H \times S^{op}$ için

$$\big(u, d(\text{ρ})\big)\big(v, \alpha(\text{y})\big) + \big(u, \alpha(\text{ρ})\big)\big(v, d(\text{y})\big) = (uv, \alpha(\text{y})d(\text{ρ})) + (uv, d(\text{y})\alpha(\text{ρ}))$$

bulunur. Bu eşitlik d'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(u, \text{ρ}),(v, \text{y}) \in H \times S^{op}$ için

$$(uv, \alpha(\text{y})d(\text{ρ})) + (uv, d(\text{y})\alpha(\text{ρ})) = \big(uv, \alpha(\text{y})d(\text{ρ}) + d(\text{y})\alpha(\text{ρ})\big) = (uv, d(\text{ρy}))$$

elde edilir. Yani her $(u, \text{ρ}),(v, \text{y}) \in H \times S^{op}$ için

$$\Phi(u, \text{ρ})\varphi(v, \text{y}) + \varphi(u, \text{ρ})\Phi(v, \text{y}) = (uv, d(\text{ρy})) \qquad (4.3b)$$

olur. Elde edilen (4.3) eşitliği ve (4.3a) eşitliği birbirine eşit olduğundan her $(u, \text{ρ}),(v, \text{y}) \in H \times S^{op}$ için $\Phi\big((u, \text{ρ})(v, \text{y})\big) = \Phi(v, \text{y})\varphi(u, \text{ρ}) + \varphi(v, \text{y})\Phi(u, \text{ρ})$ olur. Böylece Φ'nın bir çarpımsal (φ, φ)-ters türev olduğu fakat S halkası değişmeli olmadığından (4.3) eşitliği (4.3b) eşitliğinden farklıdır $\Phi\big((u, \text{ρ})(v, \text{y})\big) \neq \Phi(u, \text{ρ})\varphi(v, \text{y}) + \varphi(u, \text{ρ})\Phi(v, \text{y})$ Yani Φ'nın çarpımsal (φ, φ)-türev olmadığı görülür.

Şimdi ise $u, v \in H$ ve $\text{ρ}, \text{y} \in S^{op}$ olmak üzere μ dönüşümünün tanımı kullanılırsa her $(u, \text{ρ}),(v, \text{y}) \in H \times S^{op}$ için

$$\mu\big((u, \text{ρ})(v, \text{y})\big) = \mu(uv, \text{yρ})) = (uv, F(\text{yρ}))$$

olur. Yani her $(u, \text{ρ}),(v, \text{y}) \in H \times S^{op}$ için

$$\mu\big((u,\rho)(v,y)\big) = (uv, F(y\rho)) \tag{4.3c}$$

olduğu görülür. Ayrıca $\mu(v,y)\varphi(u,\rho) + \varphi(v,y)\Phi(u,\rho)$ eşitliği μ, Φ ve φ'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\mu(v,y)\varphi(u,\rho) + \varphi(v,y)\Phi(u,\rho) = \big(v, F(y)\big)\big(u, \alpha(\rho)\big) + (v, \alpha(y))(u, d(\rho))$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\big(v, F(y)\big)\big(u, \alpha(\rho)\big) + \big(v, \alpha(y)\big)\big(u, d(\rho)\big) = \big(vu, \alpha(\rho)F(y)\big) + (vu, d(\rho)\alpha(y))$$

olur. Bu ise her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\big(vu, \alpha(\rho)F(y)\big) + \big(vu, d(\rho)\alpha(y)\big) = (vu, \alpha(\rho)F(y) + d(\rho)\alpha(y))$$

demektir. Bu ifade H halkasının değişmeliliği ve F'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\big(uv, \alpha(\rho)F(y) + d(\rho)\alpha(y)\big) = (uv, F(y\rho))$$

olur. Yani her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\mu(u,\rho)\varphi(v,y) + \varphi(u,\rho)\Phi(v,y) = (uv, F(y\rho)) \tag{4.3d}$$

olduğu görülür. Ayrıca $\mu(u,\rho)\varphi(v,y) + \varphi(u,\rho)\Phi(v,y)$ eşitliği μ, Φ ve φ'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\mu(u,\rho)\varphi(v,y) + \varphi(u,\rho)\Phi(v,y) = \big(u, F(\rho)\big)\big(v, \alpha(y)\big) + (u, \alpha(\rho))(v, d(y))$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\begin{aligned}\big(u, F(\rho)\big)\big(v, \alpha(y)\big) + \big(u, \alpha(\rho)\big)\big(v, d(y)\big) &= \big(uv, \alpha(y)F(\rho)\big) + (uv, d(y)\alpha(\rho)) \\ &= (uv, \alpha(y)F(\rho) + d(y)\alpha(\rho))\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade F'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\big(uv, \alpha(y)F(\rho) + d(y)\alpha(\rho)\big) = (uv, F(\rho y))$$

olur. Yani her $(u,\rho),(v,y) \in H \times S^{op}$ için

$$\mu(u, \rho)\varphi(v, y) + \varphi(u, \rho)\Phi(v, y) = (uv, F(\rho y)) \tag{4.3e}$$

elde edilir. Böylece elde edilen (4.3c) eşitliği ile (4.3d) eşitliği birbirine eşit olduğundan her $(u, \rho),(v, y) \in H \times S^{op}$ için $\mu\big((u, \rho)(v, y)\big) = \mu(u, \rho)\varphi(v, y) + \varphi(u, \rho)\Phi(v, y)$ olur. Bu ise μ'nin dönüşümü Φ ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(φ, φ)-ters türev demektir. S halkası değişmeli olmadığından (4.3c) eşitliği (4.3e) eşitliğinde farklıdır. Dolayısıyla $\mu\big((u, \rho)(v, y)\big) \neq \mu(u, \rho)\varphi(v, y) + \varphi(u, \rho)\Phi(v, y)$ olur. Yani μ, Φ ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(φ, φ)-türev değildir.

Örnek 4.2. $(H, +, \cdot)$ değişmeli bir halka, $(S, \oplus, \odot)$ halkası değişmeli olmayan bir halka, $(S^{op}, \oplus, \star)$ halkası $(S, \oplus, \odot)$ halkasının opposite halkası, $\alpha: S \to S^{op}$, $\alpha(x) = x$ biçiminde tanımlanan bir dönüşüm, $d: S \to S^{op}$ çarpımsal (α, α)-ters türev ve $F: S \to S^{op}$ d ile belirli çarpımsal sağ (genelleştirilmiş)-(α, α)-ters türev $\mu, \Phi, \varphi: S \times H \to S^{op} \times H$ dönüşümleri sırasıyla $\mu(a, x) = (F(a), x)$, $\Phi(a, x) = (d(a), x)$, $\varphi(a, x) = (\alpha(a), x)$ biçininde tanımlansın. Ayrıca φ, H üzerinde bir anti-homomorfizma ve Φ çarpımsal (φ, φ)-türev olmak üzere μ, Φ ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(φ, φ)- türev iken çarpımsal (genelleştirilmiş)-(φ, φ)- ters türev değildir.

Çözüm: : $a, b \in S$ ve $x, y \in H$ olmak üzere H'nin değişmeliliği, α'nın ve φ'nin tanımı kullanılırsa her $(a, x), (b, y) \in S \times H$ için

$$\begin{aligned}
\varphi\big((a, x)(b, y)\big) &= \varphi(ab, xy) \\
&= (\alpha(ab), xy) \\
&= (b \star a, xy) \\
&= (b \star a, yx) \\
&= (b, y)(a, x) \\
&= (\alpha(b), y)(\alpha(a), x) \\
&= \varphi(b, y)\varphi(\alpha, x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $(a, x), (b, y) \in S \times H$ için $\varphi\big((a, x)(b, y)\big) = \varphi(b, y)\varphi(\alpha, x)$ olduğu görülür. O halde φ anti-homomorfizmadır.

Şimdi ise H'nin değişmeliliği, Φ'nin tanımı ve φ'nın tanımı kullanılarak her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\begin{aligned} \Phi((a,x)(b,y)) &= (d(ab),xy) \\ &= (d(a) \star \alpha(b) + \alpha(a) \star d(b),xy) \\ &= (d(a) \star \alpha(b),xy) + (\alpha(a) \star d(b),xy) \\ &= (d(a),x)(\alpha(a),y) + (\alpha(a),x)(d(b),y) \\ &= \Phi(a,x)\varphi(b,y) + \varphi(a,\mathrm{x})\Phi(b,y) \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Böylece her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için $\Phi\big((a,x)(b,y)\big) = \Phi(b,y)\varphi(a,x) + \varphi(\mathrm{b},\mathrm{y})\Phi(a,x)$ eşitliğine ulaşılır. O halde Φ çarpımsal (φ, φ)-türevdir.

Ayrıca $\Phi(b,y)\varphi(a,x) + \varphi(b,y)\Phi(a,x)$ ifadesi Φ'nin tanımı ve φ'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\Phi(b,y)\varphi(a,x) + \varphi(b,y)\Phi(a,x) = (d(b),y)(\alpha(a),x)) + (\alpha(b),y)(d(a),x)$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\begin{aligned} (d(b),y)(\alpha(a),x)) + (\alpha(b),y)(d(a),x) &= (d(b) \star \alpha(a),yx) + (\alpha(b) \star d(a),yx) \\ &= (d(b) \star \alpha(a) + \alpha(b) \star d(a),yx) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik d'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$(d(b) \star \alpha(a) + \alpha(b) \star d(a),yx) = (d(ba),yx)$$

elde edilir. Yani her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\Phi(b,y)\varphi(a,x) + \varphi(b,y)\Phi(a,x) = (d(ba),xy) \tag{4.4a}$$

olur. S halkası değişmeli olmadığından (4.4) eşitliği (4.4a) eşitliğinden farklıdır $\Phi\big((u,\rho)(v,y)\big) \neq \Phi(u,\rho)\varphi(v,y) + \varphi(u,\rho)\Phi(v,y)$, yani Φ'nın çarpımsal (φ,φ)-ters türev olmadığı görülür.

Şimdi $a,b \in S$ ve $x,y \in H$ olmak üzere μ'nin tanımı kullanılırsa her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\mu\big((a,x)(b,y)\big) = \mu(ab,xy)) = (F(ab),xy)$$

bulunur. Yani her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\mu\big((a,x)(b,y)\big) = (F(ab),xy) \tag{4.4b}$$

Bu eşitlik F'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\begin{aligned}(F(ab),xy) = (F(ab),xy) &= (F(a) \star \alpha(b) + \alpha(a) \star d(b),xy) \\ &= (F(a) \star \alpha(b),xy) + (\alpha(a) \star d(b),xy)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$(F(a) \star \alpha(b),xy) + (\alpha(a) \star d(b),xy) = (F(a),x)(\alpha(b),y) + (\alpha(a),x)(d(b),y)$$

bulunur. Bu eşitlik μ,Φ,φ dönüşümlerinin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$(F(a),x)(\alpha(b),y) + (\alpha(a),x)(d(b),y) = \mu(a,x)\varphi(b,y) + \varphi(a,x)\Phi(b,y)$$

olur. Böylece her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\mu\big((a,x)(b,y)\big) = \mu(a,x)\varphi(b,y) + \varphi(a,x)\Phi(b,y)$$

elde edilir. Dolayısıyla μ, Φ ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(φ,φ)-türev olduğu görülür.

Ayrıca $\mu(b,y)\varphi(a,x) + \varphi(b,y)\Phi(a,x)$ eşitliği μ,Φ,φ dönüşümlerinin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\mu(b,y)\varphi(a,x) + \varphi(b,y)\Phi(a,x) = (F(b),y)(\alpha(a),x) + (\alpha(b),y)(d(a),x)$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\begin{aligned}(F(b),y)(\alpha(a),x) + (\alpha(b),y)(d(a),x) &= (F(b) \star \alpha(a),yx) + (\alpha(a) \star d(b),yx) \\ &= (F(b) \star \alpha(a) + \alpha(b) \star d(a),yx)\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade F'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$(F(b) \star \alpha(a) + \alpha(b) \star d(a),yx) = (F(ba),xy)$$

olur. Böylece her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\mu(b,y)\varphi(a,x) + \varphi(b,y)\Phi(a,x) = (F(ba), xy) \tag{4.4c}$$

elde edilir. S halkası değişmeli olmadığından (4.4b) eşitliği (4.4c) eşitliğinde farklıdır. Dolayısıyla her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için $\mu\big((a,x)(b,y)\big) \neq \mu(b,y)\varphi(a,x) + \varphi(b,y)\Phi(a,x)$ olur. Böylece μ, Φ ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(φ,φ)-ters türev olmadığı görülür.

Örnek 4.3. $(H,+,\cdot)$ değişmeli bir halka, $(S,\oplus,\odot)$ halkası değişmeli olmayan bir halka, $(S^{op},\oplus,\star)$ halkası $(S,\oplus,\odot)$ halkasının opposite halkası, $\alpha: S \to S^{op}$, $\alpha(x) = x$, $d: S \to S^{op}$ çarpımsal (α,α)-türev ve $F: S \to S^{op}$ d ile belirli çarpımsal sağ (genelleştirilmiş)-(α,α)-türev $\mu,\Phi,\varphi: S \times H \to S^{op} \times H$ dönüşümleri sırasıyla $\mu(a,x) = (F(a),x)$, $\Phi(a,x) = (d(a),x)$, $\varphi(a,x) = (\alpha(a),x)$ biçininde tanımlansın. Ayrıca φ, H üzerinde bir anti-homomorfizma ve Φ çarpımsal (φ,φ)-ters türev olmak üzere μ, Φ ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(φ, φ)-ters türev iken çarpımsal (genelleştirilmiş)-(φ, φ)- türev değildir

Çözüm: $a,b \in S$ ve $x,y \in H$ olmak üzere H'nin değişmeliliği, α'nın ve φ'nin tanımı kullanılırsa her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için$(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\begin{aligned}
\varphi\big((a,x)(b,y)\big) &= \varphi(ab,xy) \\
&= (\alpha(ab),xy) \\
&= (b \star a, xy) \\
&= (b \star a, yx) \\
&= (b,y)(a,x) \\
&= (\alpha(b),y)(\alpha(a),x) \\
&= \varphi(b,y)\varphi(\alpha,x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için $\varphi\big((a,x)(b,y)\big) = \varphi(b,y)\varphi(\alpha,x)$ olduğu görülür. O halde φ anti-homomorfizmadır.

Şimdi ise H'nin değişmeliliği, Φ'nin tanımı ve φ'nın tanımı kullanılarak her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$
\begin{aligned}
\Phi((a,x)(b,y)) &= (d(ab),xy) \qquad\qquad (4.4d)\\
&= (d(b)\star\alpha(a)+\alpha(b)\star d(a),yx)\\
&= (d(b)\star\alpha(a),yx)+(\alpha(b)\star d(a),yx)\\
&= (d(b),y)(\alpha(a),x)+(\alpha(b),y)(d(a),x)\\
&= \Phi(b,y)\varphi(a,x)+\varphi(\mathrm{b},\mathrm{y})\Phi(a,x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece her $(a,x),(b,y)\in S\times H$ için $\Phi\big((a,x)(b,y)\big)=\Phi(b,y)\varphi(a,x)+\varphi(\mathrm{b},\mathrm{y})\Phi(a,x)$ eşitliğine ulaşılır. O halde Φ çarpımsal (φ,φ)-ters türevdir.

Ayrıca $\Phi(a,x)\varphi(b,y)+\varphi(a,x)\Phi(b,y)$ ifadesi Φ'nin tanımı ve φ'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(a,x),(b,y)\in S\times H$ için

$$\Phi(a,x)\varphi(b,y)+\varphi(a,x)\Phi(b,y)=(d(a),x)(\alpha(b),y))+(\alpha(a),x)(d(b),y)$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse her $(a,x),(b,y)\in S\times H$ için

$$
\begin{aligned}
(d(a),x)(\alpha(b),y))+(\alpha(a),x)(d(b),y) &= (d(a)\star\alpha(b),xy)+(\alpha(a)\star d(b),xy)\\
&= (d(a)\star\alpha(b)+(\alpha(a)\star d(b),xy)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu eşitlik d'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(a,x),(b,y)\in S\times H$ için $(d(a)\star\alpha(b)+\alpha(a)\star d(b),xy)=(d(ba),xy)$

elde edilir. Yani her $(a,x),(b,y)\in S\times H$ için

$$\Phi(a,x)\varphi(b,y)+\varphi(a,x)\Phi(b,y)\;=(d(ba),xy) \qquad (4.4e)$$

olur. S halkası değişmeli olmadığından (4.4d) eşitliği (4.4e) eşitliğinden farklıdır $\Phi\big((u,\rho)(v,y)\big)\neq\Phi(u,\rho)\varphi(v,y)+\varphi(u,\rho)\Phi(v,y)$, yani Φ'nın çarpımsal (φ,φ)-türev olmadığı görülür.

Şimdi $a,b\in S$ ve $x,y\in H$ olmak üzere μ'nin tanımı kullanılırsa her $(a,x),(b,y)\in S\times H$ için

$$\mu\big((a,x)(b,y)\big)=\mu(ab,xy))=(F(ab),xy)$$

bulunur. Yani her $(a,x),(b,y)\in S\times H$ için

$$\mu\big((a,x)(b,y)\big) = (F(ab), xy) \tag{4.4f}$$

Bu eşitlik H'nin değişmeliliği ve F'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\begin{aligned}(F(ab), yx) = (F(ab), yx) &= (F(b) \star \alpha(a) + \alpha(b) \star d(a), yx)\\ &= (F(b) \star \alpha(a), yx) + (\alpha(b) \star d(a), yx)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$(F(b) \star \alpha(a), yx) + (\alpha(b) \star d(a), yx) = (F(b), y)(\alpha(a), x) + (\alpha(b), y)(d(a), x)$$

bulunur. Bu eşitlik μ, Φ, φ dönüşümlerinin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$(F(b), y)(\alpha(a), x) + (\alpha(b), y)(d(a), x) = \mu(b,y)\varphi(a,x) + \varphi(b,y)\Phi(a,x)$$

olur. Böylece her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\mu\big((a,x)(b,y)\big) = \mu(b,y)\varphi(a,x) + \varphi(b,y)\Phi(a,x)$$

elde edilir. Dolayısıyla μ, Φ ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(φ,φ)-ters türev olduğu görülür.

Ayrıca $\mu(a,x)\varphi(b,y) + \varphi(a,x)\Phi(b,y)$ eşitliği μ, Φ, φ dönüşümlerinin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\mu(a,x)\varphi(b,y) + \varphi(a,x)\Phi(b,y) = (F(a), x)(\alpha(b), y) + (\alpha(a), x)(d(b), y)$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\begin{aligned}(F(a), x)(\alpha(b), y) + (\alpha(a), x)(d(b), y) &= (F(a) \star \alpha(b), xy) + (\alpha(a) \star d(b), xy)\\ &= (F(a) \star \alpha(b) + \alpha(a) \star d(b), xy)\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade F'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$(F(a) \star \alpha(b) + \alpha(a) \star d(b), xy) = (F(ba), xy)$$

olur. Böylece her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için

$$\mu(a,x)\varphi(b,y) + \varphi(a,x)\Phi(b,y) = (F(ba), xy) \quad (4.4g)$$

elde edilir. S halkası değişmeli olmadığından (4.4f) eşitliği (4.4g) eşitliğinde farklıdır. Dolayısıyla her $(a,x),(b,y) \in S \times H$ için $\mu\big((a,x)(b,y)\big) \neq \mu(a,x)\varphi(b,y) + \varphi(a,x)\Phi(b,y)$ olur. Böylece μ, Φ ile belirli çarpımsal (genelleştirilmiş)-(φ,φ)-türev olmadığı görülür

Teorem 4.1. Her $\rho, y \in I$ için $F([\rho,y]) = 0$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Varsayalım ki her $\rho, y \in I$ için

$$0 = F([\rho,y])$$

olsun. Bu eşitlik ρ yerine $y\rho$ yazılıp (2.10), (2.1) eşitliği ve F'nin tanımı kullanılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = F([y\rho,y]) = F(y[\rho,y] + [y,y]\rho) = F(y[\rho,y]) = F([\rho,y])\alpha(y) + \alpha([\rho,y])d(y)$$

olur. Böylece her $\rho, y \in I$ için

$$0 = F([\rho,y])\alpha(y) + \alpha([\rho,y])d(y)$$

olur. Bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha([\rho,y])d(y)$$

eşitliği elde edilir. Burada Lie komütatör tanımı ve α'nın tanımı kullanılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \alpha(y)]d(y) \quad (4.5)$$

olur. Yani her $y \in I$ için

$$(0) = [J, \alpha(y)]d(y)$$

olur. Bu eşitlik her $y \in I$ ve $\upsilon \in J$ için

$$0 = [\upsilon, \alpha(y)]d(y) \quad (4.6)$$

dir. (4.6) eşitliği $r \in R$ olmak şartıyla υ elemanı $r\upsilon$ elemanı ile değiştirilip (2.10) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $r \in R, y \in I$ ve $\upsilon \in J$ için

$$0 = [r\upsilon, \alpha(y)]d(y) = r[\upsilon, \alpha(y)]d(y) + [r, \alpha(y)]\upsilon d(y)$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.6) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $r \in R, y \in I$ *ve* $\upsilon \in J$ için

$$0 = [r, \alpha(y)]\upsilon d(y)$$

eşitliğine ulaşılır. Son eşitlikte r elemanı $d(y)$ elemanıyla değiştirilirse her $y \in I$ ve $\upsilon \in J$ için

$$0 = [d(y), \alpha(y)]\upsilon d(y) \tag{4.7}$$

bulunur. Bu eşitlikte υ yerine $\upsilon\alpha(y)$ yazılırsa her $y \in I$ ve $\upsilon \in J$ için

$$0 = [d(y), \alpha(y)]\upsilon\alpha(y)d(y) \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.7) eşitliği sağdan $\alpha(y)$ ile çarpılırsa her $y \in I$ ve $\upsilon \in J$ için

$$0 = [d(y), \alpha(y)]\upsilon d(y)\alpha(y) \tag{4.9}$$

bulunur. Elde edilen (4.9) eşitliğinden (4.8) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $y \in I$ ve $\upsilon \in J$ için

$$0 = [d(y), \alpha(y)]\upsilon[d(y), \alpha(y)]$$

elde edilir. Yani her $y \in I$ için

$$(0) = [d(y), \alpha(y)]J[d(y)\alpha(y)]$$

olur. Burada J yarı-asal halka olduğundan her $y \in I$ için

$$0 = [d(y), \alpha(y)]$$

elde edilir.

Teorem 4.2. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho \circ y) = 0$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur**.**

İspat: Varsayalım ki her $\rho, y \in I$ için

$$0 = F(\rho \circ y)$$

olsun. Bu eşitlikte y yerine ρy yazılıp (2.13) eşitliği ve (2.1) eşitliği ve F'nin tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = F(\rho \circ (\rho y)) = F\big(\rho(\rho \circ y)\big) = F(\rho \circ y)\alpha(\rho) + \alpha(\rho \circ y)d(\rho)$$

bulunur. Bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha(\rho \circ y)d(\rho) \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) eşitliği $\upsilon \in I$ olmak üzere y elemanı yerine υy elemanı yazılıp (2.12) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = \alpha\big(\rho \circ (\upsilon y)\big)d(\rho) = \alpha\big((\rho \circ \upsilon)y - \upsilon[\rho, y]\big)d(\rho)$$

olur. Bu eşitlik α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = \alpha(y)\alpha(\rho \circ \upsilon)d(\rho) - \alpha([\rho, y])\alpha(\upsilon)d(\rho)$$

bulunur. Son eşitlik (4.10) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = \alpha([\rho, y])\alpha(\upsilon)d(\rho)$$

olur. Bu eşitlik Lie komütatör tanımı ve α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \alpha(y)]\alpha(\upsilon)d(\rho)$$

elde edilir. Yani her $\rho \in I$ için

$$(0) = [\alpha(\rho), J]Jd(\rho)$$

olur. Buradan her $\rho \in I$ ve $w, t \in J$ için

$$0 = [\alpha(\rho), w]td(\rho) \tag{4.11}$$

olur. (4.11) eşitliğinde w elemanı yerine $wd(\rho)$ elemanı yazılıp (2.11) eşitliği kullanılırsa her $\rho \in I$ ve $w, t \in J$ için

$$0 = [\alpha(\rho), wd(\rho)]td(\rho) = w[\alpha(\rho), d(\rho)]td(\rho) + [\alpha(\rho), w]d(\rho)td(\rho)$$

elde edilir. Bu ifade (4.11) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho \in I$ ve $w, t \in J$ için

$$0 = w[\alpha(\rho), d(\rho)]td(\rho) \tag{4.12}$$

olur. (4.12) eşitliği sağdan $\alpha(\rho)$ ile çarpılırsa her $\rho \in I$ ve $w, t \in J$ için

$$0 = w[\alpha(\rho), d(\rho)]td(\rho)\alpha(\rho) \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.12) eşitliğinde t elemanı yerine $t\alpha(\rho)$ elemanı yazılırsa her $\rho \in I$ ve $w, t \in J$ için

$$0 = w[\alpha(\rho), d(\rho)]t\alpha(\rho)d(\rho) \tag{4.14}$$

bulunur. (4.14) eşitliğinden (4.13) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho \in I$ ve $w, t \in J$ için

$$0 = w[\alpha(\rho), d(\rho)]t[\alpha(\rho), d(\rho)]$$

elde edilir. Bu eşitlikte t elemanı yerine tw elemanı yazılırsa her $\rho \in I$ ve $w, t \in J$ için

$$0 = w[\alpha(\rho), d(\rho)]tw[\alpha(\rho), d(\rho)]$$

olur. Yani her $\rho \in I$ için ve $w \in J$ için

$$(0) = w[\alpha(\rho), d(\rho)]Jw[\alpha(\rho), d(\rho)]$$

eşitliğine ulaşılır. J yarı-asal halka olduğundan her $\rho \in I$ için ve $w \in J$ için

$$0 = w[\alpha(\rho), d(\rho)]$$

olur. Bu eşitlik soldan $[\alpha(\rho), d(\rho)]$ elemanı ile çarpılırsa her $\rho \in I$ ve $w \in J$ için

$$0 = [\alpha(\rho), d(\rho)]w[\alpha(\rho), d(\rho)]$$

bulunur. Buradan her $\rho \in I$ için

$$(0) = [\alpha(\rho), d(\rho)]J[\alpha(\rho), d(\rho)]$$

olur. J yarı-asal halka olduğundan her $\rho \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), d(\rho)]$$

bulunur.

Teorem 4.3. Her $\rho, y \in I$ için $F([\rho, y]) = \pm\alpha([\rho, y])$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y]) = \pm\alpha([\rho, y])$$

olsun. Bu eşitlikte ρ yerine $y\rho$ yazılıp (2.1) eşitliği ve (2.11) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$F(y[\rho, y]) = \pm\alpha(y[\rho, y])$$

bulunur. Son eşitlik F'nin tanımı ve α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y])\alpha(y) + \alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha([\rho, y])\alpha(y)$$

elde edilir. Bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$\pm\alpha([\rho, y])\alpha(y) + \alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha([\rho, y])\alpha(y)$$

bulunur. Bu ifadede gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha([\rho, y])d(\rho)$$

olur. Burada Lie komütatör tanımı ve α'nın tanımı kullanılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = ([\alpha(\rho), \alpha(y)])d(\rho)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik (2.2) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$0 = ([\alpha(y), \alpha(p)])d(\rho)$$

olur. Böylece Teorem 4.1. (4.5) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Teorem 4.4. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho \circ y) = \pm\alpha(\rho \circ y)$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho \circ y) = \pm\alpha(\rho \circ y)$$

olsun. Bu eşitlik ρ yerine $y\rho$ yazılıp (2.1) ve (2.14) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F(y(\rho \circ y)) = \pm\alpha(y(\rho \circ y))$$

elde edilir. Son eşitlik F'nın tanımı ve α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho \circ y)\alpha(y) + \alpha(\rho \circ y)d(y) = \pm\alpha(\rho \circ y)\alpha(y)$$

bulunur. Bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$\pm\alpha(\rho \circ y)\alpha(y) + \alpha(\rho \circ y)d(y) = \pm\alpha(\rho \circ y)\alpha(y)$$

olur. Bu eşitlikte (2.9) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha(y \circ \rho)d(y)$$

olur. Böylece Teorem 4.2. (4.10) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuç elde edilir.

Teorem 4.5. Her $\rho, y \in I$ için $F([\rho, y]) = \pm\alpha(\rho \circ y)$ ise I'nın her ρ elemanı için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y]) = \pm\alpha(\rho \circ y)$$

olsun. Bu eşitlikte ρ yerine $y\rho$ yazılıp (2.1), (2.10) ve (2.14) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$F(y[\rho, y]) = \pm\alpha(y(\rho \circ y))$$

bulunur. Elde edilen son eşitlik F'nin tanımı ve α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y])\alpha(y) + \alpha([\rho, y])d(y) = \pm\alpha(\rho \circ y)\alpha(y)$$

olduğu görülür. Bu ifade hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$\pm\alpha(\rho \circ y)\alpha(y) + \alpha(y)d(y) = \pm\alpha(\rho \circ y)\alpha(y)$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha([\rho, y])d(y)$$

elde edilir. Bulunan eşitlikte Lie komütatör tanımı ve α'nın tanımı kullanılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \alpha(y)]d(y)$$

olur. Böylece Teorem 4.1. (4.5) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Teorem 4.6. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho \circ y) = \pm\alpha([\rho, y])$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho \circ y) = \pm\alpha([\rho, y])$$

olsun. Bu eşitlikte ρ yerine $y\rho$ yazılıp (2.1), (2.14) ve (2.10) eşitlikleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$F(y(\rho \circ y)) = \pm\alpha(y[\rho, y])$$

elde edilir. Burada F'nin ve α'nın tanımı kullanılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho \circ y)\alpha(y) + \alpha(\rho \circ y)d(y) = \pm\alpha([\rho, y])\alpha(y)$$

olur. Bu ifade hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$\pm\alpha([\rho, y])\alpha(y) + \alpha(\rho \circ y)d(y) = \pm\alpha([\rho, y])\alpha(y)$$

eşitliği elde edilir. Burada (2.9) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha(y \circ \rho)d(y)$$

bulunur. Böylece Teorem 4.1.2. (4.10) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Teorem 4.7. Her $\rho, y \in I$ için $F([\rho, y]) = \pm\alpha([F(\rho), y])$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur**.**

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y]) = \pm\alpha([F(\rho), y])$$

olsun. Bu eşitlikte y yerine ρy yazılıp (2.1) ve (2.11) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho[\rho, y]) = \pm\alpha(\rho[F(\rho), y] + [F(\rho), \rho]y)$$

olur. Burada F'nin ve α'nın tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$F([\rho, y])\alpha(\rho) + \alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha([F(\rho), y])\alpha(\rho) \pm \alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho])$$

bulunur. Bulunan son eşitlikte hipotez kullanılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$\pm\alpha([F(\rho), y])\alpha(\rho) + \alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha([F(\rho), y])\alpha(\rho) \pm \alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho])$$

olur. Böylece her $\rho, y \in I$ için

$$\alpha([\rho, y])d(\rho) = \pm\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho]) \tag{4.15}$$

elde edilir. Hipotez y yerine ρ yazılıp (2.1) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho \in I$ için

$$F(0) = \pm\alpha([F(\rho), \rho])$$

olur. Burada $F(0) = 0$ (Lemma 4.1.2.) kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho \in I$ için

$$0 = \pm\alpha([F(\rho), \rho]) \tag{4.16}$$

olur. Elde edilen (4.16) eşitliği soldan $\alpha(y)$ elemanı ile çarpılıp (4.15) eşitliğinden çıkarılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = \alpha([\rho, y])d(\rho)$$

elde edilir. Burada Lie komütatör tanımı ve α'nın tanımı kullanılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \alpha(y)]d(y)$$

olur. Böylece Teorem 4.1. (4.5) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Teorem 4.8. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho \circ y) = \pm\alpha(F(\rho) \circ y)$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur**.**

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$

$$F(\rho \circ y) = \pm\alpha(F(\rho) \circ y)$$

olsun. Bu eşitlik y yerine ρy yazılıp (2.13) ve (2.1) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho(\rho \circ y)) = \pm\alpha(\rho(F(\rho) \circ y)) + [F(\rho), \rho])y)$$

bulunur. Burada F'nin ve α'nın tanımı kullanılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho \circ y)\alpha(\rho) + \alpha(\rho \circ y)d(\rho) = \pm\alpha(F(\rho) \circ y)\alpha(\rho) \pm \alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho])$$

elde edilir. Son eşitlikte hipotez kullanılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$\pm\alpha(F(\rho) \circ y)\alpha(\rho) + \alpha(\rho \circ y)d(\rho) = \pm\alpha(F(\rho) \circ y)\alpha(\rho) \pm \alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho])$$

olur. Böylece her $\rho, y \in I$ için

$$\alpha(\rho \circ y)d(\rho) = \pm\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho]) \tag{4.17}$$

bulunur. (4.17) eşitliği $r \in R$ olmak üzere y yerine yr yazılıp (2.12) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$\alpha((\rho \circ y)r - y[\rho, r])d(\rho) = \pm\alpha(yr)\alpha([F(\rho), \rho])$$

olur. Son eşitlikte α'nın tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$\alpha(r)\alpha(\rho \circ y)d(\rho) - \alpha([\rho, r])\alpha(y)d(\rho) = \pm\alpha(r)\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho])$$

elde edilir. Bu ifadede (4.17) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$\pm\alpha(r)\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho]) - \alpha([\rho, r])\alpha(y)d(\rho) = \pm\alpha(r)\alpha(y)\alpha([F(\rho), \rho])$$

olur. Böylece her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = \alpha([\rho, r])\alpha(y)d(\rho)$$

olur. Burada α'nın tanımı ve Lie komütatör tanımı kullanılırsa her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(\rho), \alpha(r)]\alpha(y)d(\rho)$$

eşitliği bulunur. α anti-epimorfizma olduğundan $\alpha(R) = R$ dir. Buradan her $\rho \in I$ için

$$(0) = [\alpha(\rho), R]Jd(\rho)$$

olduğu görülür. Burada $\upsilon \in J$ olmak üzere her $\rho \in I$, $r \in R$ ve $\upsilon \in J$ için

$$0 = [\alpha(\rho), r]\upsilon d(\rho)$$

dir. Son eşitlikte r elemanı $d(y)$ elemanı ile değiştirilirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = [\alpha(\rho), d(y)]\upsilon d(\rho)$$

bulunur. Son ifadede ρ yerine y yazılırsa her $y, \upsilon \in I$ için $0 = [\alpha(y), d(y)]\upsilon d(y)$ elde edilir. Böylece Teorem 4.1. (4.7) eşitliğinden sonraki adımlar takip edilerek sonuca ulaşılır.

Teorem 4.9. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho y) = F(\rho)F(y)$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho y) = F(\rho)F(y)$$

olsun. Bu eşitlik y yerine ρy yazılıp F'nin tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$\begin{aligned} F\big(\rho(\rho y)\big) &= F(\rho)F(\rho y) \\ &= F(\rho)F(y)\alpha(\rho) + F(\rho)\alpha(y)d(\rho) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho(\rho y)) = F(\rho y)\alpha(\rho) + F(\rho)\alpha(y)d(\rho) \tag{4.18}$$

olur. Ayrıca F'nin tanımından her $\rho, \omega \in I$ için $F(\rho\omega) = F(\omega)\alpha(\rho) + \alpha(\omega)d(\rho)$ dir. Bu eşitlikte $y \in I$ olmak üzere ω yerine ρy yazılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho(\rho y)) = F(\rho y)\alpha(\rho) + \alpha(\rho y)d(\rho) \tag{4.19}$$

bulunur. (4.19) eşitliğinden (4.18) eşitliği çıkarılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y \in I$ için

$$0 = (\alpha(\rho y) - F(\rho)\alpha(y))d(\rho) \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.20) eşitliği $r \in R$ olmak üzere y yerine yr yazılıp α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha(\rho(yr)) - F(\rho)\alpha(yr))d(\rho) \\ &= (\alpha(r)\alpha(y)\alpha(\rho) - F(\rho)\alpha(r)\alpha(y))d(\rho) \\ &= (\alpha(r)\alpha(\rho y) - F(\rho)\alpha(r)\alpha(y))d(\rho) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan her $\rho, y \in I$ için

$$0 = (\alpha(R)\alpha(\rho y) - F(\rho)\alpha(R)\alpha(y))d(\rho)$$

olur. α anti-epimorfizma olduğundan $\alpha(R) = R$ dir. O halde her $\rho, y \in I$ için

$$(0) = (R\alpha(\rho y) - F(\rho)R\alpha(y))d(\rho)$$

olur. Bu ise her $\rho, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = (r\alpha(\rho y) - F(\rho)r\alpha(y))d(\rho)$$

Burada $\upsilon \in I$ olmak üzere r elemanı yerine $F(\upsilon)$ elemanı yazılırsa her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = (F(\upsilon)\alpha(\rho y) - F(\rho)F(\upsilon)\alpha(y))d(\rho) \tag{4.21}$$

olduğu görülür. Elde edilen (4.20) eşitliği soldan $F(\upsilon)$ ile çarpılırsa her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = (F(\upsilon)\alpha(\rho y) - F(\upsilon)F(\rho)\alpha(y))d(\rho) \tag{4.22}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (4.22) eşitliğinden (4.21) eşitliği çıkarılırsa her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = (F(\upsilon)F(\rho) - F(\rho)F(\upsilon))\alpha(y)d(\rho)$$

bulunur. Son eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = (F(\upsilon\rho) - F(\rho\upsilon))\alpha(y)d(\rho) \tag{4.23}$$

olur. Burada υ yerine $\rho\upsilon$ yazılıp F'nin tanımı, α'nın tanımı ve Lie komütatör tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = (F(\upsilon\rho) - F(\rho\upsilon))\alpha(y\rho)d(\rho) + \alpha([\upsilon, \rho])d(\rho)\alpha(y)d(\rho)$$

bulunur. Bu ifade (4.23) eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = \alpha([\upsilon, \rho])d(\rho)\alpha(y)d(\rho)$$

olur. Burada $r \in R$ olmak üzere y elemanı yerine $[\upsilon, \rho]r$ elemanı yazılarak ve α'nin tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, \upsilon \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = \alpha([\upsilon, \rho])d(\rho)\alpha(r)\alpha(\,[\upsilon, \rho]\,)d(\rho)$$

eşitliğine ulaşılır. α anti-epimorfizma olduğundan $\alpha(R) = R$ dir. Yani her $\rho, \upsilon \in I$ için

$$(0) = \alpha([\upsilon, \rho])d(\rho)R\alpha(\,[\upsilon, \rho]\,)d(\rho)$$

olur. R yarı-asal halka olduğundan her $\rho, \upsilon \in I$ için

$$0 = \alpha([\upsilon, \rho])d(\rho) \tag{4.24}$$

bulunur. Burada $r \in R$ olmak üzere υ yerine υr yazılarak ve (2.10) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, \upsilon \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = \alpha(\upsilon[r, \rho] + [\upsilon, \rho]r)d(\rho)$$

olur. Son eşitlikte α'nın tanımı kullanılırsa her $\rho, \upsilon \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = \alpha([r, \rho])\alpha(\upsilon)d(\rho) + \alpha(r)\alpha([\upsilon, \rho])d(\rho)$$

elde edilir. Burada (4.24) eşitliği kullanılırsa her $\rho, \upsilon \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = \alpha([r, \rho])\alpha(\upsilon)d(\rho)$$

olur. Bu eşitlik Lie komütatör tanımı ve α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, \upsilon \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(r), \alpha(\rho)]\alpha(\upsilon)d(\rho) \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.25) eşitliği sağdan $\alpha(\rho)$ ile çarpılırsa her $\rho, \upsilon \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(r), \alpha(\rho)]\alpha(\upsilon)d(\rho)\alpha(\rho) \tag{4.26}$$

bulunur. (4.25) eşitliği υ yerine $\rho\upsilon$ yazılarak ve α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, \upsilon \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(r), \alpha(\rho)]\alpha(\upsilon)\alpha(\rho)d(\rho) \tag{4.27}$$

olur. Elde edilen (4.26) eşitliğinden (4.27) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, \upsilon \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [\alpha(r), \alpha(\rho)]\alpha(\upsilon)[d(\rho), \alpha(\rho)]$$

bulunur. Yani her $\rho \in I$ için

$$(0) = [\alpha(R), \alpha(\rho)]\alpha(I)[d(\rho), \alpha(\rho)]$$

olduğu görülür. α anti-epimorfizma olduğundan $\alpha(R) = R$ dir. Buradan her $\rho \in I$ için

$$(0) = [R, \alpha(\rho)]J[\, d(\rho), \alpha(\rho)]$$

olur. Böylece her $\rho \in I$ ve $r \in R$ için

$$(0) = [r, \alpha(\rho)]J[\, d(\rho), \alpha(\rho)]$$

elde edilir. Burada r yerine $d(\rho)$ yazılırsa her $\rho \in I$ için

$$(0) = [d(\rho), \alpha(\rho)]J[\, d(\rho), \alpha(\rho)]$$

bulunur. J yarı-asal halka olduğundan her $\rho \in I$ için $0 = [d(\rho), \alpha(\rho)]$ olur.

Teorem 4.10. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho y) + F(\rho)F(y) = 0$ ise her $\rho \in I$ için $[\alpha(\rho), d(\rho)] = 0$ olur.

İspat: F, d ile belirli çarpımsal genelleştirilmiş-(α, α)-ters türev ve $-F$, $-d$ ile belirli çarpımsal genelleştirilmiş-(α, α)-ters türevdir. Teorem 4.9. da F yerine $-F$ ve d yerine $-d$ yazılarak sonuca ulaşılır.

Teorem 4.11. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho y) - F(y)F(\rho) = 0$ ise $\alpha(I)d(I) = 0$ ve her $y \in I$ için $[F(y), \alpha(y)] = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki her $\rho, y \in I$ için

$$F(\rho y) = F(y)F(\rho)$$

olsun. Bu ifade $\upsilon \in I$ olmak üzere ρ yerine $\rho\upsilon$ yazılıp hipotez ve F'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$F((\rho\upsilon)y) = F(y)F(\rho\upsilon) = F(y)(F(\upsilon)\alpha(\rho) + \alpha(\upsilon)d(\rho))$$

bulunur. Yani her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$F((\rho\upsilon)y) = F(y)F(\upsilon)\alpha(\rho) + F(y)\alpha(\upsilon)d(\rho)$$

olur. Bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$F((\rho\upsilon)y) = F(\upsilon y)\alpha(\rho) + F(y)\alpha(\upsilon)d(\rho) \tag{4.28}$$

olur. Ayrıca F'nin tanımından her $\rho, \omega \in I$ için $F(\rho\omega) = F(\omega)\alpha(\rho) + \alpha(\omega)d(\rho)$ dir. Bu eşitlikte $\upsilon \in I$ olmak üzere ω yerine υy yazılırsa her $\rho, \upsilon, y \in I$ için

$$F(\rho(\upsilon y)) = F(\upsilon y)\alpha(\rho) + \alpha(\upsilon y)d(\rho) \tag{4.29}$$

bulunur. (4.28) eşitliğinden (4.29) eşitliği çıkarılırsa her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = (F(y) - \alpha(y))\alpha(\upsilon)d(\rho)$$

bulunur. Bu eşitlik $r \in R$ olmak üzere υ yerine υr yazılıp α'nın tanımı kullanılarak düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = (F(y) - \alpha(y))\alpha(r)\alpha(\upsilon)d(\rho)$$

elde edilir. α anti-epimorfizma olduğundan $\alpha(R) = R$ dir. Böylece her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$(0) = (F(y) - \alpha(y))R\alpha(\upsilon)d(\rho) \tag{4.30}$$

olur. (4.30) eşitliği soldan $F(\upsilon)$ ile çarpılırsa her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$(0) = F(\upsilon)(F(y) - \alpha(y))R\alpha(\upsilon)d(\rho) \tag{4.31}$$

elde edilir. Hipotezden her $y, \upsilon \in I$ için $F(y\upsilon) = F(\upsilon)F(y)$ ve ayrıca F'nin tanımından $F(y\upsilon) = F(\upsilon)\alpha(y) + \alpha(\upsilon)d(y)$ dir. Bu ise $y, \upsilon \in I$ için $F(\upsilon)F(y) = F(\upsilon)\alpha(y) + \alpha(\upsilon)d(y)$ demektir. Bu eşitlik düzenlenirse her y, υ için $F(\upsilon)\big(F(y) - \alpha(y)\big) = \alpha(\upsilon)d(y)$ bulunur. Bu eşitlik (4.31) eşitliğinde kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$(0) = \alpha(\upsilon)d(y)R\alpha(\upsilon)d(\rho)$$

ve

$$(0) = F(\upsilon)(F(y) - \alpha(y))RF(\upsilon)\big(F(\rho) - \alpha(\rho)\big)$$

elde edilir. Bu son iki eşitliklerde ρ yerine y yazılırsa her $y, \upsilon \in I$ için

$$(0) = \alpha(\upsilon)d(y)R\alpha(\upsilon)d(y)$$

ve

$$(0) = F(\upsilon)(F(y) - \alpha(y))RF(\upsilon)\big(F(y) - \alpha(y)\big)$$

olur. R yarı-asal halka olduğundan her $y, \upsilon \in I$ için $0 = \alpha(\upsilon)d(y)$ yani $(0) = \alpha(I)d(I)$ ve $0 = F(\upsilon)(F(y) - \alpha(y))$ olur. Buradan $0 = F(\upsilon)(F(y) - \alpha(y))$ eşitliği υ yerine $y\upsilon$ yazılıp F'nin tanımı ve $(0) = \alpha(I)d(I)$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse her $y, \upsilon \in I$ için

$$0 = F(\upsilon)\alpha(y)(F(y) - \alpha(y)) \tag{4.32}$$

bulunur. Benzer şekilde $0 = F(\upsilon)(F(y) - \alpha(y))$ eşitliğinde y yerine y^2 yazılıp F'nin tanımı ve $(0) = \alpha(I)d(I)$ eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $y, \upsilon \in I$ için

$$0 = F(\upsilon)(F(y)\alpha(y) - \alpha(y)^2) \tag{4.33}$$

bulunur. Burada (4.33) eşitliğinden (4.32) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılırsa her $y, \upsilon \in I$ için

$$0 = F(\upsilon)[F(y), \alpha(y)]$$

elde edilir. Bu eşitlikte υ yerine $\rho\upsilon$ yazılıp F'nin tanımı ve $(0) = \alpha(I)d(I)$ eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = F(\upsilon)\alpha(\rho)[F(y), \alpha(y)] \tag{4.34}$$

olur. Benzer şekilde (4.34) eşitliğinde υ yerine υ^2 yazılıp F'nin tanımı ve $(0) = \alpha(I)d(I)$ eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = F(\upsilon)\alpha(\upsilon)\alpha(\rho)[F(y), \alpha(y)] \tag{4.35}$$

olur. (4.34) eşitliği soldan $\alpha(\upsilon)$ elemanı ile çarpılarak düzenlenirse her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = \alpha(\upsilon)F(\upsilon)\alpha(\rho)[F(y), \alpha(y)] \tag{4.36}$$

bulunur. Elde edilen (4.35) eşitliğinden (4.36) eşitliği çıkarılıp Lie komütatör tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa her $\rho, y, \upsilon \in I$ için

$$0 = [F(\upsilon), \alpha(\upsilon)]\alpha(\rho)[F(y), \alpha(y)]$$

eşitliğine ulaşılır. Son ifadede υ elemanı y elemanıyla değiştirilirse her $\rho, y \in I$ için

$$0 = [F(y), \alpha(y)]\alpha(\rho)[F(y), \alpha(y)]$$

olur. Yani her $y \in I$ için

$$0 = [F(y), \alpha(y)]J[F(y), \alpha(y)]$$

elde edilir. J yarı-asal halka olduğundan her $y \in I$ için $0 = [F(y), \alpha(y)]$ olur.

Teorem 4.12. Her $\rho, y \in I$ için $F(\rho y) + F(y)F(\rho) = 0$ ise $\alpha(I)d(I) = 0$ ve her $y \in I$ için $[F(y), \alpha(y)] = 0$ olur.

İspat: F, d ile belirli çarpımsal genelleştirilmiş-(α, α)-ters türev ve $-F$, $-d$ ile belirli çarpımsal genelleştirilmiş-(α, α)-ters türevdir. Teorem 4.11. de F yerine $-F$ ve d yerine $-d$ yazılarak sonuca ulaşılır.

BEŞİNCİ BÖLÜM
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, öncelikle (Ulutaş ve Gölbaşı., 2020) tarafından yapılan çalışma motivasyon alınarak, α halka üzerinde tanımlanmış anti-homomorfizma olmak üzere çarpımsal (genelleştirilmiş)-(α, α)-ters türev kullanılarak sekiz farklı sonuç elde edilmiştir. Ayrıca çarpımsal (genelleştirilmiş)-(α, α)-ters türevlerle ilgili örnekler verilmiştir. Ardından (Dhara, vd., 2014) tarafından yapılan çalışmadaki dört teorem α halka üzerinde tanımlanmış anti-homomorfizma olmak üzere çarpımsal (genelleştirilmiş)-(α, α)-ters türev üzerinde incelenmiştir.

KAYNAKÇA

Herstein, I. N. (1957). “ Jordan derivations of prime rings”. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 8 (6), 1104-1110. https://doi.org/10.1090/S002-9939-1957-0095864-2.

Aboubakr, A. ve Gonzalez, S. (2015). “Generalized reverse derivations on semiprime rings”. *Siberian Mathematical Journal*, 56 (2), 199-205. https://doi.org/10.1134/S0037446615020019.

Bresăr, M. (1991). “On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations”. *Glasgow Mathematical Journal,* 33 (1), 89-93. https://doi.org/10.1017/S0017089500008077.

Dhara, B., Kar, S. ve Das, D. (2014). “A multiplicatice (generalized)-(σ,σ)-derivation acting as (anti-) homomorphism in semiprime ring”. *Palestine Journal of Mathematics,* 3 (2), 240-246.

Karahan, H., Aydın, N. ve Yeşil, D. (2022). “On the multiplicative (generalized)-(α,α)-derivation of semiprime rings”. *Journal of New Theory,* (39), 42-53. https://doi.org/10.53570/jnt.1126644.

Tiwari, S. K., Sharma, R. K., and Dhara, B. (2018). “Some theorems of commutativity on semiprime ring with mappings”. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 42 (2), 279-292.

Ulutaş, E. ve Gölbaşı, Ö. (2020). “Result on multiplicative (generalized) (α,α)-derivations”. *International Journal of Open Problems in Conputer Science & Mathematics,* 13 (3), 128-135.

Dhara, B., Kar, S. ve Kuila, S. (2020). “A note multiplicative (generalized)-derivations and left ideals in semiprime rings”. *Rendiconti del Circola Matematico di Palermo Series 2.* https://doi.org/10.1007/s12215-020-00515-4.

Özdemir, M. ve Aydın, N. (2018). “(α,β)-reverse derivation on prime and semi prime rings” *International Journal of Open Problems in Conputer Science & Mathematics,* 3 (9), 49-59.

Faraj, A. K. (2011). “On generalized $(\theta, \emptyset)$-reverse derivation of prime ring*”. Iraqı Journal of Science*, 52 (2), 218-224.

Samman, M. S. ve Alyamani, N. (2007). “Derivations and reverse derivations in semiprime rings”. *International Mathematical Forum,* 2 (37-40), 1895-1902. https://dx.doi.org/10.12988/imf.2007.07168.

Asma, A. ve Bano, A. (2018) “Multiplicative (generalized) reverse derivations on semiprime rings”. *European Journal of Pure and Applied Mathematics,* 11 (3), 717-729. http://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v11i3.3248.

Alhaidary Z. S. M. and Majeed, A. H. (2021) “Commutativity results for multiplicative (generalized) (α, β)-reverse derivations on prime rings”. *Iraqı Journal of Science*, 62 (9), 3102-3113. https://doi.org/10.24996/ijs.2021.62.9.2.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

İsim SOYİSİM :

Doğum Yeri :

Doğum Tarihi :

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi :

Yüksek Lisans Öğrenimi :

Bildiği Yabancı Diller :

İLETİŞİM

E-posta Adresi :

ORCID :