T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ARALIK ÖDEMELİ MATRİS OYUNLAR VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜMEYYE ŞEN

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. ÜYESİ AYKUT OR

ÇANAKKALE – 2022

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ARALIK ÖDEMELİ MATRİS OYUNLAR VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜMEYYE ŞEN

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. ÜYESİ AYKUT OR

ÇANAKKALE – 2022

ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Sümeyye ŞEN

27/01/2022

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını, emeklerini esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR'a ve çalışmalarım esnasında desteklerini ve emeklerini benden esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi G. Selin SAVAŞKAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca bana daima destek olan kıymetli babam Abdülaziz ŞEN'e, canım annem Nurhayat ŞEN'e, değerli abim ve biricik kardeşime teşekkürlerimi sunarım.

Sümeyye ŞEN

Çanakkale, Ocak 2022

ÖZET

ARALIK ÖDEMELİ MATRİS OYUNLAR VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Sümeyye ŞEN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

27/01/2022, 52

Bu çalışmada aralık değerli matris oyunlar ve bu oyunların getiri matrisleri ile ilgili bazı özellikler yardımıyla oyun değerinin varlığı ve ne olduğunun bulunması amaçlanmıştır. Bu kapsamda çalışmanın birinci bölümünde literatür özeti verilerek konunun önemi ve literatürdeki yeri açıklanmıştır. İki kişilik sıfır toplamlı matris oyunlar ve genel özelliklerinin verildiği ikinci bölümde bazı çözüm yöntemleri araştırılmıştır. Üçüncü bölümde aralık sayıları ve aralık matrisleri verilerek bu kavramların bazı özellikleri sunulmuştur. Ayrıca aralık değerli matris oyunları için çözüm yöntemlerine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde aralık matrislerin özdeğer ve özvektörleri ile ilgili temel tanım ve kavramlara değinilmiştir. Ayrıca aralık değerli matris oyunu ile özdeğerler arasındaki ilişki ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Aralık Matris, Aralık Ödemeli Matris Oyunu, Oyun Değeri, Aralık Matrisin Özdeğeri

ABSTRACT

MATRIX GAMES WITH INTERVAL PAYOFF AND SOLUTION METHODS

Sümeyye ŞEN
Çanakkale Onsekiz Mart University
School of Graduate Studies
Master of Science Thesis in Mathematics
Advisor: Asst. Prof. Aykut OR
27/01/2022, 52

In this study, it is aimed to find out the existence of the game value and what it is with the help of some features related to the interval value matrix games and the payoff matrices of these games. In this context, in the first part of the study, the importance of the subject and its place in the literature are explained by giving a summary of the literature. In the second part, where two-person zero-sum matrix games and their general properties are given, some solution methods are investigated. In the third chapter, interval numbers and interval matrices are provided and some properties of these concepts are presented. In addition, solution methods for interval value matrix games are given. In the fourth chapter, basic definitions and concepts related to eigenvalues and eigenvectors of interval matrices are mentioned. In addition, the relationship between the interval value matrix game and the eigenvalues is expressed.

Keywords: Interval Matrix, Interval Value Matrix Game, Value of Game, Eigenvalue of Interval Matrix

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR

Max.	Maksimum
Min.	Minimum
İnf	İnfimum
Sup	Supremum
A_c.	$\tilde{A}$ aralık matrisin genişliği
ΔA.	$\tilde{A}$ aralık matrisin yarıçapı
$\tilde{a}$.	Aralık sayı
$\tilde{A}$.	$\tilde{A}$ aralık matris
m($\tilde{A}$)	$\tilde{A}$ aralık matrisin orta noktası
w($\tilde{A}$)	$\tilde{A}$ aralık matrisin yarıçapı
λ.	Özdeğer
$\phi(\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b})$.	$\tilde{b}$ nin $\tilde{a}$ dan büyüklüğünün derecesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

Oyun teorisi, birbirine rakip olan ve çıkarları çatışan rasyonel karar vericilerin karşılıklı etkileşim ortamında çatışma ve işbirliğini açıklayan matematiksel bir yaklaşımdır (Owen, 1995).

Oyun teorisinde amaç oyuncuların rasyonel bir şekilde kendi çıkarlarını mantıklı akıl yürütme yoluyla korumak için gerekli olan stratejiyi belirlemek ve bunun sonucunda hangi kazancı veya kaybı elde edeceğini bilerek karar vermelerini sağlamaktır.

Oyun teorisi karar teorisinin değişik bir türü olarak kabul edilebilir. Oyun teorisi karar teorisinden şu ana unsurlar ile ayrışır. Oyun teorisinde karar vericilerin her biri oyunculardır. Oyun teorisini karar (getiri) matrisinde koşullar yerine rakip oyuncunun stratejileri yerleştirilmiştir. Oyun teorisinde oyuncuların davranışlarını açıklamakta inanışları dahil edilmez, beklenen getirinin maksimalleştirilmesi çözüm tekniğine dahil edilir. Oyun teorisinde oyuncuların seçimlerinin sonucu rakiplerinin kararlarına bağlı olduğu stratejik bir çatışma durumudur.

Ülkelerin toprak için savaşması, işletmelerin pazar payı için rekabet etmesi, hayvanların doğal kaynaklar için mücadelesi ve siyasi partilerin oy yarışı... Dinamik sistemlerde ve "değerlerini" (value) maksimize etmeyi amaçlayan, temsilciler tarafından yönetilen bir dünyada, Oyun Teorisi her alanda kendini göstermektedir.

Oyun teorisi birden çok oyuncunun bulunduğu her oyuncunun getirisinin diğer oyuncuların seçimlerine bağlı olduğu karar verme işleminin tutarlı bir analizini yapmayı sağlayan yöntemler ve bir dil geliştirir.

Oyun teorisi genellikle John Von Neumann ve Oskar Morgenstern’in 1944 te yayımlanan “The Theory of Games and Economic Behaviour” (Oyun teorisi ve Ekonomik

Davranış) adlı kitabıyla başlandığı kabul görse de aslında ilk olarak Augustin Cournot'un 1838 yılındaki "Researches on the Mathematical Principles of the Theory of Wealth" çalışması ve sonrasında Fransız matematikçi Emile Borel'İn 1921 yılında "Algebre et calcul des probabilites" adlı eseridir. Modern oyun teorisinin 1928 yılında oyunların temel ilkeleri ile matematiksel yapısını birleştirdiği "Minimax" teoremi ile başladığı kabul edilir. John Von Neumann'ın 1928 de tanımlamış olduğu iki kişilik oyun dengesini genişleterek kendisine Nobel Ödülü kazandıran John Nash, oyun teorisine çok önemli katkılar sunmuştur. John Nash, 1950-1953 yılları arasında yayınladığı 4 farklı çalışmada, daha sonraki yıllarda "Nash Dengesi" olarak da adlandırılan, hem rekabetçi hem de işbirlikçi oyunlarda bir denge noktası kavramını ortaya koymuştur.

Daha net bir ifade ile J. Nash, sıfır toplamlı olmayan, sonlu ve n oyunculu bir oyunda her oyuncunun bir optimal stratejiye sahip olduğunu kanıtlamıştır. J. Nash sayesinde oyun teorisi, günlük hayatımızda finanstan politikaya, spordan ticarete rekabetin olduğu her alana uyarlanabilen bir hâle gelmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde oyun teorisinde incelenen problemlerin en önemlilerinden biri olan iki kişili sıfır toplamlı oyunlar ele alınmıştır. Ayrıca, çalışmanın sonraki bölümlerinde gerekli olan strateji, oyunun çözümü ve çözüm yöntemleri gibi kavramlar tanımlanıştır. Üçüncü bölümde aralık kavramından bahsedilerek aralık sayıları ele alınmış ve bu aralık sayılarının sıralanmasına yönelik çalışmalardan bahsedilmiştir. Daha sonra bilinen klasik matrisin elemanlarının yerine aralık sayıları alınarak getiri matrisi aralık değerli matris oyunları göz önüne alınarak bu oyunların özellikleri ve çözüm yöntemleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde klasik matrislerin negatif olmayan özvektörlerine karşılık gelen özdeğerleri ve bu özdeğerlerin oyun değeri ile ilişkisinin varlığı vurgulanmıştır. Daha sonra aralık değerli matrislerin oyun değerinin özdeğerler yardımıyla elde edilebileceği ortaya konulmuştur.

İKİNCİ BÖLÜM
İKİ KİŞİLİ SIFIR TOPLAMLI OYUNLAR

Oyun teorisinde oyunların sınıflandırılma çeşitlerinden bir tanesi de oyuncu sayılarıdır. İki kişilik oyunlar, iki oyuncuyla oynanan oyunlar sınıfında yer almaktadır. Oyunculardan birinin kazancının diğerinin kaybına eşit olduğu durumda ise oyun iki kişili sıfır toplamlı olarak adlandırılır (Owen, 1995). Çalışmamızın bu bölümünde iki kişili sıfır toplamlı oyunlar ve bu oyunların genel özellikleri ile ilgili temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Bu kavramlar (Barron, 2006; Guseinov ve vd., 2010; Morris, 1994; Morngestern ve Neumann, 1944; Owen, 1995; Ferguson, 2014) çalışmalarından derlenerek verilmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. Mücadele içeren herhangi bir olaya oyun denir. Oyuncular,stratejiler ve ödeme fonksiyonu adı verilen temel öğeler bilindiğinde ya da harekete geçirildiğinde bir oyun ortaya çıkar.

Tanım 2.1.2. Oyunda kazançlarını maksimize etmek isteyen taraflara oyuncu denir. Oyun içinde yer alan bir tercih yapan ve bu tercihler sonucunda bir kazanç ya da kayıp elde eden birey veya gruplara oyuncu denir.

Tanım 2.1.3. Oyunun başından sonuna kadar ortaya çıkabilecek bütün durumlar için oyuncuların tercihlerini belirten kararlar bütününe strateji denir. Oyunun başından sonuna kadar ortaya çıkabilecek bütün durumlar için oyuncuların tercihlerini belirten kararlar bütününe strateji denir.

Tanım 2.1.4. Her bir oyuncunun maksimum kazanca ulaşma hedefi içinde olduğu oyunlara ortaksız oyun denir.

Tanım 2.1.5. Oyuncuların getirileri toplamının sıfır olduğu oyunlara sıfır toplamlı oyun denir.

Tanım 2.1.6 İki kişilik sıfır toplamlı ortaksız oyuna muhalif (antagonastic) oyun denir.

Tanım 2.1.7 Her bir oyuncunun sonlu sayıda stratejiye sahip olduğu muhalif (iki kişilik sıfır toplamlı) oyuna matris oyunu denir.

Tanım 2.1.8 I. oyuncunun m tane stratejisi II. oyuncunun n tane stratejisi olduğu durumda oluşan mxn lik matrise oyunun getiri matrisi denir.

I. Oyuncu keyfi i. Stratejisi olan I_i ve II. oyuncu keyfi j. stratejisi olan II_j ile oynadığında elde edilen getiri a_{ij} olur. Bu getiri I. oyuncunun getirisini göstermektedir. Oyun sıfır toplamlı olduğundan II. oyuncunun getirisi $-a_{ij}$ ile ifade edilir. Dolayısıyla I. oyuncu $I_1, I_2, \dots, I_m$ stratejilerine II. oyuncu $I_1, I_2, \dots, I_m$ stratejilerine sahip iken oyunun getiri matrisi

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & \cdots & II_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

olur. Getiri matrisi I. oyuncunun getrilerini ifade etmektedir. Oyun sıfır toplamlı olduğu için II. oyuncunun getirilerini gösteren matris $-A$ ile ifade edilir.

2.2. Saf Stratejiler ve Oyun Süreci

Tanım 2.2.1. Olasılık olayı içermeyen stratejiye saf (pür) strateji denir.

Saf stratejiler sınıfında bir matris oyununun oynanma süreci ve denge noktası gibi kavramları vermeden önce analizden bildiğimiz denge noktası kavramını ifade edelim.

Tanım 2.2.2. $f: A \times B \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $a \in A$ ve her $b \in B$ için

$$f(a_0, b) \leq f(a_0, b_0) \leq f(a, b_0)$$

olacak biçimdeki (a_0, b_0) elemanına eyer (denge) noktası denir.

Teorem 2.2.3. $A \times B$ üzerinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonunun eyer noktalarına sahip olması için gerek ve yeter şart $\max\min f(a, b)$, $\min\max f(a, b)$ minimaxların varlığı ve

$$\max_{a \in A} \min_{b \in B} f(a, b) = \min_{b \in B} \max_{a \in A} f(a, b)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 2.2.4. $A \times B$ üzerinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu için

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} f(a, b) \leq \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} f(a, b)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.2.5. A matrisinde i satır numarası, j sütun numarası olmak üzere (i, j) ikilisi matris oyununda bir durum belirlemektedir. $\forall i \in \{1, \dots\dots, m\}$ ve $\forall j \in \{1, \dots\dots, n\}$ için

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}$$

$$a_{i^*j} \geq a_{i^*j^*}$$

eşitsizliğini sağlayan (i^*, j^*) durumu bir denge durumudur. Denge durumundaki $a_{i^*j^*}$ matris elemanına saf stratejiler sınıfında denge (eyer) noktası denir.

Denge noktası tanımından $a_{i^* j^*}$ elemanı satırdaki en küçük sütundaki en büyük eleman olarak ifade edilebilir.

Aşağıda verilmiş olan getiri matrislerinde $a_{21} = -1$, A matrisinin, $b_{12} = 1$ ve $b_{33} = 1$, B matrisinin denge noktalarıdır. Ancak C matrisin bir denge noktası yoktur.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Denge noktasını veren stratejiler en iyi stratejilerdir. Denge durumunda ortaya çıkan değerler *I.* oyuncunun ulaşabileceği en büyük kazancı, *II.* oyuncunun da ulaşabileceği en düşük kaybı gösterir. Eğer *I.* oyuncu denge noktasında elde ettiği getiriyi veren stratejiyi seçmezse elde edeceği kazançtan daha az kazanç elde etmiş olur. Aynı şekilde *II.* oyuncu da denge noktasında elde ettiği kazancı veren stratejiyi seçmezse daha fazla kaybetmiş olacaktır.

Teorem 2.2.6. $A = (a_{ij})$ getiri matrisinde a_{ij} ve a_{kl} denge noktaları ise bu durumda a_{il} ve a_{kj} değerleri de denge noktasıdır. Üstelik,

$$a_{ij} = a_{kl} = a_{il} = a_{kj}$$

dir.

Tanım 2.2.7. Getiri matrisi $A = (a_{ij})$ olan bir matris oyununda

$$V_r(P) = \max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij}$$

değerine oyunun saf stratejiler sınıfındaki alt değeri,

$$V_c(P) = \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$$

değerine oyunun saf stratejiler sınıfındaki üst değeri denir. Alt değerin üst değere eşit olduğu

$$V_c(P) = V_r(P) = v$$

v değerine de oyun değeri denir. $I.$ oyuncunun kazançlarının alt sınırı $V_r(P)$ değeri ile $II.$ oyuncunun kayıplarının üst sınırı $V_c(P)$ değeri ile ifade edilir.

Teorem 2.2.8. Getiri matrisi $A = (a_{ij})_{m\times n}$ olan oyunda

$$V_r(P) \leq V_c(P)$$

dır.

İspat *I.*oyuncu I_{i_*}ve $II.$ oyuncu II_{j_*} keyfi stratejilerini seçsin. Bu durumda

$$\min_{j=1,2,\dots,n} a_{i_* j} \leq a_{i_* j_*}$$

olur. Bu eşitsizlikte her sabitlenmiş $i_* = 1,2,\dots\dots,n$ için doğru olduğundan,

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} \leq \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij_*}$$

olur. Son eşitsizlikte j_* keyfi sabitlenmiş olduğundan,

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} \leq \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$$

elde edilir. Yani,

$$V_r(P) \leq V_c(P)$$

olur.

Bir matris oyununda $I.$ oyuncunun m tane $\{I_1, I_2, \dots\dots\dots, I_m\}$, $II.$ oyuncunun n tane $\{II_1, II_2, \dots\dots, II_n\}$ saf stratejisi olduğunu kabul edelim. Oyunda her iki oyuncuda stratejilerini kullanarak getirilerini (kazançlarını) maksimalleştirmeye çalışacaklardır. Oyun sıfır toplamlı olduğundan $I.$ oyuncunun kazancını maksimalleştirmesi, $II.$ oyuncunun, kaybını minimalleştirmesine denk olur. $I.$ oyuncunun I_i stratejisini seçtiğini varsayalım. Bu durumda $II.$ oyuncunun seçeceği en iyi strateji,

$$a_{ij_*} = \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij}$$

eşitsizliğini sağlayacak II_{j_*} stratejisi olur. Bunun üzerine $I.$ oyuncu kazancını maksimalleştirmek için seçeceği en iyi strateji

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} = \min_{j=1,2,\dots,n} a_{i_*j}$$

olacak biçimdeki I_{i_*} stratejisidir. Bu strateji $I.$ oyuncu için saf stratejiler sınıfında optimal stratejidir.

Benzer biçimde $II.$ oyuncunun II_{j*} stratejisini seçtiğini varsayalım. Bu durumda $I.$ oyuncunun seçeceği en iyi strateji,

$$a_{i_*j} = \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$$

eşitliğini sağlayan I_{i_*}stratejisi olur. Buna karşı $II.$ oyuncunun amacı getirileri minimalleştirmek olduğundan seçeceği en iyi strateji,

$$\min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij} = \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij_*}$$

eşitliğini sağlayacak II_{j_*}stratejisidir. Bu strateji $I.$ oyuncu için saf stratejiler sınıfında optimal stratejidir.

Örnek 2.2.9. Getiri matrisi aşağıdaki şekilde verilmiş olan oyunun değerini bulalım.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 4 & 7 \\ 7 & -1 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_c(P) = \max_{i=1,\dots,4} \min_{j=1,\dots,5} a_{ij} &= \max\{\min_j a_{1j}, \min_j a_{2j}, \min_j a_{3j}, \min_j a_{4j}\} \\ &= \max\{1,0,4,-1\} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_r(P) = \min_{j=1,\dots,5} \max_{i=1,\dots,4} a &= \min\{\max_i a_{i1}, \max_i a_{i2}, \max_i a_{i3}, \max_i a_{i4}, \max_i a_{i5}\} \\ &= \min\{7,6,4,6,7\} = 4 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $V_r(P) = V_c(P) = 4$ olduğundan oyun değeri $v = 4$ olur.

2.3. Karma Stratejiler ve Oyunun Çözümü

İki kişilik sıfır toplamlı oyunların saf stratejiler sınıfında her zaman bir oyun değeri olmadığı bir önceki bölümde incelenmiştir. Bu bölümde ise saf stratejiler sınıfında oyun değeri olmadığı durumda karma stratejiler sınıfına geçiş yapılarak oyun değeri araştırılır. Karma stratejiler ile ilgili temel tanım ve teoremler için (Ahlatçıoğlu ve Tiryaki, 1998; Akyar, 2011; Bakoğlu, 1991; Barron, 2006; Morris, 1994; Owen, 1995) kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.3.1. Oyuncunun saf stratejilerini seçme olasılıklarını gösteren rassal değişkene oyuncunun karma stratejisi denir.

I. oyuncunun karma stratejisi

$$x_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$$

ve

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

olacak biçimdeki $x = (x_1, x_2, \dots \dots .., x_m)$ vektörüdür. O halde, I. oyuncunun karma stratejilerinin kümesi

$$X = \{x = (x_1, x_2, \dots \dots .., x_m) : \ x_i \geq 0, (i = 1, \dots .., m) \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$$

dir.

Benzer şekilde II. oyuncunun karma stratejiler kümesi

$$Y = \{y = (y_1, y_2, \dots \dots .., y_n) : \ y_j \geq 0, (j = 1, \dots .., n) \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}$$

dir.

$I.$ oyuncunun $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ karma stratejisi ile oynaması I_i saf stratejisini x_i olasılığı ile oynadığı anlamına gelir. $II.$ oyuncu için de benzer durum söz konusudur. Öte yandan, $I.$ oyuncu için $x = \{0,0, \ldots ,0,1,0, \ldots ,0\}$ karma stratejisinde $i.$ stratejisini seçme olasılığı 1 diğer tüm stratejileri seçme olasılığı sıfırdır. Dolayısıyla saf stratejiler, karma stratejilerin özel bir halidir.

Tanım 2.3.2. Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

olan bir oyunda $I.$ oyuncu $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ karma stratejisi ve $II.$ oyuncu $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ karma stratejisini seçtiğinde $I.$ oyuncu için beklenen getiri

$$E(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$$

şeklinde elde edilir. Söz konusu getirinin matris ile temsili

$$E(x,y) = XAY^T$$

dir. Burada y^T vektörü, $y^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $y \in Y$ vektörünün transpozudur.

Benzer şekilde $I.$oyuncu $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ karma stratejisi ve $II.$ oyuncu keyfi j saf stratejisini seçtiğinde, $I.$ oyuncu için beklenen getiri

$$E(x,j) = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}$$

olur. Ayrıca $I.$ oyuncu keyfi i saf stratejisi ve $II.$ oyuncu $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ karma stratejisini seçtiğinde $II.$ oyuncu için beklenen getiri

$$E(i,y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

olur.

Teorem 2.3.3. $I.$ oyuncunun karma stratejiler kümesi $X \subseteq \mathbb{R}^m$ ve $II.$ oyuncunun karma stratejiler kümesi $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ kümeleri kompakt ve konveks kümelerdir.

İspat $x = (x_1, x_2, \dots \dots ., x_m) \in X$ olsun.

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$$

dir. Yani keyfi $x \in X$ için $\|x\| \leq 1$ olur. Bu ise X kümesinin sınırlı olması demektir. X kümesi kapalı küme olduğundan X kümesinin kompakt olduğu elde edilir. Öte yandan

$$x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots \dots ., x_m^{(1)}\right) \in X \,, x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots \dots ., x_m^{(2)}\right) \in X$$

ve $\alpha \in [0,1]$ olsun.

$\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)} = \alpha x_1^{(1)} + (1-\alpha)x_1^{(2)} + \alpha\, x_2^{(1)} + (1-\alpha)x_2^{(2)} + \cdots + \alpha x_m^{(1)} + (1-\alpha)x_m^{(2)}$ dir. Hipotezden $i = 1,2, \dots, m$ için

$$x_i^{(1)} \geq 0, x_i^{(2)} \geq 0 \;\Rightarrow \alpha x_i^{(1)} + (1-\alpha)x_i^{(2)} \geq 0$$

olur. Ayrıca $\sum_{i=1}^{m} x_i^{(1)} = 1$ ve $\sum_{i=1}^{m} x_i^{(2)} = 1$ olduğu için

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha x_i^{(1)} + (1-\alpha)x_i^{(2)}\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{m}(1-\alpha)\, x_i^{(2)} = 1$$

elde edilir. Bu ise $\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)} \in X$ demektir. Yani X konvekstir.

Tanım 2.3.4. Getiri matrisi A_{mxn} olan bir oyunda

$$V_c(M) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} E(x,y)$$

sayısına karma stratejiler sınıfında oyunun üst değeri,

$$V_r(M) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} E(x,y)$$

sayısına da karma stratejiler sınıfında oyunun alt değeri denir.

$$V_r(M) = V_c(M) = v$$

ise oyunun değeri vardır ve v sayısına oyun değeri denir.

Teorem 2.3.5. Getiri matrisi A_{mxn} olan iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunların karma stratejiler sınıfında her zaman oyun değeri vardır. Yani ,

$$V_r(M) = V_c(M) = v$$

dir.

Tanım 2.3.6. $A = (a_{ij})$, mxn lik bir matris ve v oyunun değeri olsun.

$$v(A) = \min_{y \in Y} E(x^*, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} E(x, y)$$

olacak biçimdeki $x^* \in X$ stratejisine I. oyuncunun optimal stratejisi

$$v(A) = \max_{x \in X} E(x, y^*) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} E(x, y)$$

olacak biçimdeki $y^* \in Y$ stratejisine II. oyuncunun optimal stratejisi denir.

Tanım 2.3.7. $A = (a_{ij})$, mxn lik bir matris ve v oyunun değeri olsun.

$$v(A) \leq E(x^*, j) = x^* A_j = \sum_{i=1}^{m} x^*{}_i a_{ij}\, , j = 1, \dots, n$$

olacak biçimdeki $x^* \in X$ stratejisine I. oyuncunun optimal stratejisi,

$$E(i, y^*) = {}_iAy^{*T} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y^*{}_j \leq v(A)\, , i = 1, \dots, m$$

olacak biçimdeki $y^* \in Y$ stratejisine II. oyuncunun optimal stratejisi denir.

I. oyuncu x^* optimal stratejisi ile oynadığında en az $v(A)$ değeri kadar kazanacağını garanti ederken II. oyuncu da y^* optimal stratejisi ile oynadığında en fazla $v(A)$ değeri kadar kaybedeceğini garanti etmiş olur.

Teorem 2.3.8. $A = (a_{ij})$, mxn lik bir matris ve I. oyuncunun optimal stratejisi x^*, II. oyuncunun optimal stratejisi y^* olmak üzere,

$$V_r(M) \leq E(x^*, y^*) \leq V_c(M)$$

dir.

Tanım 2.3.9. x^*, I.oyuncunun y^*, II. oyuncunun karma stratejisi olsun. Bu durumda,

$$E(x, y^*) \leq E(x^*, y^*) \leq E(x^*, y)$$

olacak biçimdeki (x^*, y^*) ikilisine karma stratejiler sınıfında bir denge (eyer) noktası, x^* ve y^* stratejilerine denge stratejileri denir.

Tanım 2.3.10. $x^* \in X$, I. oyuncunun optimal karma stratejisi, $y^* \in Y, II$. oyuncunun optimal karma stratejisi ve v oyun değeri olmak üzere (x^*, y^*, v) üçlüsüne oyunun çözümü denir.

Örnek 2.3.11. Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

ile verilen oyunun çözümünü bulunuz.

Çözüm Oyunun saf stratejiler sınıfında bir oyun değeri yoktur. O halde karma stratejiler sınıfındaki oyun değerini bulalım. Oyun değeri v ve oyunun denge noktaları $x^* = (x_1, x_2)$, $y^* = (y_1, y_2)$ olsunlar. Bu durumda

$$E(i, y^*) = \ {}_iAy^{*T} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} y_j \leq v$$

dir. O halde,

$$3y_1+y_2 \leq v$$

$$6y_1 + 4y_2 \leq v$$

olur. Benzer şekilde

$$v \leq E(x^*, j) = x^* A_j = \sum_{i=1}^{2} x_i a_{ij}$$

olduğu düşünülürse

$$3x_1+6x_2 \geq v$$

$$5x_1 + 4x_2 \geq v$$

olur. Eşitsizlikleri çözüldüğünde her iki oyuncunun karma stratejileri

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), y^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

olarak bulunur. I. oyuncu x^*, II. oyuncu y^* karma stratejisiyle oynarsa oyunun getirisi,

$$E(x^*, y^*) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i y_j = 3\frac{1}{2}\frac{1}{4} + 5\frac{1}{2}\frac{3}{4} + 6\frac{1}{2}\frac{3}{4} + 4\frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{9}{2}$$

olur. Yani, oyunun çözümü $\left(x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), y^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), v = \frac{9}{2}\right)$ dir

Teorem 2.3.12. A matrisiyle verilen oyunun değeri v ve w keyfi bir sayı olsun. x,

$$w \leq E(x, j), j = 1, \dots, n$$

olacak şekilde I. oyuncunun karma stratejisidir. O halde $w \leq v$ dir. Benzer şekilde, y,

$$E(i, y) \leq w, i = 1, \dots, m$$

olacak şekilde II. oyuncunun karma stratejisidir. Yani, $v \leq w$ dir.

Teorem 2.3.13. x, I. oyuncunun y, II.oyuncunun karma stratejileri olsun.

$$E(i, y) \leq w \leq E(x, j)$$

olacak şekilde herhangi bir w sayısı varsa $w = v$ ve (x, y) noktası da eyer noktasıdır.

Teorem 2.3.14. $A = (a_{ij})$, mxn lik matris ile verilen oyunun değeri v olsun. Bu durumda, x^*, I.oyuncunun optimal stratejisi olması için gerek ve yeter şart

$$v \leq \sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij}\, , j = 1, \dots , n$$

olmasıdır. Benzer şekilde $y^* \in Y$, II.oyuncunun bir optimal stratejisi olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq v\, , i = 1, \dots , m$$

olmasıdır.

Teorem 2.3.15. $A = (a_{ij})$, mxn lik matris ile verilen oyunun değeri v olsun. O halde

$$\max_i E(i, y^*) = \min_j E(x^*, j)$$

dir.

İspat Teorem 2.3.13 ten $v \leq E(x^*, j)$ olduğu bilindiğinden

$$v \leq \min_j E(x^*, j)$$

yazılabilir. Eğer

$$v < \min_j E(x^*, j)$$

ise, o zaman $j = 1, \dots , n$ için

$$v < E(x^*, j)$$

olur. Böylece

$$\sum_{j=1}^{n} v\, y_j^* < \sum_{j=1}^{n} E(x^*, j)\, y_j^*$$

veya

$$v < E(x^*, y^*)$$

olur. Bu durum ise bir çelişkidir. Bundan dolayı,

$$v = \min_j E(x^*, j)$$

olur. Benzer şekilde,

$$v = \max_i E(i, y^*)$$

olur. O halde,

$$\max_i E(i, y^*) = \min_j E(x^*, j)$$

dir.

2.4. 2x2 Boyutlu Oyunların Çözümü

Getiri matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ile verilen oyunun saf stratejilerde bir denge noktası olmasın. Bu durumda tanım 2.3.2 gereği $x = (x, 1-x)$ ve $y = (y, 1-y)$ sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri olmak üzere oyunun getirisi

$$\begin{aligned} E(x,y) = xAy^T &= (x, 1-x)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \\ &= xy(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + x(a_{12} - a_{22}) + y(a_{21} - a_{22}) + a_{22} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.4.1. Getiri matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ile verilen iki kişilik sıfır toplamlı oyunun saf stratejiler sınıfında çözümü olmasın. O halde, x^* ve y^*sırasıyla I ve II. oyuncunun keyfi karma optimal stratejileri olsun. Bu durumda x^*, y^* sırasıyla

$$x^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}\ , y^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

dır. Oyun değeri ise

$$v = E(x^*, y^*) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek 2.4.2. Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

ile verilen matris oyunun çözümünü bulunuz.

Çözüm I. oyuncu x^*, II. oyuncu y^* karma optimal stratejisiyle oynasın. Bu durumda I. oyuncunun x^* karma optimal stratejisi

$$x^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{4 - 8}{3 - 6 - 8 + 4} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

dir. Dolayısıyla

$$1 - x^* = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

olur. Yani, $x^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$ dir.

Benzer şekilde II. oyuncunun y^*karma stratejisi

$$y^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{4 - 6}{3 - 6 - 8 + 4} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$$

dir. Dolayısıyla, $y^* = (\frac{2}{7}, \frac{5}{7})$ olur. Oyun değeri ise

$$v = E(x^*, y^*) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{12 - 48}{3 - 6 - 8 + 4} = \frac{-36}{-7} = \frac{36}{7}$$

dir. O halde oyunun çözüm üçlüsü

$$(x^*, y^*, v) = \left(\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right), \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right), \frac{36}{7}\right)$$

biçiminde verilir.

2.5. mx2 veya 2xn Boyutlu Oyunların Grafik Yöntem ile Çözümü

Getiri matrisi

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & \cdots & II_n \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen $2xn$-lik oyunu göz önüne alalım. Öncelikle $I.$ oyuncu $x = (x, 1 - x)$ karma, $II.$ oyuncu keyfi j saf stratejisi ile oynadığında oyunun getirisi

$$E(x, j) = xa_{1j} + (1 - x)a_{2j}$$

olur. Yani $II.$ oyuncunun her bir j saf stratejisine belli bir doğru karşılık gelir. $II.$ oyuncu kaybını minimalleştirmeye çalıştığından

$$z = \min_j xA_j = \min_j (xa_{1j} + (1 - x)a_{2j})$$

değerinden fazla kaybetmeyecektir.

$$z = \min_j xA_j$$

nin grafiği $II.$oyuncunun stratejilerine karşılık gelen doğru parçalarının oluşturduğu bir eğridir. Bu eğrilerin kesişimlerinin en üst noktasının apsisi $I.$ oyuncunun optimal stratejilerine karşılık gelen x^* değerini, ordinatı da v oyun değerini verir.

$$v = \max_x \min_j xA_j = \max_x z$$

biçiminde gösterilir.

$II.$ oyuncunun optimal stratejisinin belirlenmesinde oyun değerinin j_1 ve j_2 stratejilerine karşılık çizilen iki doğrunun kesişim noktası olduğunu varsayalım. O halde,

$$z = xa_{1j_1} + (1-x)a_{2j_1}$$

$$z = xa_{1j_2} + (1-x)a_{2j_2}$$

doğrularının kesişiminden x^* ve v değerleri elde edilir. Oyun değeri $II.$ oyuncunun j_1 ve $j_2$stratejilerine bağlı oluştuğundan $II.$ oyuncunun bu stratejiler dışındaki stratejileri oynama olasılığı sıfırdır. O halde indirgenmiş olan oyunun getiri matrisi

$$\begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Örnek 2.5.1. Getiri matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

ile verilmiş olan oyun için, oyuncuların optimal stratejilerini ve oyun değerini bulunuz.

Çözüm $I.$ oyuncunun optimal karma stratejisi $x^* = (x_1, x_2)$, $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi $y^* = (y_1, y_2, y_3)$ ve oyun değeri v olsun. $x_1 = x$ alındığında $x_2 = (1-x)$ olur. O halde $x^* = (x, 1-x)$ dir.

$$x^*A \geq v$$

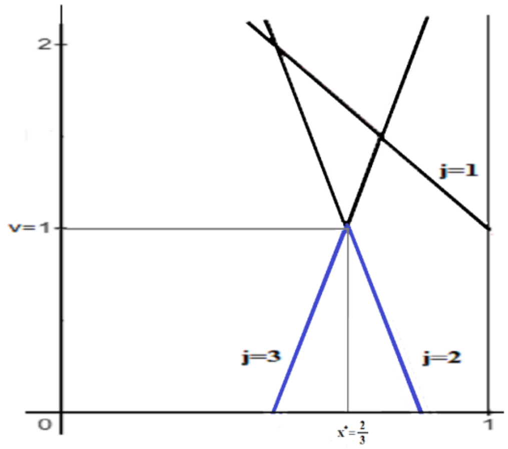
den

$j = 1$ için $E(x, II_1) = xa_{11} + (1-x)a_{21} = x(1) + (1-x)(3) = -2x + 3 \geq v$

$j = 2$ için $E(x, II_2) = xa_{12} + (1-x)a_{22} = x(-1) + (1-x)(5) = -6x + 5 \geq v$

$j = 3$ için $E(x, II_3) = xa_{13} + (1-x)a_{23} = x(3) + (1-x)(-3) = 6x - 3 \geq v$

oluşan bu 3 doğruya ait grafik Şekil 1.'de gösterilmiştir.



Şekil 1. II. oyuncunun j_1,j_2 ,j_3 stratejileri

Bu eşitsizliklerin sağladığı bölge şekilde görülmektedir. v maksimum değerine, bölgenin alt kısmında oluşan üst sınırda $-6x+5=v$ ve $6x-3=v$ doğrularının kesişim noktasında ulaşmaktadır. Bu iki doğrunun kesişiminden $x=\frac{2}{3}$ ve $v=E(x^*,3)=E(x^*,2)=1$ olarak bulunur. Böylece I. oyuncunun optimal karma stratejisi $x^*=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ şeklinde olur. Böylelikle I. oyuncu II. oyuncunun oyun şekline bağlı kalmadan $v=1$ oyun değerini garantilemiştir. Şimdi II. oyuncu için en uygun stratejiyi bulabiliriz çünkü I. oyuncu, II.oyuncunun $j=2$ ve $j=3$ stratejileri ile elde edilen doğruların kesişimi ile optimal çözüme ulaşır.

Böylece A matrisi, aynı oyun değerini veren $2x2$ −lik

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

matrisine indirgenmiş olur. II. oyuncunun optimal karma stratejisi $y^*=(0,y_2,1-y_2)$ dir. O halde ;

$$E(I_1,Y)=-1y_2+3(1-y_2)=3-4y_2\leq v$$

$$E(I_2,Y)=5y_2-3(1-y_2)=8y_2-3\leq v$$

Buradan II. oyuncunun optimal karma stratejisi $y^*=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ elde edilir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
ARALIK DEĞERLİ MATRİS OYUNLAR

3.1. Aralık Sayıları

Matris oyunlarında karar verme sistemlerindeki belirsizlikleri modellemede aralık sayıları yaygın olarak kullanılmaktadır. Burada matrisin elemanlarına karşılık gelen kesin değerler yerine aralıklar alınmaktadır. Böylelikle klasik anlamdaki matris oyunları daha genel bir duruma genişletilerek çözümler yapılmaktadır. Aralık matrisleri ile ilgili tanımlar, teoremler ve kavramlar (Ganesan, 2007; Moore, 1979; Nayak ve Pal; 2006; Sengupta ve Pal, 2009) çalışmalarından alınmıştır.

Tanım 3.1.1. $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\tilde{a} = [a_1, a_2] = \{x \in \mathbb{R}: a_1 \leq x \leq a_2\}$$

olarak tanımlanan kümeye $\mathbb{R}$ üzerinde bir aralık sayısı denir.

$\tilde{a}$ aralık sayısı reel sayıların bir alt kümesidir. $a_1$ve a_2 reel sayıları $\tilde{a}$ aralık sayısının, sırasıyla, alt ve üst değerleridir. Özel olarak eğer $a_1 = a_2 = a$ seçilirse, $\tilde{a}$ aralık sayısı bir $\tilde{a} = [a, a] = a$ reel sayısına indirgenmiş olur. Dolayısıyla reel sayılar, aralık sayılarının özel bir hali olarak ifade edilebilir. $\mathbb{R}$ üzerindeki tüm aralık sayılarının kümesi $\mathbb{R}^i$ ile gösterilsin.

Tanım 3.1.2. $\tilde{a} \in \mathbb{R}^i$ olmak üzere bir aralık sayısının genişliği, yarıçapı ve mutlak değeri sırasıyla

$$m(\tilde{a}) = \frac{a_1 + a_2}{2}, \qquad \omega(\tilde{a}) = \frac{a_2 - a_1}{2}, \qquad |\tilde{a}| = \max\{|a_1|, |a_2|\}$$

şeklinde tanımlanır. Öte yandan bir $\tilde{a}$ aralık sayısı genişlik ve yarıçap kavramları yardımıyla

$$\tilde{a} = [m(\tilde{a}) - w(\tilde{a}), m(\tilde{a}) + w(\tilde{a})]$$

şeklinde de gösterilebilir.

Tanım 3.1.3. $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ ve $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ iki aralık sayısı olsun. Eğer,

$$a_1 = b_1 \text{ ve } a_2 = b_2$$

ise $\tilde{a}$ aralık sayısı, $\tilde{b}$ aralık sayısına eşittir denir ve $\tilde{a} = \tilde{b}$ ile gösterilir. Reel sayılar üzerinde tanımlı temel cebirsel işlemler $\mathbb{R}^i$ kümesi üzerinde aşağıdaki tanım ile verilir.

Tanım 3.1.4. $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}^i$ olsun. O halde,

1. $\tilde{a} + \tilde{b} \coloneqq [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$

2. $\tilde{a} - \tilde{b} \coloneqq [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$

3. $\tilde{a}.\tilde{b} \coloneqq [\min S, \max S], S = \{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}$

4. $\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \coloneqq [\min K, \max K], K = \{(\frac{a_1}{b_1}), (\frac{a_1}{b_2}), (\frac{a_2}{b_1}), (\frac{a_2}{b_2})\}$

5. $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ olmak üzere $\alpha\tilde{a} = \begin{cases} [\alpha a_1, \alpha a_2], \alpha \geq 0 \\ [\alpha a_2, \alpha a_1], \alpha < 0 \end{cases}$

Not 3.1.5. $\tilde{a} \in \mathbb{R}^i$ ve $a_1 \neq a_2$ olmak üzere, $\tilde{a} - \tilde{a} \neq [0,0]$ ve $\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}} \neq [1,1]$ biçimindedir. Öte yandan $0 \in \tilde{a} - \tilde{a}$ ve $\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}}$ tanımlı olduğunda $1 \in \frac{\tilde{a}}{\tilde{a}}$ dır.

Örnek 3.1.6. $\tilde{a} = [-1,2]$ ve $\tilde{b} = [3,5]$ aralık sayılarını göz önüne alalım. O halde,

$$\begin{aligned}
\tilde{a} + \tilde{b} &= [-1,2] + [3,5] = [2,7] \\
\tilde{a} - \tilde{b} &= [-1,2] - [3,5] = [-6,-1] \\
\tilde{a}\tilde{b} &= [-1,2][3,5] = [-5,10] \\
\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} &= [-1,2]\frac{1}{[3,5]} = [-1,2]\left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right] = \left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right] \\
\tilde{a} - \tilde{a} &= [-1,2] - [-1,2] = [-3,3] \neq [0,0] \\
\frac{\tilde{b}}{\tilde{b}} &= [3,5]\frac{1}{[3,5]} = [3,5]\left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right] = \left[\frac{3}{5},\frac{5}{3}\right] \neq [1,1]
\end{aligned}$$

Teorem 3.1.7. $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{R}^i$ olsun. O halde,

1. $\tilde{a} + \tilde{b} = \tilde{b} + \tilde{a}$

2. $(\tilde{a} + \tilde{b}) + \tilde{c} = \tilde{a} + (\tilde{b} + \tilde{c})$

3. $x + \tilde{a} = \tilde{a} + x = \tilde{a}, \ \ x = [0,0]$

4. $\tilde{a}.\tilde{b} = \tilde{b}.\tilde{a}$

5. $(\tilde{a}.\tilde{b}).\tilde{c} = \tilde{a}.(\tilde{b}.\tilde{c})$

6. $x.\tilde{a} = \tilde{a}.x = \tilde{a}, \ \ x = [1,1]$

3.2. Aralık Sayılarının Sıralanması

İki aralığın sıralanması önemli bir kavramdır. Moore (1979) ayrık iki aralığı sıralayabilmek için iki sıralama bağıntısı tanımlamıştır. Bunlardan ilki $\mathbb{R}$ üzerinde bilinen "<'' sıralama bağıntısının aralıklar üzerine genelleştirilmesi olan

$$\tilde{a} < \tilde{b} \Leftrightarrow a_2 < b_1$$

bağıntısıdır. $\tilde{a} < \tilde{b}$ ile $\tilde{a}$ aralığının $\tilde{b}$ aralığından kesinlikle küçük olduğu ifade edilir. Diğer bir bağıntı $\tilde{a}$ aralığının $\tilde{b}$ aralığı tarafından kapsanması anlamına gelen ve aşağıdaki şekilde tanımlanan "⊆" bağıntısıdır.

$$\tilde{a} \subseteq \tilde{b} \Leftrightarrow b_1 \leq a_1 \text{ ve } a_2 \leq b_2$$

Ancak dikkat edilecek olursa bu bağıntılar örtüşen aralıkları sıralamada yetersiz olduğundan Ishibuchi ve Tanaka (1990) farklı sıralama bağıntıları tanımlamışlardır. Bu bağıntılar alt ve üst sınırlar yardımıyla

i) $\tilde{a} <_{UL} \tilde{b} \Leftrightarrow a_1 \leq b_1$ ve $a_2 \leq b_2$

ii) $\tilde{a} <_{UL} \tilde{b} \Leftrightarrow \tilde{a} \leq_{UL} \tilde{b}$ ve $\tilde{a} \neq \tilde{b}$

şeklinde tanımlanırken orta nokta ve yarıçap yardımıyla

iii) $\tilde{a} <_{UL} \tilde{b} \Leftrightarrow m(\tilde{a}) \leq m(\tilde{b})$ ve $w(\tilde{b}) \leq w(\tilde{a})$

iv) $\tilde{a} < \tilde{b} \Leftrightarrow \tilde{a} < \tilde{b}$ ve $\tilde{a} \neq \tilde{b}$

şeklinde tanımlanmıştır. Ancak bu bağıntılar da aralık sayılarını tam olarak sıralamamaktadır. Bu nedenle iki aralık sayısını sıralayabilecek en genel bağıntıya ulaşabilmek için çalışmalar devam etmiştir. Daha sonra Sengupta ve vd. (2001), Sengupta ve Pal (2009) çalışmalarında aralık sayılarının karşılaştırılmasıyla ilgili olarak uygunluk fonksiyonu kavramını ortaya koymuşlardır. Bu kavram yardımıyla herhangi iki aralık sayısının sıralanması mümkündür.

Tanım 3.2.1. $\phi: \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^i \to [0, \infty)$ olsun. $\omega(\tilde{a}) + \omega(\tilde{a}) \neq 0$ olmak üzere

$$\phi\left(\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b}\right) = \frac{m\left(\tilde{b}\right) - m(\tilde{a})}{\omega(\tilde{a}) + \omega\left(\tilde{b}\right)}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona uygunluk fonksiyonu denir.

$m(\tilde{b}) \geq m(\tilde{a})$ için $\phi(\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b})$ sayısı, $\tilde{b}$ nin $\tilde{a}$ dan büyüklüğünün derecesi olarak tanımlanır. ϕ nin tanımından

$$\phi(\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b}) = \begin{cases} 0, & m(\tilde{a}) = m(\tilde{b}) \\ 0 < \phi(\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b}) < 1, & m(\tilde{a}) < m\left(\tilde{b}\right) \text{ ve } a_2 > b_1 \\ \geq 1, & m(\tilde{a}) < m\left(\tilde{b}\right) \text{ ve } a_2 \leq b_1 \end{cases}$$

yazılır. Eğer,

1. $\phi\left(\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b}\right) = 0$ ise kesinlikle $\tilde{a}$ nin $\tilde{a}$ den küçük olduğu söylenemez.
2. $0 < \phi\left(\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b}\right) < 1$ ise $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ den 0 ve 1 arasında bir derece ile küçüktür.
3. $\phi\left(\tilde{a} \prec \tilde{b}\right) \geq 1$ ise $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ den küçüktür.

Örnek 3.2.2. $\tilde{a} = [-8, -4]$ ve $\tilde{b} = [3,7]$ aralık sayılarını uygunluk fonksiyonu yardımıyla sıralayınız.

$$m(\tilde{a}) = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{(-8) + (-4)}{2} = -6\,, \qquad w(\tilde{a}) = \frac{a_2 - a_1}{2} = \frac{-4 - (-8)}{2} = 2$$

$$m\left(\tilde{b}\right) = \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5\,, \qquad w\left(\tilde{b}\right) = \frac{b_2 - b_1}{2} = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

aralıkların orta noktaları ve yarıçapları göz önüne alındığında,

$$\phi(\tilde{a} \prec \tilde{b}) = \frac{m(\tilde{b}) - m(\tilde{a})}{\omega(\tilde{a}) + \omega(\tilde{b})} = \frac{2-(-6)}{2+5} = \frac{8}{7} > 1$$

olduğundan, $\tilde{a}$ aralığı $\tilde{b}$ aralığından küçüktür.

Tanım 3.2.3. $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}^i$ olsun. O halde, iki aralık sayısının kesişimi ve birleşimi sırasıyla,

$$\tilde{a} \cap \tilde{b} = [\max\{a_1, b_1\}\ , \min\{a_2, b_2\}]$$

$$\tilde{a} \cup \tilde{b} = [\min\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}]$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\tilde{b} < \tilde{a}$ veya $\tilde{a} < \tilde{b}$ ise $\tilde{a} \cap \tilde{b} = \emptyset$ dir.

Tanım 3.2.4. $\tilde{d}: \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^i \to [0, \infty)$ olmak üzere $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}^i$ olsun. Bu durumda iki aralık sayı arasındaki uzaklık

$$\tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

şeklinde tanımlanır. $\tilde{d}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^i$ üzerinde bir metrik ve $(\mathbb{R}^i, \tilde{d})$ bir metrik uzaydır.

Özel olarak $\tilde{a} = [a, a]$ ve $\tilde{b} = [b, b]$ seçilirse $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriği

$$\tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{b}) = |a - b|$$

elde edilir.

Örnek 3.2.5. $\tilde{a} = [1,6]$ ve $\tilde{b} = [3,7]$ olsun.

$d(\tilde{a}, \tilde{b}) = \max\{|1-3|, |6-7|\} = \max\{2,1\} = 2$

Önerme 3.2.6. $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}^i$ olsun. O halde,

1. $m(\tilde{a} \mp \tilde{b}) = m(\tilde{a}) \mp m(\tilde{b})$

2. $w(\tilde{a} \mp \tilde{b}) = w(\tilde{a}) \mp w(\tilde{b})$

3. $m(\tilde{a}\tilde{b}) = m(\tilde{a})m(\tilde{b})$

4. $w(\tilde{a}\tilde{b}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{a} = 0$ ya da $\tilde{b} = 0$.

5. $m\left(\alpha\tilde{a}+\beta\tilde{b}\right)=\alpha m(\tilde{a})+\beta m(\tilde{b})$

6. $w\left(\alpha\tilde{a}+\beta\tilde{b}\right)=|\alpha|m(\tilde{a})+|\beta|m\left(\tilde{b}\right),\alpha,\beta\epsilon\mathbb{R}.$

İspat

$$\begin{aligned} m\left(\tilde{a}+\tilde{b}\right)=m([a_1,a_2]+[b_1,b_2]) &= m([a_1+b_1,a_2+b_2]) \\ &= \frac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2} \\ &= \frac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2} \\ &= \frac{a_1+a_2}{2}+\frac{b_{1+}b_2}{2} \\ &= m(\tilde{a})+m(\tilde{b}) \end{aligned}$$

Teorem 3.2.7. $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\in\mathbb{R}^i$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $\tilde{a}+\tilde{b}=\tilde{b}+\tilde{a}$

2. $\tilde{a}\tilde{b}=\tilde{b}\tilde{a}$

3. $\tilde{a}+(\tilde{b}+\tilde{c})=(\tilde{a}+\tilde{b})+\tilde{c}$

4. $\tilde{a}.(\tilde{b}.\tilde{c})=(\tilde{a}.\tilde{b}).\tilde{c}$

5. $\tilde{a}(\tilde{b}+\tilde{c})\subseteq\tilde{a}\tilde{b}+\tilde{a}\tilde{c}$

Teorem 3.2.8. $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\in\mathbb{R}^i$ olmak üzere,

$$\tilde{a}+\tilde{c}=\tilde{b}+\tilde{c}\Rightarrow\tilde{a}=\tilde{b}$$

biçimindedir.

İspat $\tilde{a}+\tilde{c}=\tilde{b}+\tilde{c}$ olsun. O halde,

$$[a_1,a_2]+[c_1,c_2]=[b_1,b_2]+[c_1,c_2]$$

$$[a_1+c_1,a_2+c_2]=[b_1+c_1,b_2+c_2]$$

buradan $a_1+c_1=b_1+c_1$ ve $a_2+c_2=b_2+c_2$ olur. $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbb{R}$ olduğundan reel sayıların kısaltma özelliğinden, $a_1=b_1$ ve $a_2=b_2$ olur. O halde $\tilde{a}=\tilde{b}$ olur.

Teorem 3.2.9. $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\in\mathbb{R}^i$ olsun. $\tilde{c}\tilde{a}=\tilde{c}\tilde{b}$ ise $\tilde{a}=\tilde{b}$ eşitliği her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 3.2.10. $\tilde{a} = [0,1]$, $\tilde{b} = [1,1]$, $\tilde{c} = [0,2]$ aralık sayılarını alalım.

$$\tilde{c}\tilde{a} = [0,2][0,1] = [0,2]$$

$$\tilde{c}\tilde{b} = [0,2][1,1] = [0,2]$$

$\tilde{c}\tilde{a} = \tilde{c}\tilde{b}$ iken $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ olduğu bu örnekle görülmüş olur.

Tanım 3.2.11. $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ aralık sayısı olsun. Eğer,

$$a_1 = -a_2$$

ise $\tilde{a}$ aralık sayısına simetrik aralık denir. Örneğin $[-2,2]$ bir simetrik aralıktır.

Tanım 3.2.12. Elemanları aralık sayılar olan matrise aralık matrisi denir.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} = (\tilde{a}_{ij})_{(mxn)}$$

şeklinde ifade edilir. Bütün (mxn) lik aralık matrislerin kümesi $\mathbb{R}^{i}_{\mathrm{mxn}}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.13. $\tilde{A}$ aralık matrisinin orta noktası ve yarıçapı

$$m(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} m(\tilde{a}_{11}) & \cdots & m(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m(\tilde{a}_{m1}) & \cdots & m(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix}, \qquad w(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} w(\tilde{a}_{11}) & \cdots & w(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w(\tilde{a}_{m1}) & \cdots & w(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix}$$

dır.

Tanım 3.2.14. $\tilde{A}$ aralık matrisinin $m(\tilde{A}) = 0$ ise $\tilde{A}$ aralık matrisine sıfır aralık matrisi denir.

$m(\tilde{A}) = w(\tilde{A}) = 0$ olarak seçildiğinde sıfır aralık matrisi

$$\tilde{0} = \begin{bmatrix} \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \end{bmatrix}$$

dir.

Tanım 3.2.15. $\tilde{A}$ aralık matrisinin $m(\tilde{A}) = I$ ise $\tilde{A}$ aralık matrisine birim aralık matrisi denir. $m(\tilde{A}) = I$ ve $w(\tilde{A}) = 0$ olarak seçildiğinde birim aralık matris

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} \tilde{1} & \cdots & \tilde{1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{1} & \cdots & \tilde{1} \end{bmatrix}$$

dir.

Önerme 3.2.16. $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}^i_{nxn}$ olmak üzere,

1. $m(\tilde{A} + \tilde{B}) = m(\tilde{A}) + m(\tilde{B})$ ve $w(\tilde{A} + \tilde{B}) = w(\tilde{A}) + w(\tilde{B})$
2. $m(\tilde{A} - \tilde{B}) = m(\tilde{A}) - m(\tilde{B})$ ve $w(\tilde{A} - \tilde{B}) = w(\tilde{A}) + w(\tilde{B})$
3. $m(\tilde{A}\tilde{B}) = m(\tilde{A})m(\tilde{B})$

Aralık sayılarında olduğu gibi aralık matrislerinde de temel cebirsel işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.2.17. $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}^i, \tilde{x} \in \mathbb{R}^i$ bir aralık vektörü ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

1. $\alpha\tilde{A} = (\alpha\tilde{a}_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$
2. $(\tilde{A} + \tilde{B}) = (\tilde{a}_{ij} + \tilde{b}_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$
3. $(\tilde{A} - \tilde{B}) = (\tilde{a}_{ij} - \tilde{b}_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$
4. $\tilde{A}\tilde{B} = \sum_{k=1}^{n}(\tilde{a}_{ik}\tilde{b}_{kj})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$
5. $\tilde{A}\tilde{x} = \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j\right)_{1\leq i\leq m}$

dır.

Tanım 3.2.18. $m(\tilde{A}) = m(\tilde{B})$ ise $\tilde{A}$ matrisi $\tilde{B}$ matrisine denk denir. $\tilde{A} \approx \tilde{B}$ ile ifade edilir.

Tanım 3.2.19. $m(\tilde{A}) = m(\tilde{B})$ ve $w(\tilde{A}) = w(\tilde{B})$ ise $\tilde{A}$ matrisi $\tilde{B}$ matrisine eşittir denir. $\tilde{A} = \tilde{B}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.20. $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{i}_{\mathrm{nxn}}$ ve $\tilde{A}$ matrisinin kofaktörü $\tilde{C}_{ij}$ olmak üzere $\tilde{A}$ matrisinin determinantı

$$\mathrm{det}\tilde{A} = |\tilde{A}| = \sum \tilde{a}_{ij}\tilde{C}_{ij}$$

dır. Aralık matrislerin determinantının hesaplanması da klasik anlamdaki matrislerin determinant hesabı gibi yapılır. Ancak aralık matrisin determinantı bir aralık sayısıdır.

Örnek 3.2.21.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [2,3] & [-1,3] & [-5,-2] \\ [4,9] & [6,4] & [3,5] \\ [-3,1] & [-4,4] & [2,7] \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\mathrm{det}\tilde{A}$ bulunuz.

$$det\tilde{A} = [2,3]\begin{vmatrix} [6,4] & [3,5] \\ [-4,4] & [2,7] \end{vmatrix} - [-1,3]\begin{vmatrix} [4,9] & [3,5] \\ [-3,1] & [2,7] \end{vmatrix} + [-5,-2]\begin{vmatrix} [4,9] & [6,4] \\ [-3,1] & [-4,4] \end{vmatrix}$$

$$= [-36,186] - [-78,234] + [-270,210] = [-540,474]$$

olarak bulunur.

Tanım 3.2.22. $\tilde{A}$ tersinir bir kare aralık matrisi olsun. O halde $\tilde{A}$ aralık matrisinin tersi

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(\tilde{A})}{|\tilde{A}|}, (|\tilde{A}| \neq \tilde{0})$$

dir.

3.3. Aralık Ödemeli Matris Oyunları

Klasik anlamda bildiğimiz matrislerin elemanlarının aralıklar seçilmesiyle elde edilen matrislere aralık matrisler denir. Aralık ödemeli matris oyunlar, klasik matris oyunların bir kapsamı olarak düşünülebilir. Aralık oyununun gidişatı $I.$ oyuncunun kazancını maksimize etme isteğiyle belirlenir. Girdileri aralık sayılar olan matris

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{m1}, b_{m1}] & [a_{m2}, b_{m2}] & \cdots & [a_{mn}, b_{mn}] \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $I.$oyuncu getirilerini maksimalleştirmeye çalışırken $II.$ oyuncu da getirilerini minimalleştirmeye çalışacaktır. $I.$ oyuncu i pür stratejisini $II.$ oyuncu da j pür stratejisini seçerek oyunu oynadıklarında $I.$ oyuncunun getirisi $[a_{ij}, b_{ij}]$ olarak belirlenir.

Tanım 3.3.1. Getiri matrisi $\tilde{A}_{(\mathrm{mxn})}$ olan aralık ödemeli matris oyunun saf stratejiler sınıfındaki

$$V_r(P) = \max_{i=1,2,..,m} \min_{j=1,2,..,n} [a_{ij}, b_{ij}]$$

değerine oyunun alt değeri

$$V_c(P) = \min_{j=1,2,..,n} \max_{i=1,2,..,m} [a_{ij}, b_{ij}]$$

değerine oyunun üst değeri denir. Alt ve üst değerlerin eşit olduğu

$$V_r(P) = V_c(P) = [a_{kr}, b_{kr}] = v$$

(k, r) durumunda aralık ödemeli matrislerin saf stratejiler sınıfında denge noktası mevcuttur ve $v = [a_{kr}, b_{kr}]$ aralığı oyunun saf stratejiler sınıfındaki oyun değeridir.

Teorem 3.3.2. Getiri matrisi

$$\tilde{A}_{(\mathrm{mxn})} = \left([a_{ij}, b_{ij}]\right); i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n$$

ile verilen iki kişilik bir aralık oyunu için

$$\max_i \min_j [a_{ij}, b_{ij}] \leq \min_j \max_i [a_{ij}, b_{ij}]$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 3.3.3. Getiri matrisi

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [-2,2] & [2,4] \\ [0,3] & [-3,0] \end{bmatrix}$$

olan matris oyununun denge noktasının varlığını inceleyelim.

$$\max_i \min_j [a_{ij}, b_{ij}] = [-2,2] \neq [0,3] = \min_j \max_i [a_{ij}, b_{ij}]$$

eşitlik söz konusu olmadığından dolayı denge noktası yoktur. Yani saf stratejiler sınıfında oyunun değeri mevcut değildir bu noktada aralık ödemeli matris oyunlarının karma stratejiler sınıfından bahsetmek uygun olacaktır.

Tanım 3.3.4. Getiri matrisi $\tilde{A}_{(\mathrm{mxn})}$ olan aralık ödemeli oyunun I. oyuncu için karma stratejiler kümesi,

$$X = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0\,, i = 1,2,\dots,m\,, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right\}$$

II. oyuncu için karma stratejiler kümesi,

$$Y = \left\{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_j \geq 0\,, j = 1,2,\dots,n\,, \sum_{i=1}^{n} y_j = 1\right\}$$

dir.

I. oyuncu için X bir karma strateji ve II. oyuncu için Y bir karma strateji olmak üzere, oyuncular bu karma stratejileri ile oyunu oynadıklarında oyunun beklenen getirisi

$$E(x,y) = x\tilde{A}y^T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i [a_{ij}, b_{ij}] y_j$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.5. Getiri matrisi $\tilde{A}_{(\mathrm{mxn})}$ olan aralık ödemeli oyunun karma stratejiler sınıfında

$$V_r(M) = \max_X \min_Y E(X, Y)$$

değerine oyunun alt değeri

$$V_c(M) = \min_Y \max_Y E(X, Y)$$

değerine oyunun üst değeri denir.

Oyunun alt ve üst değerlerinin eşit olması

$$V_r(M) = \max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y) = V_c(M) = v$$

durumda elde edilen değere karma stratejiler sınıfında oyun değeri adı verilir.

Tanım 3.3.6. Getiri matrisi $\tilde{A}_{(\mathrm{mxn})}$ olan aralık ödemeli oyunun

$$\min_y E(x^*, y) = \max_x \min_y E(x, y) = v$$

$x^* \in X$ stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi

$$\max_x E(x, y^*) = \min_y \max_x E(x, y) = v$$

$y^* \in Y$ stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisidir.

Tanım 3.3.7. $x^* \in X$ stratejisine I. oyuncunun optimal stratejisi, $y^* \in Y$ stratejisine II. oyuncunun optimal stratejisi ve v oyunun oyun değeri olsun. O halde (x^*, y^*, v) üçlüsüne aralık ödemeli matris oyunun çözümü denir.

Teorem 3.3.8. Getiri matrisi $\tilde{A}_{(\text{mxn})}$ ile verilen iki kişilik bir aralık matrisi ve (x^*, y^*, v) üçlüsü de bu aralık matris oyununun bir çözümü olsun. Oyuncuların stratejileri saf stratejiler olmak üzere,

1. $X\tilde{A}_j = \sum_{i=1}^{m} x_i [a_{ij}, b_{ij}] = v \ , j = 1,2, \dots, n$
2. $_i\tilde{A}Y^T = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}, b_{ij}] y_j = v \ \ , i = 1,2, \dots, m$

dir.

3.4. 2x2-lik Aralık Ödemeli Matris Oyunlar

Getiri matrisi $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] \end{bmatrix}$ ile verilen matris oyununun saf stratejiler sınıfında bir çözümünün olmadığını kabul edelim. Dolayısıyla saf stratejiler sınıfında oyun değeri mevcut olmadığından karma stratejiler sınıfına geçiş yapılır ve karma stratejiler sınıfında oyun değeri aranır. Bu durumda $0 < x^*, y^* < 1$ olmak üzere $X^* = (x^*, 1 - x^*)$ $I.$ oyuncunun, $Y^* = (y^*, 1 - y^*)$ $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi olsun. O halde $I.$ oyuncu X^*, $II.$ oyuncu Y^* optimal karma stratejisi ile oynadığında oyunun getirisi

$$v = E(x, y) = x\tilde{A}y^T = (x, 1 - x) \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 - y \end{pmatrix}$$

dir.

Getiri matrisi

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] \end{bmatrix}$$

ile verilen iki kişilik sıfır toplamlı oyunda oyuncuların optimal stratejileri pür stratejiler olmadığını varsayalım. O halde, $I.$ oyuncunun optimal karma stratejisi $x = (x, 1 - x)$ olmak üzere

$$[a_{11}, b_{11}]x + [a_{21}, b_{21}](1 - x) = [a_{12}, b_{12}]x + [a_{22}, b_{22}](1 - x)$$

eşitliğinden

$$a_{11}x + a_{21}(1-x) = a_{12}x + a_{22}(1-x)$$

$$b_{11}x + b_{21}(1-x) = b_{12}x + b_{22}(1-x)$$

yazılır. Her iki eşitlikte de x yalnız bırakılırsa

$$x = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{21} - b_{12} + b_{22}}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi $y = (y, 1-y)$ olmak üzere

$$y = \frac{b_{22} - b_{12}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}} \text{ve} \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

olur.

Teorem 3.4.1. Getiri matrisi $\tilde{A}_{2x2}$-lik ile verilen matris oyununda x^* ve y^*sırasıyla I ve $II.$ oyuncunun keyfi optimal karma stratejileri olsun. Bu durumda oyun değeri

$$v(A) = E(x,y) = \left[\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}}\right]$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek 3.4.2. Getiri matrisi,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [0,1] & [5,6] \\ [3,4] & [1,2] \end{bmatrix}$$

ile verilen matris oyununun çözümünü bulunuz.

Çözüm Oyunun saf stratejiler sınıfında çözümü yoktur. Ancak karma stratejiler sınıfında çözümü mevcuttur. O halde, $I.$ oyuncu x, $II.$ oyuncu y optimal karma stratejisi ile oynasın. Bu durumda $I.$oyuncunun kazancı en az v kadar olurken $II.$ oyuncunun kaybı da en fazla v kadar olmaktadır. $I.$ oyuncunun $x^* = (x, 1-x)$ karma stratejisi

$$x^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}} = \left(\frac{1-3}{0-3-5+1} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}\right)$$

$$= (1-x) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

buradan $x^* = (x, 1-x) = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$ bulunur. II. oyuncunun $y^* = (y, 1-y)$ karma stratejisi,

$$y^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{1-5}{0-5-3+1} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

$$(1-y) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

buradan $y^* = (y, 1-y) = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$ bulunur. Oyuncular optimal olan stratejilerini kullandıkları durumda ortaya çıkan oyun değeri

$$v(A) = E(x^*, y^*) = \left[\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}\right] = \left[\frac{15}{7}, \frac{22}{7}\right]$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda oyunun çözüm üçlüsü

$$(x^*, y^*, v) = \left(\left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right), \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right), \left[\frac{15}{7}, \frac{22}{7}\right]\right)$$

dir.

3.5. 2xn Boyutlu Aralık Ödemeli Matris Oyunların Grafik Yöntem İle Çözümü

Bu yöntem getiri matrisinin 2xn ya da mx2 boyutlu olduğu denge noktası olmayan aralık ödemeli matris oyunlar için kullanılır. Getiri matrisi 2xn boyutlu denge noktası olmayan aralık ödemeli matris oyununu ele alalım.

$I.$ oyuncu $x = (x, 1 - x)$ karma, $II.$ oyuncu herhangi bir saf stratejisi ile oynadığında oyunun getirisi,

$$E(x, II_j) = x\tilde{A}_j = (x, 1 - x)\begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \end{bmatrix}$$

$$x[a_{1j}, b_{1j}] + (1 - x)[a_{2j}, b_{2j}], j = 1,2, \dots, n$$

$$[a_{1j} - b_{2j}, b_{1j} - a_{2j}]x + [a_{2j}, b_{2j}], j = 1,2, \dots, n$$

dir.

$$\alpha_j(x) = [a_{1j} - b_{2j}, b_{1j} - a_{2j}]x + [a_{2j}, b_{2j}], j = 1,2, \dots, n$$

fonksiyonu olarak ifade edersek j değerlerine karşılık $\alpha_j(x)$ fonksiyonu da birer doğru belirtir. Yani $II.$ oyuncunun saf stratejilerini birer doğru belirtmiş olur. $I.$ oyuncu kazancını artırırken $II.$ oyuncu da kaybını minimalleştirecektir. O halde

$$\min_j \ \alpha_j(x)$$

ifadesi $II.$ oyuncunun kayıplarının üst sınırını ifade eder.

$II.$ oyuncunun saf stratejilerine karşılık olan her bir doğrunun birleşimi

$$\min_j \ \alpha_j(x)$$

dir.

Oyunun değeri ise bu doğruların oluşturduğu eğrinin en üst noktasını vermektedir. Bu üst nokta $I.$ oyuncu için optimal karma stratejiyi yani $x^* = (x, 1 - x)$ dir. Aynı şekilde ikinci oyuncu için optimal karma strateji elde edilebilir.

Örnek 3.5.1. Getiri matrisi

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [1,3] & [3,5] & [0,2] & [2,4] \\ [3,5] & [0,2] & [1,3] & [-1,1] \end{bmatrix}$$

ile verilen aralık matrisli oyunun çözümünü grafik yöntem kullanarak bulunuz.

Çözüm

$$\max_X \min_Y [a_{ij}, b_{ij}] \neq \min_Y \max_X [a_{ij}, b_{ij}]$$

Olduğundan dolayı denge noktası mevcut değildir. Bu durumda I. oyuncu karma stratejisi yani $x = (x, 1-x)$ ve II. oyuncu herhangi bir j saf stratejisini seçsin. O halde I. oyuncu için beklenen getiri,

$$E(x, II_j) = x\tilde{A}_j = (x, 1-x) \begin{bmatrix} [1,3] & [3,5] & [0,2] & [2,4] \\ [3,5] & [0,2] & [1,3] & [-1,1] \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$j = 1$ için $\alpha_1(x) = [1,3]x + [3,5](1-x) = [1,3]x + [3,5] + [3,5](-x)$

$$= [x, 3x] + [3,5] + [-5x, -3x] = [-4x + 3,5]$$

$j = 2$ için $\alpha_2(x) = [3,5]x + [0,2](1-x) = [3x, 5x] + [0,2] + [-2x, 0] = [x, 5x + 2]$

$j = 3$ için $\alpha_3(x) = [0,2]x + [1,3](1-x) = [0,2x] + [1,3] + [-3x, -x]$

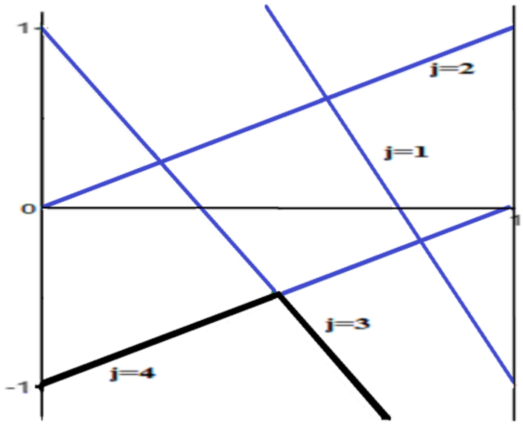
$$= [-3x + 1, x + 3]$$

$j = 4$ için $\alpha_4(x) = [2,4]x + [-1,1](1-x) = [2x, 4x] + [-1,1] + [-x, x]$

$$= [x - 1,5x + 1]$$

doğruları elde edilir.

$\min_{j=1,2,3,4} \alpha_j(x)$ ifadesi farklı doğruların birleşimini ifade eder. II. oyuncunun saf stratejilerine karşılık olan doğrular Şekil 2.'de gösterilmiştir.



Şekil 2. II. oyuncunun saf stratejilerine karşılık olan doğrular

Şekilde görüldüğü gibi doğruların alt kısmının en üst noktası $j = 3$ ve $j = 4$ doğrularının kesişimi ile elde edilir. O halde $\alpha_3(x) = \alpha_4(x)$ ifadelerinden $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ve $v = [\frac{-1}{2}, \frac{7}{2}]$

II. oyuncunun aktif stratejileri üçüncü ve dördüncü stratejileridir. Birinci ve ikinci stratejisini dikkate almayacaktır. Bu durumda II. oyuncu için optimal karma strateji

$y^* = (0,0, y_3, y_4)$ şeklinde olacaktır.

$$E(I_i, y) = v$$

eşitliğinden,

$$\begin{bmatrix} [0,2] & [2,4] \\ [1,3] & [-1,1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = v$$

olur.

$$[0,2]y + [2,4](1 - y) = [0,2y] + [2,4] + [-4y, -2y] = [-4y + 2,4]$$

$$[1,3]y + [-1,1](1 - y) = [y, 3y] + [-1,1] + [-y, y] = [-1,4y + 1]$$

doğruları elde edilmiş olur ve buradan II. oyuncunun optimal karma stratejisi

$y^* = (0,0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ dir. O halde oyunun çözüm üçlüsü

$(x^*, y^*, v) = \left(x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), y^* = \left(0,0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), [\frac{-1}{2}, \frac{7}{2}]\right)$ şeklindedir.

3.6. Aralık Ödemeli Simetrik Oyunlar

Simetrik oyunlar, getiri matrisine özgü niteliksel özellikler kullanılarak oluşan bir oyundur. Her iki oyuncu aynı sayıda saf stratejilere sahip oldukları için simetrik oyunların getiri matrisleri kare matris olmalıdır (Owen, 1995).

Tanım 3.6.1. Getiri matrisi $\tilde{A} = \left(\left[a_{ij}, b_{ij}\right]\right)_{(\mathrm{nxn})}$ ile verilen aralık değerli matris oyununda $\tilde{A}$ tersi simetrik matris ise bu oyuna aralık ödemeli simetrik matris oyun denir.

Teorem 3.6.2. $\tilde{A} = \left(\left[a_{ij}, b_{ij}\right]\right)_{(\mathrm{nxn})}$ getiri matrisli oyunda $v(\tilde{A}) = -v(-\tilde{A}^T\ )$ dir.

İspat.

$$
\begin{aligned}
v(\tilde{A}) = \min_{y}\max_{x} x^T\tilde{A}y \quad &= \quad -\left(-\min_{y}\max_{x} x^T\tilde{A}y\right) \\
&= \quad -\left(\max_{y}\left(-\max_{x} x^T\tilde{A}y\right)\right) = -\left(\max_{y}\min_{x}\left(-x^T\tilde{A}y\right)\right) \\
&= \quad -\left(\max_{y}\min_{x} y^T\left(-\tilde{A}^T\right)x\right) = -v(-\tilde{A}^T)
\end{aligned}
$$

Teorem 3.6.3. $\tilde{A} = \left(\left[a_{ij}, b_{ij}\right]\right)_{(\mathrm{nxn})}$ getiri matrisli herhangi bir simetrik oyunda $v(\tilde{A}) = 0$ dır.

İspat Getiri matrisi $\tilde{A} = \left(\left[a_{ij}, b_{ij}\right]\right)_{(\mathrm{nxn})}$ olan simetrik oyun verilmiş olsun. Teorem 3.6.2' ye göre $v(\tilde{A}) = -v(-\tilde{A}^T\ )$ olduğundan ve $\tilde{A} = -\tilde{A}^T$ olduğundan $v(\tilde{A}) = -v(\tilde{A})$ olur. Bu ise $v(\tilde{A}) = 0$ demektir.

Örnek 3.6.4. Getiri matrisi

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [0,0] & [-2,-1] & [3,4] \\ [1,2] & [0,0] & [1,5] \\ [-4,-3] & [-5,-1] & [0,0] \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen aralık ödemeli simetrik oyunun değerini bulunuz.

Çözüm Oyunun saf stratejiler sınıfındaki alt değeri

$$\max_{i=2}\min_{j=2}[a_{22}, b_{22}] = [0,0]$$

oyunun saf stratejiler sınıfındaki üst değeri

$$\min_{j=2}\max_{i=2}[a_{22}, b_{22}] = [0,0]$$

dir. Oyunun alt değeri ve üst değeri var ve bu değerler birbirine eşit olduğundan oyun değeri $v(\tilde{A}) = 0$ olur.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

ARALIK ÖDEMELİ MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİ VE OYUN DEĞERİ

Raghavan 1965 yılında yapmış olduğu çalışmasında pozitif kare matrislerin optimal stratejileri, öz değerleri ve özvektörleri arasındaki bazı ilişkileri incelemiştir. Daha sonra Weil 1968 yılındaki çalışmasında bir matrisin özdeğerleri ile oyun değeri arasında bir ilişkinin varlığını ortaya çıkarmıştır. Söz konusu çalışmalardan yararlanarak bu bölümde aralık ödemeli matrislerin özdeğerleri ve oyun değeri arasındaki ilişki incelenmiştir.

4.1. Matrislerin Özdeğerleri ve Oyun Değeri

Bu bölümde öncelikle (Raghavan, 1965; Weil, 1968) çalışmaları göz önüne alınarak klasik matrislerin özdeğerleri ve oyun değeri arasındaki ilişki ifade edilmiştir.

Tanım 4.1.1. $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{nxn}}, n \in \mathbb{R}$ matris ve $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü $Av = \lambda v$ olacak şekilde Av, v vektörünün bir skaler katı ise $v \in \mathbb{R}^n$ vektörüne A nın bir özvektörü ve $\lambda \in \mathbb{C}$ skalerine özdeğer denir.

$A,$ nxn lik bir matris ve α keyfi bir skaler olmak üzere oyun değeri ile negatif olmayan özvektörlere karşılık gelen reel özdeğerlere sahip sistemler arasındaki bağlantıyı sağlamak için getiri matrisi

$$M_\alpha = (A - \alpha I)$$

olan matris oyunu ele alınarak incelemeler yapılmıştır. Bu bağlamda getiri matrisi M_α olan oyunun değeri $v(M_\alpha)$ ile gösterilir.

x ve y sırasıyla I. ve II. oyuncunun optimal stratejileri ve $v(M_\alpha)$, M_α getiri matrisli oyunun değeri olsun. Bu durumda Tanım 2.3.6'ya göre

$$\left.\begin{array}{l} v(M_\alpha) \leq xM_\alpha \\ v(M_\alpha) \geq M_\alpha y \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

dir. M_α getiri matrisli oyunun değeri 0 ise (4.1) eşitsizliğinden

$$\left.\begin{array}{l} 0 \ \leq \ xM_\alpha \\ 0 \ \geq \ M_\alpha y \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

olur. (4.2) eşitsizliği x, y optimal stratejileri ve keyfi bir α skaleri için yazılabildiğinden α skaleri yerine A matrisinin reel özdeğeri λ alındığında

$$\left.\begin{array}{l} x(A - \lambda I) = 0 \\ (A - \lambda I)y = 0 \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

olur.

Teorem 4.1.2. A matrisi negatif olmayan özvektörlere karşılık gelen λ bir özdeğere sahipse,

$$v(M_\lambda) = v(A - \lambda I) = 0$$

olur. M_λ oyunu için x ve y stratejileri optimaldir.

İspat A kare matris ve A matrisinin negatif olmayan x, y özvektörlerine karşılık gelen özdeğeri λ olsun. O halde

$$\left.\begin{array}{l} xA = \lambda x \\ Ay = \lambda y \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

dir. I, nxn lik birim matris olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} xM_\lambda &= x(A - \lambda I) = 0 \\ M_\lambda y &= (A - \lambda I)y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

olur. Getiri matrisi M_λ olan oyunun değeri

$$v(M_\lambda) = \min_{\mathrm{y}} \max_{\mathrm{x}} M_\lambda y$$

olduğundan (4.5) denkleminden $v(M_\lambda) = 0$ olur.

Örnek 4.1.3. Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen matrisin negatif olmayan özvektörlerine karşılık gelen özdeğerleri ile oyun değeri arasındaki ilişkiyi ifade ediniz.

Çözüm A matrisinin özdeğerleri sırasıyla $\lambda = 5$ ve $\lambda = 10$ dur. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$\lambda = 10$ için $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = 5$ için $\begin{pmatrix} \frac{-1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$

dir. Negatif olmayan $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektörüne karşılık gelen $\lambda = 10$ özdeğeri için

$$M_\lambda = (A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. M_λ getiri matrisli oyunun saf stratejiler sınıfında bir oyun değeri yoktur. Ancak karma stratejiler sınıfındaki oyun değeri $v(M_\lambda) = 0$ ve oyun değerini veren karma stratejiler

$$x = (\frac{4}{5}, \frac{1}{5}), \qquad y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

dir. Dolayısıyla,

$$xM_\lambda = x(A - \lambda I) = 0$$

$$M_\lambda y = (A - \lambda I)y = 0$$

olduğundan x ve y stratejilerinin optimal olduğu görülür.

4.2. Aralık Ödemeli Matrislerin Özdeğerleri ve Oyun Değeri

Bu bölümde aralık ödemeli matrisler J. Rohn'un 1990 yılında yapmış olduğu çalışmasında aralık matrisleri için kullanmış olduğu gösterimi ile ele alınmıştır. Ayrıca özdeğer kavramının aralık ödemeli matrislere uygulanabilirliği incelenmiştir (Rohn, 1990,1993; Hladik ve vd., 2010). Bunun yanı sıra aralık ödemeli simetrik matrislerin özdeğerleri verilmiştir (Deif, 1991; Kaleyski, 2014). Son olarak, yapılan çalışmalar doğrultusunda aralık özdeğer kavramının oyun değeri ile ilişkisini veren bir yaklaşım ortaya konulmuştur.

Tanım 4.2.1.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{m1}, b_{m1}] & [a_{m2}, b_{m2}] & \cdots & [a_{mn}, b_{mn}] \end{bmatrix}$$

şeklinde olan aralık ödemeli matrisi her $i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n$ için $a_{ijL} \leq a_{ijR}$ olmak üzere,

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisleri yardımıyla

$$\tilde{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$$

olarak ifade edilir. Bundan dolayı,

$$A_c = \frac{\underline{A} + \overline{A}}{2}$$

$$\Delta A = \frac{\overline{A} - \underline{A}}{2}$$

olmak üzere bir $\tilde{A}$ aralık ödemeli matrisi bu matrisler yardımıyla

$$\tilde{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = [A_c - \Delta A, A_c + \Delta A]$$

şeklinde de ifade edilir.

Tanım 4.2.2. $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{i}_{\mathrm{nxn}}$ aralık ödemeli matris olmak üzere $A^S = \{A \in \tilde{A}: A = A^T\} \subseteq \tilde{A}$ kümesi simetrik aralık ödemeli matris olarak tanımlanır.

Tanım 4.2.3. $\tilde{A}$ bir aralık ödemeli matris ve

$$L = \{\lambda \in \mathbb{C}, Ax = \lambda x, x \neq 0, A \in \tilde{A}\}$$

kümesi aralık özdeğer kümesidir.

Teorem 4.2.4. $\tilde{A} = [A^c - \Delta A, A^c + \Delta A]$ reel simetrik aralık ödemeli bir matris, $S^i = \mathrm{diag}\left(\mathrm{sgn}(x_1^i), \dots, \mathrm{sgn}(x_n^i)\right), i = 1,2, \dots, n$ şeklinde bir diyagonal matris olsun. O halde, λ_i, $A \epsilon \tilde{A}$ nın özdeğeri ve $\lambda_i^I = \left[\lambda_i\left(A^c - S^i \Delta A S^i\right), \left(A^c + S^i \Delta A S^i\right)\right], i = 1,2, \dots, n$ dir.

Örnek 4.2.5.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [4,8] & [4,12] \\ [4,12] & [-10,-2] \end{bmatrix}$$

simetrik aralık ödemeli matrisinin özdeğerlerini bulunuz.

Çözüm $\tilde{A}$ simetrik aralık ödemeli matrisinin genişliği A^c ve yarıçap matrisi ΔA matrisleri sırasıyla,

$$A^c = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}, \Delta A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

dir. A^c matrisinin özdeğerleri $\lambda = 10, -10$ dur ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise $x^1 = (2,1)^T, x^2 = (1,-2)^T$ dir. Böylece bu vektörlerden $S^1 = (1,1), S^2 = (1,-1)$ olur. O halde $\tilde{A}$ matrisinin özdeğerleri

$$A^c + S^1 \Delta A S^1 = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda = 16, \lambda = -10$ olarak bulunur.

$$A^c S^1 - \Delta A S^1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -10 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda = 5.062, \lambda = -11{,}062$ dir.

$$A^c + S^2 \Delta A S^2 = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda = -3.403, \lambda = 9{,}403$ dir.

$$A^c S^2 - \Delta A S^2 = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -10 \end{bmatrix}$$

matrisin özdeğerleri $\lambda = -16.892, \lambda = 10{,}892$ dir.

Dolayısıyla elde edilen bu özdeğerler 4.2.4 teoremi göz önüne alındığında, $\tilde{A}$ simetrik aralık ödemeli matrisin özdeğerleri

$$\lambda_1^I = [5.062, 16],\ \lambda_2^I = [-16.892, -3.403]$$

olur.

Sonuç 4.2.6. $\tilde{A}$ simetrik aralık ödemeli matrisi için, eğer bazı λ_i lere ait x_i lerin bileşenleri $\tilde{A}$ üzerinde eşit işaretlere sahipse, o zaman $\lambda_1^i = [\lambda_i(\underline{A}), \lambda_i(\overline{A})]$ olur.

Teorem 4.2.7. $\lambda \in L \Leftrightarrow [(A_c - \lambda I) - \Delta A, (A_c - \lambda I) + \Delta A]$ aralık matrisi tersinirdir.

Teorem 4.2.8. $\tilde{A}$ diagonal ve tersinir aralık ödemeli matrisi ne pozitif tanımlı ne de negatif tanımlı ise $v(\tilde{A}) = 0$ dır.

Teorem 4.2.9. $\tilde{A}$ diagonal ve tersinir aralık ödemeli matris pozitif tanımlı ve pozitif $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ özdeğerlerine sahipse $v(\tilde{A}) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n}}$ dır.

Örnek 4.2.10. Getiri matrisi

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [2,3] & [0,0] \\ [0,0] & [1,4] \end{bmatrix}$$

ile verilen pozitif tanımlı aralık ödemeli matrisinin özdeğerlerinden faydalanarak oyun değerini bulunuz.

Çözüm Teorem 4.2.7. ve Teorem 4.2.9.'a göre,

$$(A_c - \lambda I) - \Delta A \;=\; \left(\begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} - \lambda \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

olduğundan bu matrisin özdeğerleri 1 ve 2 dir. Bunun yanı sıra,

$$(A_c - \lambda I) + \Delta A \;=\; \left(\begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} - \lambda \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

olduğundan bu matrisin özdeğerleri 3 ve 4 olur. Dolayısıyla $\lambda_1 = [1,3], \lambda_2 = [2,4]$ elde edilir. $\tilde{A}$ aralık ödemeli matrisin oyun değeri

$$v(\tilde{A}) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}} = \frac{1}{[2,4] + [1,3]} = \left[\frac{2}{3}, \frac{12}{7}\right]$$

olarak bulunur.

BEŞİNCİ BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında oyun teorisinde önemli olan sonlu iki kişili sıfır toplamlı oyunlar ele alınmıştır. Daha sonra çalışma için gerekli olan oyun, oyunun çözümü, strateji, çözüm yöntemleri gibi temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Klasik matris oyunlarında iki kişili sıfır toplamlı oyunların çözümü için grafik yöntem ele alınarak incelemeler yapılmıştır. Bu tezde, çalışmanın asıl amacını oluşturan aralık kavramı üzerinde durulmuş ve klasik matrislerin elemanları yerine aralık sayıları alınarak oluşturulan aralık ödemeli matris oyunlarının özellikleri ve bu oyunların bazı çözüm yöntemleri ele alınmıştır.

Aralık ödemeli matrislerin negatif olmayan özvektörlere karşılık gelen özdeğerleri ile oyun değeri arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu ilişki genelleştirilerek, aralık ödemeli matris oyunlarının oyun değeri ve oyunu oluşturan aralık ödemeli matrisin özdeğerleri arasındaki karakterizasyon sunulmuştur.

KAYNAKÇA

Ahlatçıoğlu, M. ve Tiryaki, F. (1998). *Oyunlar Teorisi.* Yıldız Teknik Üni. Basım Yayın Merkezi: İstanbul.

Akyar, H. ve Akyar, E. (2011). "A Graphical Method for Solving Interval Matrix Games". Abstract and Applied Analysis, Doi:10.1155. 1-17.

Bakoğlu, H. (1991). *Oyun Teorisi.* Ege Üniversitesi Basım Evi: İzmir.

Barron, E. N. (2006). *Game Theory: An Introduction*. John Wiley & Sons: New Jersey.

Deif, A. (1991). "The interval eigenvalue problem". Zeit. Angew. Math. Mech. 71, 61-64.

Ferguson, T. S. (2014). *Game Theory*. Mathematics Department: UCLA.

Ganesan, K. (2007). "On Some Properties of Interval Matrices". *International Journal Of Computational and Mathematical Sciences.* 1: 92-99.

Guseinov, K. G,, Akyar, E., Düzce, S.A. (2010). *Oyun Teorisi Çatışma ve Anlaşmanın Matematiksel Modelleri*. Seçkin Yayınları: Ankara

Hladik, M., Daney, D. and Tsigaridas, E. (2010). "Bounds on Real Eigenvalues and Singular Values of Interval Matrices". *Society for Industrial and Applied Mathematics.* 31(4), 2116–2129.

Ishibuchi, H. ve Tanaka, H. (1990). "Multiobjective Programming in Optimization of the Interval Objective Function". *European Journal of Operational Research*. 48: 219-225.

Kaleyski, N. S. (2014). "Eigenvalues of Symetric Interval Matrices''. Published Bachelor Thesis. Faculty of Mathematics and Physics Charles University, Prague.

Moore, R. E. (1979). *Method and Application of Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia.

Morris, P. (1994). *Introduction to Game Theory*. Springer-Verlag: New Jersey.

Nash, J. F. (1950). "The Bargaining Problem". *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 18(2), 155-162.

Nash, J. F. (1950). "Equilibrium points in n-person games". *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, 48-49.

Nash, J. F. (1951). “Non-Cooperative Games”. *Annals of Mathematics*, 54 (2), 286-295.

Nash, J. F. (1953). “Two-person cooperative games”. *Econometrica*, 21, 128-140.

Nayak, P. K. ve Pal, M. (2006). “Solution of Rectangular Interval Games Using Graphical Method’’. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*. 22:1 95-115.

Nayak, P. K. ve Pal, M. (2009). “Linear Programming Technique to Solve Two Person Marix Games with Interval Pay-Offs”. *Asia Pasific Journal of Operational Research.* 26 (2): 285-305.

Neumann, J. V. and Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press : New Jersey.

Neumann, J. V. (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Math. Ann. 100 295–320.

Owen, G. (1995). *Game Theory*. Academic Press, Inc.: San Diego.

Raghavan, T. E. S. (1965). “On positive game matrices and their extensions”. *J. London Math. Soc*. 40 467-477.

Rohn, J. (1990). “Real eigenvalues of an interval matrix with rank one radius”. *Zeit. Angew. Math. Mech.* 70, 562-563.

Rohn, J. (1993). “Interval matrices: singularity and real eigenvalues”, *SIAM. Journal of Matrix Analysis and Applications*. 1: 82 – 91.

Rohn, J. (1993). “Inverse interval matrix”. *SIAM. Journal of Numerical Analysis*. 3: 864–870.

Rohn, J. and Deif, A. (1992). “On the Range of Eigenvalues of an Interval Matrix”. *Computing*. 47, 373-377.

Roman, L. and Weil, JR. (1968). “Game Theory and Eigensystems”. *SIAM Review*. 10: 360-367.

Sengupta, A. ve Pal, T. K. (2009). “Fuzzy Preference Ordering of Interval Numbers in Decision Problems”. Studies in Fuzziness and Soft Computing 238, Springer: Berlin.

Sengupta, A., Pal, T. K. ve Chakraborty, D. (2001). "Interpretation of Inequality Constraints Involving Interval Coefficients and Solution to Interval Linear Programming". *Fuzzy Sets and Systems.* 119: 129-138