T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ

ÇOK PARAMETRELİ STOKASTİK İKİLİ DİNAMİK SİSTEMLERİN ANALİZİ

Muhammet CANDAN
Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ÇOK PARAMETRELİ STOKASTİK İKİLİ DİNAMİK SİSTEMLERİN ANALİZİ

Muhammet CANDAN

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **19/12/2017**

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Yakup HACI

ÇANAKKALE

Muhammet CANDAN tarafından Prof. Dr. Yakup HACI danışmanlığında hazırlanan ve **19/12/2017** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**Çok Parametreli Stokastik İkili Dinamik Sistemlerin Analizi**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. İhsan YILMAZ ……………………
Başkan

Prof. Dr. Yakup HACI ……………………
Üye

Prof. Dr. Urfat NURİYEV ……………………
Üye

Prof. Dr. Danıyal İSRAFİLZADE ……………………
Üye

Yrd. Doç. Dr. İsmail DEMİR ……………………
Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:………

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Muhammet CANDAN

TEŞEKKÜR

Öncelikle; bu tezin ortaya çıkmasında yardımlarını esirgemeyen ve lisansüstü öğrenimim boyunca her anlamda yanımda olan değerli hocam Prof. Dr. Yakup HACI'ya teşekkür ederim.

Ayrıca tez çalışmalarıma öneri ve emekleriyle katkıda bulunan, Tez İzleme Komitesi'nde bulunan hocalarım Prof. Dr. İhsan YILMAZ' a ve Yrd. Doç. Dr. İsmail DEMİR' e teşekkür ederim.

Son olarak, doktora öğrenimim boyunca bana hiçbir zaman maddi manevi desteğini esirgemeyen kıymetli eşim Dilek CANDAN'a teşekkür ederim.

Muhammet CANDAN

Çanakkale, Aralık 2017

SİMGELER VE KISALTMALAR

X	Durum alfabesi
Y	Çıkış alfabesi
S	Durum kümesi
$\vee$	Mantıksal ve
$\wedge$	Mantıksal veya
$\oplus$	Modülo2 ‘yegöre toplam
$\otimes$	Direkt çarpım
F_v	Geçiş fonksiyonu
G	Çıkış karakteristik fonksiyonu
$GF(2)$	Galois cismi
$\xi_v s(c)$	Kaydırma operatörü
$x(c)$	Mümkün kontrol edici
L_i	Kesikli eğri
min	Minimum
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$B(\sigma, \aleph)$	Bellman fonksiyonu
$\bar{...}$	Mantıksal değili
$J(x)$	Fonksiyonel
G_d	Nokta kümesi
LOSİDS	Lineer olmayan stokastik ikili dinamik sistemler
LSİDS	Lineer stokastik ikili dinamik sistemler

ÖZET

ÇOK PARAMETRELİ STOKASTİK İKİLİ DİNAMİK SİSTEMLERİN ANALİZİ

Muhammet CANDAN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Yakup HACI
19/12/2017, 89

Bu tez çalışmasının amacı, ikili ardışık dinamik sistemlerin genel kavramlarını tanımlayıp, farklı gösterimlerini vererek dinamik özelliklerini incelemektir. Bununla birlikte dinamik sistemlerde optimal kontrol etme problemi için optimallik koşullarını elde etmek ve bu konudaki çalışmalara katkıda bulunmak amaçlanmaktadır.

Tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konu ile ilgili genel bilgiler verilmiş ve yapılmış olan bazı çalışmalar tanıtılmıştır.

Tezin ikinci bölümünde kontrol teorisi ile ilgili temel tanım ve gerekli bazı hipotezler verilmiştir. Bazı hipotezler altında Bellman denklemi oluşturulmuş, Maksimum Prensibi formülize edilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde ikili dinamik sistemlerin genel modelleri üzerinde durulmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde çok boyutlu kesikli dinamik sistemler analiz edilmiştir. Lineer ve lineer olmayan kesikli sistemler incelenmiş, tam çözülebilme koşulu ifade edilip ispatlanmıştır.

Tezin beşinci bölümünde lineer olmayan stokastik ikili dinamik sistemler (LOSİDS) üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Boolean değerli fonksiyonların aritmetik gösterimleri elde edilmiştir. LOSİDS ile verilen kesikli optimal süreçler incelenmiş ve kesikli optimal kontrol etme problemlerinin çözüm yöntemlerinden olan Dinamik Programlama kullanılarak Bellman denklemi elde edilmiştir. Ayrıca optimal kontrol edicinin varlığı için erişim kümesi tanımlanarak varlık teoremi ispatlanmıştır.

Tezin altıncı bölümünde, içerisine olasılık fonksiyonu ve rasgele değişken eklenerek yeniden oluşturulan lineer stokastik ikili dinamik sistem (LSİDS) tanımlanmış ve bu sistemlerin karakteristik özellikleri verilmiştir. Aynı zamanda LSİDS ile verilen süreçler

için optimal kontrol etme problemi çalışılmış, optimallik için gerek ve yeter koşul teoremleri ispatlanmıştır.

Tezin yedinci bölümünde özel parametreye bağlı lineer olmayan stokastik ikili dinamik sistemler incelenmiştir.

Tezin sekizinci bölümünde sonuç ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar sözcükler: Bellman Denklemi, Stokastik İkili Dinamik Sistem, Pontryagin Maksimum Prensibi, Optimal Kontrol, Optimal Yörünge.

ABSTRACT

ANALYSIS OF MULTI-PARAMETER STOKASTIC BINARY DYNAMICAL SYSTEMS

Muhammet CANDAN
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Doctoral Dissertation in Mathematics
Advisor : Prof. Dr. Yakup HACI
19/12/2017, 89

The aim of thesis is to define the general concept of binary sequential dynamical systems and investigate some of properties of dynamics with different representations and then to obtain condition of optimality.

The thesis consists of eight chapters. The first chapter of thesis is introduction.

In the second chapter, fundamental definitions and some essential hypothesises concerning control theory are given. Bellman's equation is constructed and Maximum Principle is formulized under some hypothesis.

The third chapter gives us general concept of multi-parameter binary sequential dynamical systems

In the fourth chapter of the thesis, multi-dimensional discrete dynamical systems are analyzed. Linear and nonlinear discrete dynamical systems and theorems of the condition of exact solution are investigated.

The fifth chapter contains main findings. Arithmetic representation of Boolean valued transition vector functions is obtained. Nonlinear stochastic binary dynamical system is studied. Discrete optimal processes given by nonlinear stochastic binary dynamical system are investigated. Also, Bellman's equation is obtained with the aid of Dynamic Programming. A particular set defined as accessible set is established to show existence of optimal control and proof of existence theorem is obtained.

In the sixth chapter of thesis, by substituting probability function and random variable into considered mathematical model, linear stochastic binary sequential dynamical systems are defined and then characteristics of system are determined.

The seventh chapter is devoted to nonlinear stochastic binary sequential dynamical system based on parameter.

Final chapter involves conclusions and advices.

Keywords: Bellman Equation, Binary Stokastic Dynamic System, Boolean Function. Maximum Principle, Optimal Control

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Çağdaş kesikli sistemler teorisinin en hızlı gelişen alanlarından biri Ardışık Dinamik Sistemler Teorisidir. Ardışık dinamik sistemler; genel olarak bir olayı veya bir sistemin davranışını ifade etmek için kullanılan, durumlar ve bu durumlar arasındaki geçişlerin belirlenmesiyle ortaya çıkarılan bir matematiksel modelleme ifadesidir. Ardışık dinamik sistem, bir sistemin davranışını tanımlamak veya adım adım oluşan olaylardan istenilen bir duruma gelinip gelinmediğini algılamak için kullanılır. Ardışık dinamik sistemler, mühendislik alanındaki özellikle de bilişim alanındaki bir çok probleme dinamik matematiksel model tanımlama imkanı sunar.

Bu teorinin özellikle derin araştırılmasının ve bu teoriye ilgi gösterilmesinin sebepleri olarak;

■ Lineer olmayan kesikli sistemler sınıfının önemli bir alt sınıfı olan ardışık dinamik sistemlerde optimal kesikli kontrol etme yöntemlerinin ve teorisinin gelişmesi,

■ Kesikli kontrol etme ve sonlu dinamik sistemler teorisinin sınır problemlerinin araştırılmasının gerekliliği,

■ Günümüz bilgisayarlarının yapılmasında ve onların matematiksel modellemesinde, otomatik teşhis sistemlerinde, bazı nesne ve süreçlerin kodlaştırılmasında ardışık dinamik sistemlerin geniş uygulaması gösterilebilir.

İkili ardışık dinamik sistemler teorisi, son yarım yüz yıldır yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Bu teoriyi özellikle Gill (1962), Gill (1975), Zadeh (1965), Arbib (1966), Tzafestas (1972), Zadeh (1965), Farajov (1975) ve Anderson (2004) adlı bilim insanları geliştirmiştir. Çalışmalarında temel olarak, tek parametreli deterministik lineer ve lineer olmayan ardışık dinamik sistemlerin analizi ile sentezi için yöntemler geliştirmiş ve uygulamışlardır.

İlk olarak Pontryagin ve ark. (1962) optimal kontrol etme teorisini oluşturarak kesikli ve sürekli yapılı sistemler için maksimum prensibini ispatlamışlardır.

Gaishun (1981), çok boyutlu lineer ve lineer olmayan kesikli dinamik sistemler üzerine çalışmalar yapmış, tanımladığı sistem için tam çözümlenebilme koşulunu sağlayan gerek ve yeter koşul teoremini ispatlamıştır.

Mamedova (2003), benzer şekilde n boyutlu homojen bilineer ardışık dinamik sistemlerin kontrol edilebilirliği üzerine olan çalışmalarını $p \geq 3$ için Galois cismi $(GF(p))$ üzerinde incelemiştir.

Mordukhovich (2006), varyasyonel analiz ve kesikli sistemler için optimal kontrol etme problemi üzerine bazı çalışmalar yapmıştır.

Guillaume ve Tahraoui (2008), ödeme fonksiyonelinin minimalleştiği deterministik optimal kontrol etme problemini incelemiştir. Ayrıca çalışmada tanımlanan modele uygun olarak Pontryagin maksimum prensibini genelleştirmiştir.

Bonnans ve Fernandez (2010), dinamikleri integral denklem ile verilen durum kısıtlı deterministik optimal kontrol problemi üzerine çalışmış, Pontryagin maksimum prensibini, göz önüne alınan sistem için uyarlamıştır.

Gabasov ve ark. (2008) kontrol bölgesinde tanımlı ve geometrik kısıtlı lineer kuadratik optimal kontrol problemini incelemiş, optimal yörüngeler ve optimal çözümler için nümerik yöntemleri uygulamışlardır.

Gabasov ve ark. (2009) belirsizlik durumları altında tanımladıkları model için optimallik prensibini incelemiş, ele alınan sistem içn mantıksal devre tasarlamışlardır.

Hacı ve Ozen (2009) lineer olmayan çok parametreli ikili dinamik sistem modeli tanımlayarak bu sistemler ile verilen optimal süreçleri çalışmış, mümkün optimal kontrol edici tanımlamış ve optimallik prensibini ispatlamıştır.

Hacı (2009) lineer ikili fark denklemler sistemi ile yönetilen süreçler için optimal kontrol etme problemini araştırmış, mümkün optimal kontrol edicinin ve buna karşılık gelen mümkün optimal yörüngenin optimal olmasını sağlayan gerek ve yeter koşul teoremlerini ispatlamıştır.

Azhmyakov ve ark. (2014) süreksiz yapılı kontrol sistemin bir sınıfı olan optimal kontrol problemlerine teorik bir yaklaşımda bulunmuşlar, optimal kontrol etme teorisi kavramlarından yararlanarak analitik ve nümerik çözümleri elde etmişlerdir.

Yukarıdaki yayınlar göz önüne alındıktan sonra bilim ve tekniğin bir çok probleminin incelenmesinin gerekliliği, çok parametreli stokastik ikili dinamik sistemler teorisinin oluşturulmasını gerekli kılmıştır. Bu nedenle yapılan bu tez çalışmasında, sonlu ardışık dinamik sistemlerin daha genel yapısı olan stokastik ikili dinamik sistemler üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca bu sistemlerle verilen süreçler için optimal kontrol etme teorisi yöntemleri yeterince incelenmediğinden teze bu açıdan yaklaşılmıştır.

Bu tezin amacı; çok parametreli stokastik ikili dinamik sistemlerin özelliklerini incelemek ve analiz etmek, çok parametreli stokastik ikili dinamik sistemler denklemlerinin tam çözüm koşullarını oluşturmak ve bu sistem ile verilen terminal kontrol etme problemlerinde optimal süreçler için gerekli ve/veya yeterli koşulları belirlemektir.

Tezin ikinci bölümünde tezde özellikle kullanılacak optimal kontrol etme teorisinin temel kavram ve teoremleri verilmiştir. Bunun için ilk olarak sürekli zamanlı yapılar için optimal kontrol edici ve ona karşılık gelen optimal yörünge tanımlanarak optimal süreç oluşturulmuştur. Dinamik programlama yönteminin varlığını oluşturan hipotezler ve teorem ifade edilmiş ve sonunda Bellman denklemi kurulmuştur. Ayrıca kontrol edilebilir optimal süreçleri bulmak için Maksimum Prensibi elde edilmiştir. Daha sonra bu yaklaşım sürekli zamanlı kontrol edilebilir süreçler için çalışılmıştır. Ayrıca kesikli problemleri çözmek için Dinamik Programlama yönteminden ve Kesikli Maksimum Prensibinden de yararlanılmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde ikili ardışık sonlu dinamik sistemlerin genel modeli tanımlanmış ve sistemin genel özellikleri verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde çok boyutlu kesikli dinamik sistemler analiz edilmiştir. Lineer olmayan kesikli sistem tanımlanarak genel özellikleri incelenmiştir. Göz önüne alınan sistemin tam çözülebilmesi için gerek ve yeter koşul teoremi ifade edilip ispatlanmıştır. Daha sonra homojen ve homojen olmayan lineer kesikli sistemler tanımlanmış ve çözüm koşulları belirlenmiştir. Cauchy formulü elde edilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde lineer olmayan stokastik ikili dinamik sistemler tanımlanmış ve temel özellikleri verilmiştir. Sistemin karakteristik özellikleri araştırılmıştır:

$$\xi_\nu s(c) = F_\nu(c, s(c), x(c), \omega(c)),\ \nu = 1,2,...,k,\ [GF(2)]^m$$

$$s(c^0) = s^0$$

Burada $c = (c_1,...,c_k) \in G_d = \{c \mid c \in Z^k, c_1^0 \le c_1 \le c_1^L,...,c_k^0 \le c_k \le c_k^L, c_i \in Z\}$

Z^k dan alınan noktalardır. L_i, sistemin devam etme süresi, i=1,…,k tamsayılardır. $Z = \{...,-1,0,1,...\}$, tam sayılar kümesidir. $s(c) \in S, x(c) \in X$; $S = [GF(2)]^m$, $X = [GF(2)]^r$ sırasıyla durum ve giriş alfabeleridir. $s(c)$ ve $x(c)$ ise Z^k kümesinde tanımlanan m ve r boyutlu durum ve giriş vektörleridir. $\omega(c)$ rasgele değişkeni, $\xi_\nu s(c)$ aşağıdaki gibi tanımlanan kaydırma operatörüdür:

$$\xi_\nu s(c) = s(c + e_\nu); e_\nu = (0,...,0,\overset{\nu}{1},0,...,0),\ \text{v=1,…,k}$$

Karakteristik geçiş Boolean vektör fonksiyonları olan $F_\nu(\cdot) = \{F_{\nu_1}(\cdot),...,F_{\nu_m}(\cdot)\}$ 'ler $Z^k \times [GF(2)]^m \times [GF(2)]^r$ kümesinde tanımlıdırlar. $[GF(2)]$ Galois cismidir. $s(c^0) = s^0$ başlangıç durum vektörüdür.

Beşinci bölümde göz önüne alınan problem için Boolean değerli fonksiyonlar ile aritmetik fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi veren matematiksel gösterim elde edilmiştir. Bunun için bir önermeden yararlanılmıştır. LOSİDS ile verilen süreçler için optimal kontrol etme problemi incelenmiştir. İki boyutlu uzayda bu sistemin davranışı, kesikli bir yol üzerinde detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Elde edilen denklemlerden, denklem sayısının bilinmeyen sayısından fazla olan aşırı belirlenmiş bir sistem olduğu gösterilmiştir. Sistemin tek çözümünün eğriden bağımsız olduğunu gösteren, başlangıç durumu verilen LOSİDS'in tek çözümü olduğunu belirten gerek ve yeter koşul teoremi ifade edilip ispatlanmıştır. Daha sonra LOSİDS ile verilen süreçler için optimallik prensibi ispatlanmıştır. Optimal kontrol etme probleminin çözümü için Bellman denklemi kurulmuştur. Optimal kontrol edicinin varlığı göstermek amacıyla özel bir erişim kümesi oluşturulmuştur. Erişim kümesinin önceden verilmeyip LOSİDS yardımıyla başlangıç durumuna bağlı olarak bulunduğu "optimal kontrol edici için varlık teoremi" ispatlanmıştır.

Tezin altıncı bölümünde, lineer stokastik ikili dinamik sistem; zaman değişkenine bağlı kesikli dinamik sistemler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\xi_\nu s(c) = \Phi_\nu(c)s(c) \oplus \Psi_\nu(c)(x(c) \oplus \omega(c)), \nu = 1,2,...,k\ , [GF(2)]$$

$$s(c^0) = s^0$$

Burada $c = (c_1,...,c_k) \in G_d = \{c \mid c \in Z^k, c_1^0 \le c_1 \le c_1^L,...,c_k^0 \le c_k \le c_k^L, c_i \in Z\}$ Z^k'dan alınan noktalardır. L_i, i=1,…,k tamsayılardır. $Z = \{...,-1,0,1,...\}$, tam sayılar kümesidir. $s(c) \in S, x(c) \in X$; $S = [GF(2)]^m$, $X = [GF(2)]^r$ sırasıyla durum ve giriş alfabeleridir. $s(c)$ ve $x(c)$ ise Z^K kümesinde tanımlanan m ve r boyutlu durum ve giriş vektörleridir. $\xi_\nu s(c)$ bir yer kaydırma operatörüdür. Bu operator aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır: $\xi_\nu s(c) = s(c + e_\nu); e_\nu = (0,...,0,\overset{\nu}{1},0,...,0)$, $\{\Phi_\nu(c), \nu = 1,...k\}$, $\{\Psi_\nu, \nu = 1,...,k\}$ sırası ile $m \times n$ ve $m \times r$ boyutlu karakteristik Boolean geçiş matrisleridir. $[GF(2)]$ Galois cismidir, $s(c^0) = s^0$ başlangıç durum vektörüdür.

Görüldüğü gibi buradaki matematiksel modele, sistemin davranışını etkileyen rasgele bir büyüklük eklenmesiyle çok parametreli lineer stokastik ikili dinamik sistemlerin karakteristik özelllikleri incelenmiştir. Böyle sonlu dinamik sistemlerin karakteristiği "giriş-çıkış durum" denklemleri yardımıyla gösterilmiştir. Bununla birlikte lineer stokastik ikili dinamik sistemlerle verilen süreçler için optimal kontrol etme problemi üzerinde çalışılmıştır. Tam çözüm koşulu altında araştırılan sistemin yoldan bağımsız olduğunu kanıtlayan bir teorem verilmiştir. Bu sistem içerisindeki kontrol edici ve ona karşılık gelen uygun bir yörüngenin, optimal olmasını sağlayan gerek ve yeter koşul teoremleri ifade edilip kanıtlanmıştır.

Tezin yedinci bölümünde özel belirlenmiş parametre içeren dinamik sistemler incelenmiştir. Böyle sistemler

$$\xi_v s(c) = F_v(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c))$$

$$y(c) = G(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), \; v = 1,2,...k$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada $s(c), x(c)$ ve $y(c)$, c noktasındaki sırasıyla m, r ve q boyutlu durum, giriş ve çıkış vektörleri; $\omega(c)$ rasgele değişken ve $\lambda(c)$ özel olarak belirlenmiş parametredir. Böyle dinamik sistemler için parametre sabit giriş değerlerine uygun olarak tek çözüm koşulu ifadesinden elde edilmiştir. Göz önüne alınan problem için optimal prensibi ispatlanmış, daha sonra dinamik prgramlama metodu uygulanarak Bellman denklemi kurulmuştur.

BÖLÜM 2
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Giriş

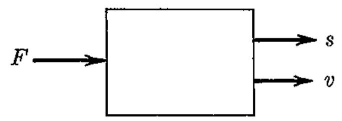
Optimal kontrol teorisinin genel kavramlarının ve temel teoremlerinin verildiği bu bölüm, Azimli (2011), Boltyanskii (1971), Boltyanskii (1978), Kirk (1970), Çölkesen (2015), Pontryagin ve ark. (1962)'nın çalışmalarının derlenmesiyle hazırlanmıştır.

İlk optimal kontrol problemleri 1940-50'li yıllarda ortaya çıkmıştır. Karşımıza çıkan çok sayıda teknik problemin eski yöntemlerle çözülemeyeceği anlaşılmıştır. Bu yıllarda Sovyet Bilimler Akademisinin V. A. Steklov Matematik Enstitüsünde L. S. Pontryagin ve öğrencileri tarafından bu problemleri çözmek için bir teori geliştirilmiştir. Temel teoremi Pontryagin'in maksimum prensibi olan teori, "Optimal Kontrol Problemi" olarak adlandırılmıştır.

Göz önüne alınan problemler optimizasyon problemlerinden farklıdır. Çok değişkenli fonksiyonların maksimum ya da minimum problemlerinde optimal çözüm, sonlu boyutlu uzayların elemanıdır (Azimli, 2011). Fakat optimal kontrol problemlerinde minimum/maksimum çözüm, genellikle sonsuz boyutlu fonksiyonlar uzayının noktasıdır.

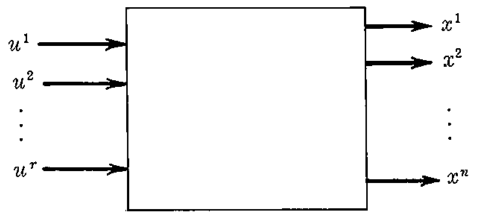
2.2. Kontrol Edilebilir Nesneler

Optimal kontrol etmedeki temel amaç, kontrol edilebilir nesneler ve onları kontrol etmenin en iyi yollarını bulmaktır. Doğrudan gerçek nesneler ile ilgilenilmemekte fakat bu nesneler için matematiksel modeller yardımıyla optimallik açıklanmaya çalışılmaktadır. Örneğin bir otomobilin hareketi incelendiğinde anlık zamanlarda otomobilin durumu; gidilen uzaklık s ve hızı v ile karakterize edilir. Bu nicelikler zamanla bazı nedenlere bağlı olarak değişebilir:



Şekil 2.1. Anlık zamanlarda otomobilin durumu (Pontryagin ve ark., 1962)

Şekil 2.1.'e bakıldığında otomobilin durumunu karakterize eden s ve v niceliklerine faz koordinatları, F'ye kontrol parametresi denir. Bu sistem aşağıdaki verilen sistem göz önüne alınarak genelleştirilebilir:



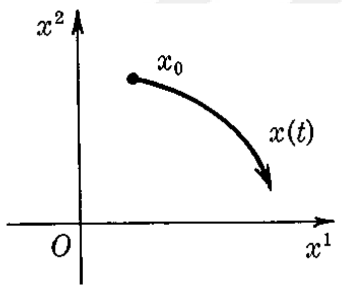
Şekil 2.2. Sistemin giriş, çıkış değişkenleri (Pontryagin ve ark., 1962)

Şekil 2.2.'ye göre $u^1, u^2, \dots, u^r$ kontrol parametresi olup giriş değişkenleridir. $x^1, x^2, \dots, x^n$ faz koordinatları olup çıkış değişkenleridir.

$u = (u^1, u^2, \dots, u^r)$ kontrol vektörü, r boyutlu uzayın herhangi bir noktası ve her $x = (x^1, u^2, \dots, x^n)$ durumu n boyutlu bir uzayın herhangi bir noktasıdır.

Bir nesnenin hareketini tamamen tanımlayabilmek için t_0 başlangıç zamanındaki durumunu bilmek ve $(t > t_0)$, $u(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t))$ vektör fonksiyonunu belirlemek gerekir. Bu $u(t)$ fonksiyonuna **kontrol** denir (Pontryagin ve ark. (1962)).

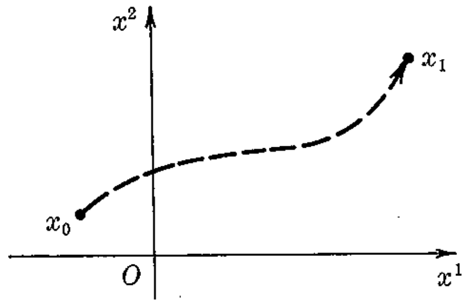
x_0 başlangıç durumunun ve $u(t)$ kontrolünün bilinmesiyle, nesnenin bir sonraki hareketi tek türlü olarak belirlenir.



Şekil 2.3. Faz yörüngesi (Pontryagin ve ark., 1962)

Şekil 2.3.'e göre x_0 noktasından başlayan harekete faz yörüngesi denir.

$\big(u(t), x(t)\big)$ ikilisine kontrol süreci denir. Bu süreç tamamen $t > t_0$ için $u(t)$ kontrolü ve $x_0 = x(t_0)$ başlangıç durumu tarafından belirlenir.



Şekil 2.4. Optimal süreç (Pontryagin ve ark., 1962)

x_0 başlangıç noktasından başlayıp önceden belirlenmiş x_1 terminal noktasına $u(t)$ kontrolü altında en iyi şekilde (en kısa, en ucuz vb.) geçme işlemine **optimal süreç** denir. Burada en kısa sürede geçme, zaman-optimal süreç olarak adlandırılmıştır (Pontryagin ve ark., 1962).

Bir nesnenin hareketi;

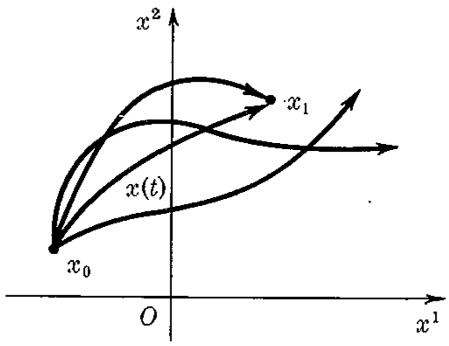
$$\dot{x}^1 = f^1(x^1, x^2, \dots, x^n, u^1, u^2, \dots, u^r)$$
$$\dot{x}^2 = f^2(x^1, x^2, \dots, x^n, u^1, u^2, \dots, u^r)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$\dot{x}^n = f^n(x^1, x^2, \dots, x^n, u^1, u^2, \dots, u^r)$$

denklem sistemi ile karakterize edilir. Burada $f^1, f^2, \dots, f^n$ nesnenin iç yapısı tarafından tanımlanan fonksiyonlardır. Bu diferansiyel denklem sistemi

$$\dot{x} = f(x, u)$$

şeklinde yazılabilir. Başlangıç koşulları verilmediğinde bu diferansiyel denklem sisteminin özel çözümünü bulmak mümkün değildir. $u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t),\ \ t > t_0$ kontrol fonksiyonlarının ve $t = t_0$ anında başlangıç durumunun bilinmesiyle $\dot{x} = f(x, u(t))$ vektör denkleminin yardımıyla, nesnenin hareketi tek türlü olarak belirlenir ($t > t_0$).

Eğer aynı x_0 başlangıç durumu korunarak $u(t) = u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t)$ kontrolü değiştirildiğinde $x(t)$ yörüngesi değişir.

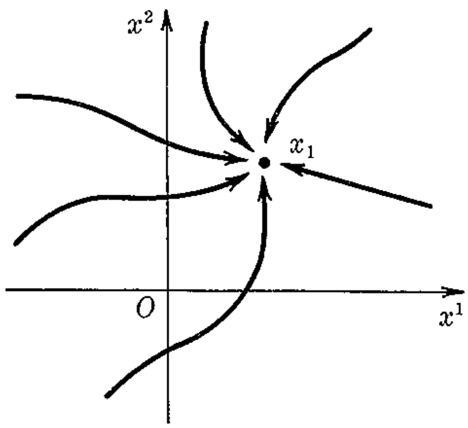


Şekil 2.5. Farklı yörüngeler (Pontryagin ve ark., 1962)

2.2.1. Dinamik Programlama Metodu

x başlangıç durumundan sabit x_1 terminal durumundaki optimal süreci inceleyelim.

Hipotez 2.1. Faz uzayının x_1'den farklı herhangi x noktası için x noktasını x_1 noktasına taşıyan bir optimal süreç vardır (Pontryagin ve ark., 1962).



Şekil 2.6. Farklı noktalardan tek bir noktaya optimal süreç (Pontryagin ve ark., 1962)

x noktasından x_1 noktasına kadar olan optimal süreç için geçen zamanı $T(x)$ ile gösterelim. Yani x noktasından x_1 noktasına yapılan bir geçişin $T(x)$'den az olması mümkün değildir.

Faz uzayının her x noktasının $x^1, x^2, \dots, x^n$ bileşeni olduğundan $T(x)$ fonksiyonu n değişkenli bir fonksiyon olup,

$$T(x) = T(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

şeklindedir.

Hipotez 2.2. $T(x)$ fonksiyonu $x^1, x^2, \dots, x^n$ değişkenlerine göre sürekli ve x_1 noktası dışında her yerde sürekli türevlere sahiptir. Yani;

$$\frac{\partial T}{\partial x^1}, \frac{\partial T}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial x^n}$$

kısmi türevleri var ve süreklidir (Pontryagin ve ark., 1962)

$W(x) = -T(x)$ şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Hipotez 2.1 ve Hipotez 2.2 sağlandığından $W(x)$ fonksiyonu tanımlıdır. Tüm faz uzayında süreklidir ve kısmi türevleri

$$\frac{\partial W}{\partial x^1}, \frac{\partial W}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial x^n}$$

de süreklidir.

x_1 noktası hariç x_0, faz uzayının x_1'den farklı herhangi bir noktası olsun. u_0; U kontrol bölgesinde (mümkün kontrol kümesindeki en iyi kontrol edici) keyfi bir nokta olsun. x_0 durumunda ve t_0 anında u_0 kontrolü altında bir hareketin olduğunu varsayalım. Bu hareket boyunca faz yörüngesini

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t), \dots, y^n(t))$$

şeklinde gösterelim. $t > t_0$ için $y(t)$ yörüngesi,

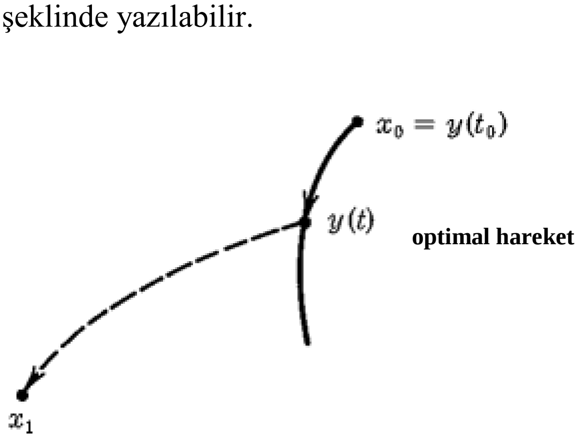
$$\dot{y}^i(t) = f^i(y(t), u_0), i = 1,2, \dots, n, \; y(t_0) = x_0$$

denklemini sağlar ($\dot{x}^i = f^i(x, u_0)$) .

Eğer x_0 noktasından $y(t)$ noktasına faz yörüngesi boyunca hareket edilirse bu hareket boyunca geçen zaman $t - t_0$ dır. Optimal olarak $y(t)$ noktasından x_1 noktasına hareket ederken geçen süre $T(y(t))$ olsun. Sonuç olarak x_0'dan x_1'e geçiş, $t - t_0 + T(y(t))$ zamanda olur. Fakat x_0'dan x_1 noktasına hareketin optimal zamanı $T(x_0) = T(y(t_0))$ olduğundan

$$T(y(t_0)) \leq (t - t_0) + T(y(t))$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 2.7. Optimal hareket (Pontryagin ve ark., 1962)

T yerine $-W$ yazılırsa

$$-W\big(y(t_0)\big) \leq (\,t - t_0) - W(y(t))$$

$$\frac{W(y(t)) - W\big(y(t_0)\big)}{t - t_0} \leq 1, \;\; t \neq t_0$$

elde edilir. Burada $t \to t_0$ için limite geçilirse

$$W'\big(y(t)\big) = \frac{dW(y(t))}{dt} \leq 1$$

bulunur.

$$\frac{dW(y(t))}{dt} = \frac{\partial W(y(t))}{\partial x}\; \dot{y}(t)$$

olur. Fakat $W, x^1, x^2, \ldots, x^n$ 'ye bağlı bir fonksiyon olduğundan

$$\frac{dW(y(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W\big(y(t)\big)}{\partial x^i} \dot{y}^i(t)$$

yazılır. Buna göre

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(x_0)}{\partial x^i} f^i(x_0, u_0) \leq 1 \tag{2.1}$$

elde edilir. Buradaki x_0 ve u_0 keyfi parametrelerdir.

Böylece faz uzayının x_1'den farklı herhangi x noktası ve kontrol bölgesindeki herhangi u noktası için

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial W(x)}{\partial x^i} f^i(x, u) \right) \leq 1 \tag{2.2}$$

elde edilmiş olur (Pontryagin ve ark., 1962)

Şimdi $\big(u(t), x(t)\big)$, x_0 durumunu x_1 durumuna ulaştıran bir optimal süreç olsun. Bu optimal hareket boyunca geçen zaman aralığı $t_0 \leq t \leq t_1$ olsun.

$$x(\,t_0) = x_0, \;\; x(\,t_1) = \; x_1, \;\; t_1 - \; t_0 = T(\,x_0)$$

Nesnenin hareket denklemi yardımıyla

$$\dot{x}^i(t) = f^i(x(t), u(t)), \;\; t_0 \leq t \leq t_1 \tag{2.3}$$

yazılabilir. x_0'dan $x(t)$'ye optimal yörünge boyunca geçen zaman $t - \; t_0$'dır. $x(t)$'den

x_1 ’e olan hareket boyunca geçen zamanın $t_1 - t$ olmasını gerektirir. Yani;

$$t_1 - t = T(x_0) - (t - t_0)$$

$x(t)$’den x_1’e olan hareketin $T(x_0) - (t - t_0)$ zamanından daha küçük olması imkansızdır. Böyle hızlı bir hareket olsaydı; yani, x_0’dan $x(t)$’ye olan hareket $t - t_0$ zamanda ve $x(t)$’den x_1’e $T(x_0) - (t - t_0)$ zamanından daha az olsaydı x_0’dan x_1’ e olan hareket $T(x_0)$’den daha kısa sürede olurdu. Halbuki $T(x_0)$ optimal zamandır. Bu yüzden $T(x_0) - (t - t_0)$, $x(t)$’den x_1’e optimal zamandır. Yani;

$$T(x(t)) = T(x_0) - (t - t_0),\ T = -W$$

$$-W(x(t)) = W(x_0) - (t - t_0)$$

dir. Buradan $W,\ t$’ ye göre diferansiyellenirse

$$[W(x(t))]' = [W(x_0) + (t - t_0)]'$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(x(t))}{\partial x^i} \dot{x}^i(t) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W\big(x(t)\big)}{\partial x^i} f^i\big(x(t), u(t)\big) = 1,\ t_0 \le t \le t_1 \qquad (2.4)$$

bulunur. Böylece her optimal süreç için yukarıdaki eşitlik tüm hareket boyunca sağlanır.

$$B(x,u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x^i} f^i(x,u) \qquad (2.5)$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre yukarıdaki denkliklerden

$$B(x,u) \le 1,\ x \ne x_1 \qquad (2.6)$$

elde edilir. Herhangi $(x(t), u(t))$ optimal süreci için,

$$B\big(x(t), u(t)\big) \equiv 1 \qquad (2.7)$$

elde edilir (Pontryagin ve ark., 1962).

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1. Kontrol edilebilir bir nesne için eğer Hipotez 2.1 ve Hipotez 2.2

sağlanırsa önceden belirlenen x_1 terminal durumu için (2.6) ve (2.7) sağlanır (Pontryagin ve ark., 1962).

Bu teorem, dinamik programlama metodunun temelini oluşturur. (2.7)'de $t = t_0$ yazılmasıyla

$$B\big(x(t_0), u(t_0)\big) = 1$$

$$B\big(x_0, u(t_0)\big) = 1$$

dir. Yani x_1'den farklı herhangi bir x_0 noktası için U kontrol bölgesinde $B(x_0, u) = 1$ olacak şekilde bir $u = u(t_0)$ vardır. (2.6) eşitsizliğine göre;

$$\max_{u\in U} B(x,u) = 1,\ x \neq x_1$$

olur. Bu ifadeye denk olarak

$$\max_{u\in U} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x^i} f^i(x,u) = 1,\ x \neq x_1 \qquad (2.8)$$

yazılabilir. Böylece Hipotez 2.1 ve Hipotez 2.2 sağlanırsa W fonksiyonu (2.8)'i sağlar. (2.8)'deki maksimum, optimal işlemler için elde edilir. Bu iddia, dinamik programlama metodunun alternatif bir formülünü verir. Bu formüle Bellman denklemi denir.

Dinamik programlama metodu, optimal işlemler üzerindeki bazı bilgileri bulmada kullanılabilir. Buna karşın bu metodun birçok olumsuz yanı da vardır. İlk olarak bu metotla optimal kontrol ediciler ve işleme konulan $W(x)$ hakkında bilgi sahibi olunamaz. Bellman denklemi, kısmi türevli diferansiyel denklem olduğundan karmaşık işlemler içerir. Fakat bu metodun en olumsuz yanı Hipotez 2.1 ve Hipotez 2.2 sağlandığında geçerli olmasıdır.

2.2.2. Maksimum Prensibi

Hipotez 2.3. $W(x)$ fonksiyonu sürekli ve iki kez kısmi türevlenebilir olsun.

$$\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^i \partial x^j}, i,j = 1.2 \ldots, n$$

Ayrıca $f^i(x,u)$ fonksiyonlarının 1. türevleri sürekli olsun. O halde

$$\frac{\partial f^i(x,u)}{\partial x^j}, i,j = 1.2 \ldots, n$$

dir (Pontryagin ve ark., 1962).

$(u(t), x(t),)$; $t_0 \leq t \leq t_1$ için hareketli bir nesneyi x_0 durumundan x_1 durumuna taşıyan bir optimal süreç olsun. $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığına t zamanı sabitlensin ve $B(x, u(t))$ fonksiyonunu ele alalım. Hipotez 2.3 ve $B(x, u)$ fonksiyonunun tanımı da göz önüne alındığında $B(x, u(t))$, $x^1, x^2, \dots, x^n$ değişkenlerine göre sürekli türevlere sahiptir.

$$\frac{\partial B(x,u(t))}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^i \partial x^k} f^i(x,u(t)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x^i} \frac{\partial f^i(x,u(t))}{\partial x^k}, k = 1 \dots \quad (2.9)$$

Bununla beraber (2.6) ve (2.7)'den

$$B(x,u(t)) \leq 1, \; x \neq x_1$$

$$B(x,u(t)) = 1, \; x = x(t)$$

elde edilir. Bu yüzden $B(x, u(t))$ maksimum değerini $x = x(t)$ noktasında alır. Buradan da $B(x, u(t))$'nin $x^1, x^2, \dots, x^n$ değişkenlerine göre kısmi türevi sıfırdır. Yani

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^i \partial x^k} f^i\big(x,u(t)\big) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x^i} \frac{\partial f^i\big(x,u(t)\big)}{\partial x^k} = 0, k = 1,2,\dots,n \quad (2.10)$$

dır. Buna ek olarak $\frac{\partial W(x(t))}{\partial x^k}$ nin t'ye göre türevi alınıp (2.3) hesaba katılırsa

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial W\big(x(t)\big)}{\partial x^k}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 W(x(t))}{\partial x^k \partial x^i} \dot{x}^i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 W(x(t))}{\partial x^k \partial x^i} f^i(x(t),u(t))$$

olur. Bu yüzden (2.10) aşağıdaki şekilde tekrar yazılırsa

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial W\big(x(t)\big)}{\partial x^k}\right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 W(x(t))}{\partial x^i \partial x^k} f^i(x(t),u(t)) = 0, k = 1,2,\dots,n \quad (2.11)$$

elde edilir. Burada (2.6), (2.7), (2.8) ve (2.11) sadece $\frac{\partial W(x)}{\partial x^1}, \frac{\partial W(x)}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial W(x)}{\partial x^n}$ türevlerini bulundururken W'nin kendisi bulunmamaktadır. Bu yüzden aşağıdaki notasyon tanımlanarak,

$$\frac{\partial W(x(t))}{\partial x^1} = \psi_1(t), \; \frac{\partial W(x(t))}{\partial x^2} = \psi_2(t) \dots, \frac{\partial W\big(x(t)\big)}{\partial x^n} = \psi_n(t) \quad (2.12)$$

(2.5) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$B\big(x(t),u(t)\big) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) f^i(x(t),u(t)) \equiv 1 \tag{2.13}$$

(2.6)'ya göre

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) f^i(x(t),u(t)) \leq 1, \exists u \in U, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \tag{2.14}$$

yazılabilir. Son olarak (2.11) aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\dot{\psi}_k(t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) \frac{\partial f^i(x(t),u(t))}{\partial x^k} = 0, k = 1,2,\dots,n \tag{2.15}$$

Bu yüzden $t_0 \leq t \leq t_1$ için $(x(t),u(t))$ bir optimal süreç ise (2.13), (2.14) ve (2.15)'i sağlayan $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, …, $\psi_n(t)$ fonksiyonları vardır.

(2.13) ve (2.14) denklemlerinin sol tarafları ele alındığında

$$H(\psi,x,u) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i\, f^i(x,u) = \psi_1 f^1(x,u) + \cdots + \psi_1(t) f^n(x,u) \tag{2.16}$$

yazılır. Bu fonksiyon yardımıyla (2.13) ve (2.14) aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$H(\psi(t),x(t),u(t)) \equiv 1,\ t_0 \leq t \leq t_1 \tag{2.17}$$

$\psi(t) = (\psi_1(t),\psi_2(t),\dots,\psi_n(t))$; (2.12) ile tanımlı fonksiyon ve

$$H(\psi(t),x(t),u) \leq 1,\ \exists\ u \in U, t_0 \leq t \leq t_1 \tag{2.18}$$

olur. (2.17) yardımıyla (2.18) yerine aşağıdaki ilişki yazılabilir.

$$\max_{u\in U} H(\psi(t),x(t),u) = H(\psi(t),x(t),u(t)),\ t_0 \leq t \leq t_1 \tag{2.19}$$

Son olarak (2.15) açıkça tekrar yazılabilir:

$$\dot{\psi}_k = \quad -\frac{\partial H(\psi(t), x(t), u(t))}{\partial x^k}, k = 1,2, \dots, n \tag{2.20}$$

Böylece eğer $(x(t), u(t))$ bir optimal süreç ise (2.17), (2.18) ve (2.20) sağlanacak şekilde bir $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))$ fonksiyonu vardır (Pontryagin ve ark., 1962).

(2.16), (2.17), (2.19) ve (2.20)'de $w(x)$ fonksiyonu açıkça bulunmadığından (2.12) denklemleri w ile ilgili bilgi vermeyip bu ihmal edilir. (2.20) denklemi, (2.17) ve (2.19)'u sağlayan bir denklem sistemidir ve $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ bu sistemin aşikar olmayan çözümlerini oluştururlar (Yani bu fonksiyonlar herhangi bir t anında aynı anda sıfır olamaz.). Gerçekten $\psi_1(t) = \psi_2(t) = \cdots = \psi_n(t) = 0$ alınsaydı (2.16)'dan $H(\psi(t), x(t), u(t)) = 0$ olurdu ki bu da (2.17) ile çelişir. Bu yüzden maksimum prensibi denilen aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 2.2. Farz edelim ki Hipotez 2.1, 2.2 ve 2.3 sağlansın. Ayrıca kontrol edilebilir nesne aşağıdaki vektör formuyla verilsin.

$$\dot{x} = f(x, u), u \in U \tag{i}$$

dir (Pontryagin ve ark., 1962).

x_0 başlangıç durumu ve x_1 durumu için $t_0 \le t \le t_1$ aralığında $\big(x(t), u(t)\big)$; x_0 noktasını x_1'e taşıyan optimal süreç olsun. H fonksiyonunu $x^1, x^2, \dots, x^n$, $u^1, u^2, \dots, u^r$ değişkenlerine ve $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, yardımcı değişkenlerine bağlı olacak şekilde tanımlayalım.

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f^i(x, u) \tag{ii}$$

Bu H fonksiyonu yardımıyla $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, yardımcı değişkenler için aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi yazılabilir.

$$\dot{\psi}_k = -\frac{\partial H(\psi, x(t), u(t))}{\partial x^k}, k = 1,2, \dots, n \tag{iii}$$

Eğer buradaki $(x(t), u(t))$ süreci optimal ise herhangi t zamanı için

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u) \tag{iv}$$

ve

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = 1$$

şartı sağlanacak şekilde (iii)'nin aşikar olmayan $(\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))$ çözümleri vardır (Pontryagin ve ark., 1962).

Aşağıdaki örnekte de göreceğimiz gibi bu teorem; optimal süreçleri bulmak için dinamik programlama metodundan çok daha kullanışlıdır. Buna karşın, burada verilen yapıda dinamik programlamada olduğu gibi maksimum prensibinin aynı eksiklikleri vardır. Yani maksimum prensibi, $W(x)$'in iki kez diferansiyellenebilme kabulü altında türetilir. Fakat önceden bahsedildiği gibi bu fonksiyon gerçekte her yerde diferansiyellenemez. Bazı genel durumlarda, hipotezlerin geçerliliğinin kabulünden dolayı yukarıda belirtilen dinamik programlama metodu ve maksimum prensibi optimallik için uygun şartlar değildir. Onlar optimallik için gerekli şart formunda üretilir. Eğer süreç, optimal ise sırasıyla (2.8) ve (iv) sağlanır. Buna karşın Hipotez 2.1, Hipotez 2.2, Hipotez 2.3 kabulleri altında bu şartlar türetilebilir. Fakat bunlar optimallik için gerekli olduğu anlamına gelmez. Bu yüzden yukarıda elde edilen teoremler, optimallik için gerek şart olarak alınamaz. Buna karşın,

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = 1$$

şartı daha zayıf bir

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) \geq 0 \tag{v}$$

gerektirmesiyle yer değiştirilirse bu formda W üzerinde herhangi bir varsayım olmadan maksimum prensibi sağlanır. Yani optimallik için maksimum prensibi çok uygun ve geniş bir şekilde uygulanabilir gerek şart olur (Pontryagin ve ark., 1962).

2.2.3. Sentez Problemi

Maksimum prensibi uygulamasına bir örnek verelim. Bir aracın hareket denklemi aşağıdaki gibi verilsin:

$$\dot{x}^1 = x^2$$

$$\dot{x}^2 = u \tag{2.21}$$

$$-1 \leq u \leq 1 \tag{2.22}$$

Burada x^1 aracın zamanla değişen yer koordinatını, x^2 aracın anlık hızı olup faz koordinatlarını göstermektedir. u parametresi ise aracın motoruna ait gücü olup kontrol parametresidir (Boltyanski, 1978).

Bu aracın verilen x_0 başlangıç durumundan (0,0) noktasındaki zaman-optimal varış problemini düşünelim. Başka bir deyişle x_1=(0,0) noktasının bir terminal durum olduğu zaman-optimal problemini ele alalım. Bu fiziksel olarak bir parçacığı verilen bir başlangıç durumu ve hızıyla, minimum sürede orjine taşımak anlamına gelmektedir.

Maksimum prensibine göre; H fonksiyonu

$$H = \psi_1 x^2 + \psi_2 u \tag{2.23}$$

şeklinde yazılır. Bununla beraber ψ_1, ψ_2 yardımcı değişkenleri için

$$\dot{\psi}_k = -\frac{\partial H}{\partial x^k} \implies \dot{\psi}_1 = 0,\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden

$\psi_1 = d_1,\ \psi_2 = -\,d_1 t + d_2$, ($d_1$, d_2 integrasyon sabiti)

bulunur.

Ayrıca maximum (iv) bağıntısı yardımıyla (2.22) ve (2.23) göz önüne alındığında

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \psi_2(t) > 0 \\ -1, & \psi_2(t) < 0 \end{cases}$$

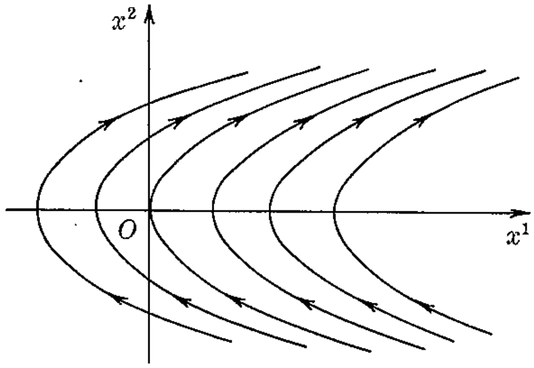
dir. $u(t) = sgn(\psi_2(t)) = sgn(-d_1 t + d_2)$ olur. Bu yüzden $t_0 \le t \le t_1$ aralığında ∓ 1 değerini alan her optimal $u(t)$ kontrolü parçalı sabit bir fonksiyondur ve en fazla iki sabitlik aralığı vardır ($-\,d_1 t + d_2$ lineer fonksiyonu$t_0 \le t \le t_1$ aralığında birden daha fazla işaret değiştirmez) (Boltyanski, 1978).

$u \equiv 1$ olduğu zaman aralığı için (2.21)'e bakıldığında;

$$x^2(t) = t + c^2$$

$$x^1(t) = \frac{(t+c^2)^2}{2} + c^1 \Rightarrow x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2 + c^1, (c^1, c^2 \text{ integrasyon sabitleri}) \tag{2.24}$$

Bu yüzden $u \equiv 1$ için faz yörüngesi, (2.24) parabolünün bir yayıdır. (2.24) paraboller ailesi Şekil (2.8.)'de gösterilmiştir.



Şekil 2.8. $u \equiv 1$ kontrolü için faz yörüngesi (Boltyanski, 1978)

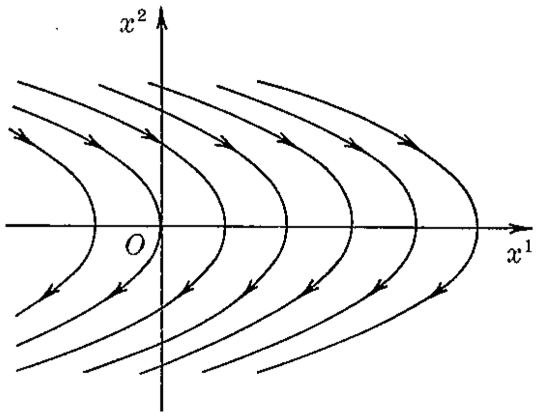
$\dot{x}^2 = u \equiv 1 > 0$ olduğundan faz noktaları paralel boyunca yukarıya doğru hareket etmektedir. Benzer şekilde $u \equiv -1$ olduğu zaman aralığı için;

$$x^2(t) = -t + c'^2,\ x^1(t) = \int x^2(t)dt = \frac{-1}{2}(-t + c'^2)^2 + c'^1$$

$$x^1(t) = \frac{-1}{2}(x^2)^2 + c'^1 \tag{2.25}$$

dir.

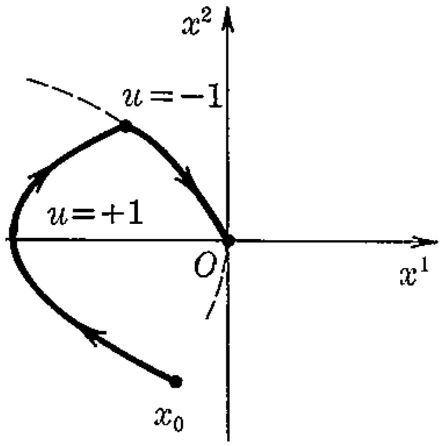
Bu paraboller ailesi Şekil 2.9. ile gösterilmiştir.



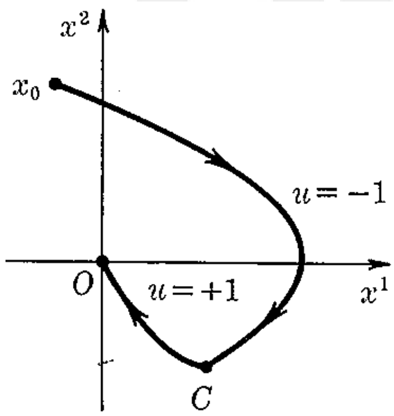
Şekil 2.9. $u \equiv -1$ kontrolü için faz yörüngesi (Boltyanski, 1978)

$\dot{x}^2 = u \equiv -1 < 0$ olduğundan faz noktaları paralel üzerinde yukarıdan aşağı doğru hareket etmektedir. Eğer $u(t)$ kontrolü kısa bir süre için $+1$ ile başlayıp -1 ile devam ederse faz yörüngesi iki parça parabol şeklinde oluşur ve bunlar birbirlerini keser. Sonrasında yörüngenin ikinci kısmı (2.25) parabol denklemi üzerinde hareket eder ve orjinden geçer. Benzer şekilde başlangıçta $u(t) = -1$ sonrasında $+1$ ise faz yörüngeleri

Şekil 2.10. ve Şekil 2.11’de gösterilmiştir.

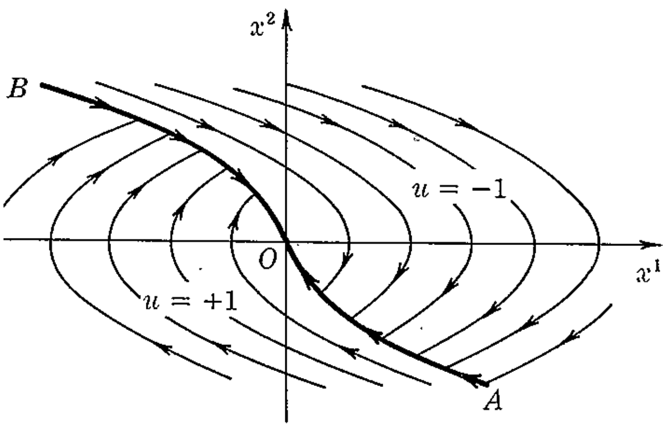


Şekil 2.10. $u(t) = 1$ ile başlayıp . $u(t) = -1$ ile devam eden faz yörüngesi (Boltyanski, 1978)



Şekil 2.11. $u(t) = -1$ ile başlayıp . $u(t) = +1$ ile devam eden faz yörüngesi (Boltyanski, 1978)

Böylece faz yörüngelerinin tüm ailesi Şekil 2.12 ile gösterilmiştir.



Şekil 2.12. Faz yörüngelerinin tüm ailesi (Boltyanski, 1978)

AO, alt yarı düzlemde $x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2$ parabolünün yayıdır.

BO, üst yarı düzlemde $x^1 = \frac{-1}{2}(x^2)^2$ parabolünün yayıdır.

Eğer x_0 başlangıç noktası, AOB yayının üstünde bulunuyorsa faz noktası (2.25) parabolü boyunca hareket eder. Buna karşın eğer x_0, AOB yayının altında ise faz noktası (2.24) parabolü boyunca (x_0'dan geçecek şekilde) devam eder. Başka bir deyişle x_0 başlangıç noktası, AOB yayı üstünde ise faz noktası $u = -1$ kontrolü altında (AO yayına ulaşıncaya kadar) hareket etmek zorundadır. Bu esnada anlık faz noktası AO yayına ulaşır. Sonra faz noktası orjine ulaşıncaya kadar u kontrolünün değeri $+1$ olarak değişir. Benzer şekilde başlangıç durumu AOB yayının altında bulunuyorsa, faz noktası BO yayına ulaşıncaya kadar $u = +1$ olmak zorundadır. BO yayına ulaştıktan sonra BO yayı üzerinde $u = -1$ olarak değişir (Boltyanski, 1978)

Bu yüzden maksimum prensibine göre Şekil 2.12'de gösterilen sadece yörüngeler optimal olabilir. Yukarıdaki incelemelerden de görüldüğü gibi; faz düzleminin her bir noktasından orjine giden sadece bir optimal yörünge vardır (Yani x_0 başlangıç noktasına karşılık gelecek olan yörünge tek türlü olarak belirlenir) (Boltyanski, 1978).

2.3. Kesikli Zamanlı Kontrol Edilebilir Süreçler

Kesikli zamanlı kontrol edilebilir yapıların matematiksel tanımına ulaşmak için ilk olarak t değişkeninin sadece kesikli değerler kümesi üzerinde $(t = 0,1,\dots,N)$ değer aldığını farz edelim (N bir doğal sayı) (Boltyanski, 1978).

Genel olarak $u^1, u^2, \dots, u^r$ olmak üzere r tane keyfi kontrol edicinin seçiminden bahsedilebilir. Bu yüzden her bir t anında $u(t)$ kontrol noktası r tane koordinata sahiptir:

$$u(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t))$$

$u^1, u^2, \dots, u^r$ değişkenler uzayında keyfi olarak kontrol ediciyi,

$$u(1), u(2), \dots, u(N) \tag{2.26}$$

şeklindeki noktalar dizisi olarak tanımlayalım.

Bir yapının durumu bir ya da iki faz koordinatı ile karakterize edilebilir.Buna karşın genel durumda her bir t anında yapının durumu, $x^1, x^2, \dots, x^n$ şeklindeki n tane faz koordinatı ile karakterize edilir. Bu yüzden her bir t anında $x(t)$ faz durumu

$$x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$$

olmak üzere n tane koordinatı vardır.

$$x(0), x(x), \dots, x(N) \tag{2.27}$$

durumlar dizisine bu yapının hareket yörüngesi denir.

$x(0)$ başlangıç durumu özel olarak verilmek koşulu ile eğer

$$x(t) = f_t\big(x(t-1), u(t)\big) \tag{2.28}$$

bağıntısı yardımıyla bir (2.26) kontrol edicisi seçilirse yapının bir sonraki davranışını açık bir şekilde belirleyebiliriz. Burada $f_t(x,u) = (f_t^1(x,u), f_t^2(x,u), \dots, f_t^n(x,u))$, E^n uzayında vektör fonksiyonudur. $f(x,u)$ fonksiyonundaki t indisi tüm zamanlar için tek bir $f_t(x,u)$'nin ele alındığını değil aksine çeşitli fonksiyonların bir andan bir sonraki ana değişmelerinin incelediğini gösterir. Başka bir deyişle eğer $f_t(x,u)$ fonksiyonu gerçekten t 'ye bağlı değilse sadece $f(x,u)$ fonksiyonu düşünülür. Buna göre (2.28) bağıntısı,

$$x(t) = f(x(t-1), u(t))$$

formuna dönüşür. (2.28) bağıntısı, kesikli kontrol edilebilir yapının hareket kanununu meydana getirir. (2.28)'i sağlayan (2.27) yörüngesine ise $x(0)$ başlangıç durumuna ve (2.26) kontrolüne karşılık geleceği söylenir.

Bununla birlikte her bir $x \in E^n$ için ve her bir $t = 1, \dots, N$ için boştan farklı $U_t(x)$ kümesi $u^1, u^2, \dots, u^r$ değişken uzayında özel olarak belirlenmelidir. Bu küme t anında x faz durumuna karşılık gelen kontrol bölgesidir. Sadece

$$u(t) \in U_t(\, x(t-1)) \tag{2.29}$$

koşulunu sağlayan (2.26) kontrollerini düşünelim. Burada (2.27) yörüngesi $x(0)$ başlangıç noktasından başlar ve (2.26) kontrolüne karşılık gelir. Bu şartı sağlayan kontrollere kontrol edilebilir denir.

(2.28) ve (2.29) bağıntıları kesikli kontrol edilebilir yapı olarak adlandırılır. Bu yapının kontrol süreci aşağıdaki şekilde meydana gelir:

$x(0)$ başlangıç faz durumu, özel olarak verildiğinden bu duruma karşılık gelen $U_1(\, x(0))$ kontrol bölgesi bilinmektedir. (2.29)'dan keyfi $u(1) \in U_1(\, x(0))$ kontrol edicisi seçilebilir. Sonra $t = 1$ anındaki $x(1)$ faz durumu belirlenir. $x(1)$'in bilinmesiyle ona karşılık gelen $U_2(\, x(1))$ kontrol bölgesi bulunur. Daha sonra keyfi $u(2) \in U_2(\, x(1))$ kontrol edici nokta seçildikten sonra $x(2)$ faz durumu bulunabilir. Böyle ardışık süreçlerin bir sonucu olarak elde edilen (2.26) kontrolünün $x(0)$ başlangıç durumuna göre kabul edilebilir olacağı ve elde edilen (2.27) yörüngesinin bu kontrole karşılık geleceği açık bir şekilde görülmektedir (Boltyanski, 1978).

Şimdi kesikli kontrol edilebilir yapılar için optimal kontrol etme problemini belirtelim. Bunun için özel olarak $f_t^0(x,u)$ verilsin.

Etkililik kriteri olarak, seçilen (2.26) ve (2.27) süreçlerin uygun olduğunu göstermesi açısından aşağıdaki fonksiyoneli ele alalım.

$$J = f_1^0\big(x(0),u(1)\big) + f_2^0\big(x(1),u(2)\big) + \cdots + f_N^0\big(x(N-1),u(N)\big)$$
$$= \sum_{t=1}^{N} f_t^0\big(x(t-1),u(t)\big) \tag{2.30}$$

Optimal kontrol etme problemi, başlangıç durumu bilinen bir yapının (2.30) fonksiyoneli maksimum olacak şekilde (2.26) kabul edilebilir kontrollerinin seçimine dayanır (Bazı durumlarda problemin türüne göre minumum da alınabilir).

Temel problem olarak adlandırılan bu problemde $x(0)$ başlangıç durumunun verildiği farz edilir ve (2.30) fonksiyonelinin değerinin maksimum olması hariç, zaman aralığının sağ ucundaki $x(N)$ hiçbir şekilde sınırlanmaz.

Örnek 2.1. (Maksimum Çarpım) Toplamları a ($a > 0$)'dan büyük olmayan ve çarpımları maksimum olan negatif olmayan N tane sayıyı bulunuz (Boltyanski, 1971).

Bu problemi çözmek yerine tekrar formülize edelim. Bunun için farz edelim ki N tane negatif olmayan sayının toplamı a dan büyük olmasın. Bu sayıları birlikte çarptıktan sonra elde edilen çarpımın ne kadar büyük olduğunu görelim. 1. saniyede negatif olmayan bir sayı seçelim. 2. saniyede 2. sayıyı seçelim (Seçilen iki sayının toplamı a yı geçemez.). Benzer şekilde N. saniyede N. sayıyı seçelim. t anında seçilen sayıyı $u(t)$ ile gösterelim. Buna göre N tane sayının toplamı $u(t)$ lerin toplamı şeklinde verilebilir. Buna karşın $u(t)$ fonksiyonları tüm t için değil sadece kesikli $t = 1,2,\dots,N$ değerler kümesi için belirlenir.

Herbir anda $u(1), u(2), \dots, u(N)$ sayılarından biri seçilir ve seçilen bu sayıların toplamı ve çarpımı hesaplanır. Toplam, bir sonraki sayı için seçimin limitini bilmek için gereklidir (Yani a sayısına ne kadar kaldığını saptamak için). Süreç sonundaki tüm sayıların çarpımını bulmak için her bir anda seçilen sayıların çarpımını bulmak yararlı olacaktır.

$x^1(t)$; t saniye boyunca seçilen tüm sayıların toplamı, $x^2(t)$; t saniye boyunca seçilen tüm sayıların çarpımı olsun. O halde

$x^1(t)= u(1)+\ u(2)+\cdots+u(N)$

$x^2(t)=u(1)\,u(2)\ldots u(N)$

şeklinde yazılabilir.

t anında $u(t)$ sayısı seçildikten sonra tüm önceki sayıların toplamını bulmak için $u(t)$ sayısını önce seçilen sayılar olan $x^1(t-1)$ ye eklemek gerekir. Yani

$$x^1(t)=x^1(t-1)+u(t) \tag{2.31}$$

Burada,

$x^1(t-1)=u(1)+\ u(2)+\cdots+u(t-1)$

dir. Benzer şekilde $x^2(t)$ ise t anında seçilen $u(t)$ ile öncesinde seçilen sayıların çarpımı ile elde edilir. Yani;

$$x^2(t)=x^2(t-1)u(t) \tag{2.32}$$

(2.31) ve (2.32) formülleri $t=2,3,\ldots,N$ için uygulansın. Buna göre $t=1$ için $x^1(1)=u(1)$, $x^2(1)=u(1)$ dir. Bu iki bağıntı

$$x^1(0)=0 \qquad x^2(0)=1 \tag{2.33}$$

varsayımları altında sağlanır. Böylece (2.31) ve (2.32) formülleri $t=1,2,3,\ldots,N$ için geçerli olur.

t anında seçilen tüm sayıların toplamı a'dan büyük olmadığı için,

$x^1(t-1)+u(t)\le a$

$u(t)\le a-x^1(t-1)$

yazılır. Bununla birlikte $u(t)$ negatif olmayan bir sayı olduğundan

$$0\le u(t)\le a-x^1(t-1) \tag{2.34}$$

dir. Buradan

$$u(t) \in U\left(x^1(t-1)\right) \tag{2.35}$$

dir. Burada $U\left(x^1(t-1)\right)$, (2.34) aralığını göstermektedir.

(2.31), (2.32) formülleri kesikli kontrol edilebilir yapıları göstermektedir. Burada x^1, x^2 faz koordinatları, u ise kontrol edici parametredir.

$x^1(0), x^1(1), \dots, x^1(N)$

$x^2(0), x^2(1), \dots, x^2(N)$

dizileri (2.31), (2.32) formülleri ile tanımlanan ve (2.33) başlangıç koşulları yardımıyla $u(1), u(2), \dots, u(N)$ kontrollerine karşılık gelen yörüngelerdir. Eğer (2.35) bağıntısı her bir $t = 1,2, \dots, N$ anında sağlanıyorsa bu kontrollere kabul edilebilir (admissible) denir (Boltyanski, 1978).

Maksimum çarpım problemi aşağıdaki gibi bulunabilir.

Buna göre amaç, (2.31) ve (2.32) kontrol edilebilir yapıları için $x^2(N)$ maksimum değer alıyor iken (2.35) sağlanacak şekilde bir kabul edilebilir kontrol ve buna karşılık gelen, başlangıç koşullu yörünge bulmaktır.

Örnek 2.2. Maksimum çarpım problemini kesikli kontrol edilebilir yapı problemine indirgemenin diğer bir anlamını düşünelim. Bunu yapmak için daha önceden denenmemiş örneği farklı bir şekilde ele alalım. Örnek 2.1'deki çarpanların sadece pozitif olduğu durumu farzedelim (Çarpanlardan biri sıfır olsaydı çarpım sıfır olurdu.). Çarpımı basitleştirmek için çarpanların logaritmik toplamlarını hesaplayalım (Boltyanski, 1971).

Bu yaklaşımı kullanarak $u(t)$, $t = 1,2, \dots, N$ kontrolü ve birinci faz koordinatı $x^1(t)$, $t = 0,1,2, \dots, N$ orijinal anlamlarını korur. İkinci faz koordinatına ve onunla ile ilgili bağıntılara gerek duyulmaz. Bununla birlikte ardışık olarak $u(1), u(2), \dots, u(N)$ seçildikten sonra

$$J = \ln\,(u(1)) + \ln\,(u(2)) + \cdots + \ln\,(u(N)) \tag{2.36}$$

hesaplanır. Bu toplam mümkün olduğunca büyük olabilir.

(2.34) kısıtını aşağıdaki şekilde yazalım. $M_1 = [0, a]$ olsun.

$$x^1(N) \in M_1 \tag{2.37}$$

sağlansın.

$x^1(N) = u(1) + u(2) + \cdots + u(N)$ olduğundan (2.37)'den bu toplam a'yı geçemez. Bu yüzden tüm bu sayılar pozitiftir. (2.29) daha basit olarak

$$u(t) > 0,\ t = 1,2, \dots N \tag{2.38}$$

şeklinde yazılır. Bu yüzden $U\big(x^1(t-1)\big)$ kontrol bölgesi, $x^1(t-1)$'den bağımsız olarak $U = (0, \infty)$ aralığı şeklinde yazılır. Sonuç olarak, yukarıdaki örnek aşağıdaki şekilde formüle edilebilir.

Bu örnekteki amaç, (2.31) kesikli kontrol edilebilir yapısı göz önüne alındığında $x^1(0)$ başlangıç koşullu, $x^1(0), x^1(1), x^1(2), \dots, x^1(N)$ yörüngeleri için, (2.37) sağlanıp (2.36) toplamı en yüksek değeri alacak şekilde (2.38) şartını sağlayan bir $u(1), u(2), \dots, u(N)$ kontrolü bulmaktır (Boltyanski, 1978).

2.4. Sürekli Zamanlı Kontrol Edilebilir Süreçler

Matematiksel programlama, kesikli kontrol edilebilir yapılar için optimallik kriterini belirleme yollarından birisidir. Burada kesikli kontrol edilebilir yapılar için düşünülen teoremlerin aksine kesikli olmayan, sürekli zamanlı süreçler için optimallik düşünülecektir. Bu problem iki sebepten ortaya çıkar. Birincisi sürekli yapıların optimal kontrol teorisinde elde edilen sonuçlar kesikli yapıdaki benzer teoremlerle formüle edilebilir. İkincisi sürekli yapılar, kesikli yapıların limiti alınmış durumu olması bakımından kesikli ve sürekli kontrol edilebilir yapılar arasındaki ilişki önemlidir. Örneğin kesikli süreçler açısından sürekli süreçlerin yaklaşık olarak açıklanması ya da tam tersi olarak yorumlanmasıdır.

Örnek 2.3. Örnek 2.2'deki kesikli kontrol edilebilir yapıyı ele alalım. Bu yapı içerisinde limitte sürekli kontrol edilebilir yapıya geçtiğimizi varsayalım. Bu yüzden bu kesikli yapıyı

$$x^1(t) = x^1(t-1) + u(t) \tag{2.39}$$

$$u(t) \in U \tag{2.40}$$

$$x^1(0) = 0,\ x^1(N) \in M_1 \tag{2.41}$$

$$U = (0, \infty)\ ,\ M_1 = [0, a]$$

ele alalım. Bu yapı için

$$J = \sum_{t=1}^{N} \ln\,(u(t)) \tag{2.42}$$

fonksiyonelinin en büyük değerini veren süreci bulmak istiyoruz (Boltyanski, 1971).

Farz edelim ki N yeterince büyük olsun ve

$$u(1), u(2), \dots\ , u(N) \tag{2.43}$$

kontrolünün ve bu kontrole karşılık gelen

$$x(0), x(x), \dots\ , x(N) \tag{2.44}$$

yörüngelerinin davranışının grafiksel gösterimini istiyoruz.

N yeterince büyük olduğu için sıradan zaman ölçeğine bu grafiksel gösterim uygun değildir. Bu yüzden,

$$\tau = th,\, t = 0{,}1, \dots, N \tag{2.45}$$

şeklinde tanımlanan yeni bir bağımsız τ değişkeni tanımlamak için t yerine h adımı seçmek daha uygundur. Buna göre $\tau = 0, h, 2h, \dots, Nh$ değerlerini alır. h adımının seçimi aşağıdaki gibi karakterize edilir:

$$h = \frac{a}{N} \tag{2.46}$$

Eğer τ ya bağlı y^1 ve v değişkenlerini tanımlanırsa;

$$y^1(\tau) = x^1\left(\frac{\tau}{h}\right) = x^1(t)$$

$$v(\tau) = \frac{1}{h}u\left(\frac{\tau}{h}\right) = \frac{1}{h}u(t) \tag{2.47}$$

elde edilir. Ayrıca

$$y^1(\tau - h) = x^1\left(\frac{\tau-h}{h}\right) = x^1\left(\frac{\tau}{h} - 1\right) = x^1(t-1)$$

eşitliğini kullanılarak (2.39) eşitliği

$$y^1(\tau) = y^1(\tau - h) + hv(\tau)$$

ya da

$$\frac{y^1(\tau) - y^1(\tau - h)}{h} = v(\tau) \tag{2.48}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin sol kısmında $h \to 0$ için limite geçilirse $\frac{dy^1}{d(\tau)}$ elde edilir. Bu da (2.47) eşitliğinde ikinci formülünün sağ kısmına eşittir. Bununla birlikte yeni değişkenler yardımıyla (2.40), (2.41) bağıntıları,

$$v(\tau) \in U \tag{2.49}$$

$$y^1(0) = 0,\ y^1(a) \in M_1 \tag{2.50}$$

($y^1(a)$=$x^1\left(\frac{a}{h}\right) = x^1(N)$) şeklinde yazılabilir.

Burada $U = (0, \infty),\ M_1 = [0, a]$ dır.

Son olarak (2.42) fonksiyoneli;

$$J = \sum_{t=1}^{N} \ln\left(u(t)\right) = \sum \ln\left(h\, v(\tau)\right) = \sum (\ln(h) + ln\, v(\tau)) = Nln(h) + \sum ln\left(v(\tau)\right)$$

$$= Nln(h) + \frac{1}{h}\sum h \ln\left(v(\tau)\right),$$

formunda yazılır. $Nln(h)$ terimi ve $\frac{1}{h}$ pozitif çarpanı sabittir. J'nin maksimum problemi,

$$I = \sum h \ln\big(v(\tau)\big) \tag{2.51}$$

yukarıdaki maksimum problemine denktir (Boltyanski, 1978).

Şimdiye kadar yapılan her şey basit bir değişken değişikliği ile oluşturulmuştur.

Kesikli zamanlı (2.48), (2.50) kontrol edilebilir yapıları için (2.51) maksimizasyon problemi ile kesikli zamanlı (2.39), (2.41) sisteminin maksimum probleminde yalnızca notasyon farklılığı vardır.

Buna karşın (2.48)-(2.51) tekrar yorumlanabilir. (2.48) bağıntısı,

$$\frac{dy^1(\tau)}{d(\tau)} = v(\tau) \tag{2.52}$$

denkleminin bir yaklaşımıdır.

(2.51) denkleminin sağ kısmı ise toplam $\tau = h, \ldots, Nh = a$ olarak düşünüldüğünde bir integral toplamı olduğundan belirli integral;

$$I^* = \int_0^a \ln\big(v(\tau)\big)\, d\tau \tag{2.53}$$

şeklinde gösterilir. Bu yüzden kesikli optimal kontrol etme problemi yaklaşık olarak τ sürekli değişkenine sahip bir probleme karşılık gelir (Boltyanski, 1978).

Amaç, bir $v(\tau)$ kontrol edicisi bulmaktır. Yani $y^1(0) = 0$ başlangıç koşullu (2.52) diferansiyel denkleminin $y^1(\tau)$ çözümü olacak şekilde $0 \leq \tau \leq a$ aralığında tanımlı ve U kümesi üzerinde değerler alan bir fonksiyon, I^* integrali mümkün olduğuca büyük iken $y^1(a) \in M_1$ sınır koşulunu sağlar. Bu, bir sürekli optimal kontrol etme problemidir. Buradaki t kesikli zaman değişkeni yerine τ sürekli değişkeni ele alınır. O halde bu iki optimal kontrol etme problemi yaklaşık olarak birbirine denk midir? Açıkça (2.39)-(2.41) kesikli yapısındaki her kontrol edilebilir $(u(t), x^1(t))$ süreci için (2.52), (2.49), (2.40) sürekli yapısının bir kabul edilebilir sürecinin bulunması hedeflenmektedir. Bu nedenle eğer sürekli problem daha kolay ise (Yani $v(\tau)$ ve $y^1(\tau)$ bulunarak) (2.39)-(2.42) kesikli optimal kontrol etme probleminin yaklaşık çözümü elde edilir. Böylece güvenilir bir sadeleştirme metodu uygulanmış olur. Bir problemin diğeriyle yer değiştirilmesiyle tanımlanan hata bilinebilir fakat burada bu incelenmemiştir (Boltyanski, 1971).

(2.52), (2.49), (2.50), (2.53) sürekli problemini çözmek kolaydır. İlk olarak (2.52) ve (2.50) yardımıyla;

$$\int_0^a \frac{dy^1(\tau)}{d(\tau)} d(\tau) = \int_0^a v(\tau) d(\tau) = y^1(a) - y^1(0)$$

$$\Rightarrow\ y^1(a) = y^1(0) + \int_0^a \frac{dy^1(\tau)}{d(\tau)} d(\tau) = \int_0^a v(\tau)\ d(\tau)$$

$y^1(0) = 0, \;\; y^1(a) \in [0, a]$ olduğundan

$$\int_0^a v(\tau)\; d(\tau) \leq a \tag{2.54}$$

elde edilir. $(0, \infty)$ aralığında $\ln(v) \leq v - 1$ eşitsizliği göz önüne alındığında; $v = 1$ için fonksiyon sıfıra gider, $v > 1$ için azalan, $0 < v < 1$ için artan bir fonksiyondur. Buna göre (2.49)'dan

$$lnv(\tau) \leq v(\tau) - 1$$

yazılır. Buna göre

$$\int_0^a lnv(\tau)\; d(\tau) \leq \int_0^a (v(\tau) - 1)\; d(\tau) = \int_0^a v(\tau)\; d(\tau) - a \leq 0$$

elde edilir.

Eşitlik sadece $v(\tau) \equiv 1$ için sağlanır. Bu aynı zamanda bir sürekli yapı için formülü verilen problemin çözümünü verir. $v(\tau) \equiv 1$ olduğundan $I^* = 0$ olur. Herhangi kabul edilebilir kontrol için I^* fonksiyoneli daha düşük değerler (negatif değerler) alabilir.

Verilen sürekli yapının optimal kontrol etme problemi için $v(\tau) \equiv 1$ kesin bir çözüm olduğunda (2.47) formülleri, kesikli yapının yaklaşık bir çözümünü elde etmek için kullanılabilir.

$$u(t) = hv(\tau) \equiv h = \frac{a}{N}, (t = 1, 2, \ldots, N)$$

Bu yüzden (2.39)-(2.41) probleminde Örnek 2.2.'de ele alınan kesikli yapı için aşağıdaki kontrol edici optimaldir ve tektir. Yani

$$u(1) = u(2) = \cdots = u(N) = \frac{a}{N}$$

dir.

Örnek 2.1.'deki maksimum çarpım problemine geri dönülürse, toplamları a'dan büyük olmayan N tane negatif olmayan sayının çarpımı, sayıların her biri $\frac{a}{N}$ olduğunda maksimum olur. Diğer durumlarda çarpım daha küçük olur. Bu sonuç, sürekli yapı ile beraber düşünüldüğünde yaklaşık olarak elde edilmiştir (Boltyanski, 1978).

Sürekli optimal kontrol etme problemini elde etmek için yapılan indirgemedeki benzer işlemler, kesikli optimal kontrol etme problemi için de yapılabilir. Buna karşın sürekli bir problemden kesikli probleme geçiş daha elverişlidir. Bir kural olarak, sürekli optimal kontrol etme problemi tam çözüm için uygun değildir. Bu yüzden sürekli problemi daha basit kesikli problem ile değiştirmek yaklaşık çözüm bulma anlamına gelmektedir.

Sürekli bir problemi kesikli yapıya indirgemeye çalışalım. Optimal kontrolün sürekli problemini kullanarak aşağıdaki örneği inceleyelim (Boltyanski, 1971).

$$\frac{dy}{d\tau} = g(y, v) \tag{2.55}$$

$y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ faz uzayının durum vektörü, $v = (v^1, v^2, \dots, v^r)$ kontrol vektörü, V kümesi kontrol bölgesi, T; $(v^1, v^2, \dots, v^r)$ değişkenler uzayında pozitif bir sayı olsun. Herhangi parçalı sürekli $v(\tau)$ fonksiyonu $0 \le \tau \le T$ aralığında sürekli ve V kümesi üzerinde değerler almaktadır.

$$v(\tau) \in V \tag{2.56}$$

Bu kontrole kabul edilebilir denir. Bununla birlikte bir y_0 ve M_1 kümesi; $y^1, y^2, \dots, y^n$ değişkenler uzayında tanımlı olsun. Son olarak $y(\tau)$ ve $v(\tau)$ fonksiyonları bilinmek koşulu ile elde edilen $g^0(y, v)$ fonksiyonu aşağıda tanımlı integral ile kullanılabilir. Yani

$$I^* = \int_0^T g^0\big(y(\tau), v(\tau)\big)d\tau \tag{2.57}$$

(2.55)'in çözümü olan $y(\tau)$, $y(0) = y_0$ başlangıç koşulunu ve $y(T) \in M_1$ bitiş koşulunu sağlar.

Bu sürekli problemi kesikli probleme indirgemek için N doğal sayısını ele alalım. $h = \frac{T}{N}$ ve $\tau = 0, h, \dots., Nh = T$ olsun. Ayrıca $t = \frac{\tau}{h}$ olacak şekilde yeni kesikli bir değişken tanımlayalım ($t = 0, 1, \dots, N$). Bununla beraber y ve v değişkenleri yerine x ve u değişkenlerini tanımlayalım. Buna göre

$$x(t) = y(th) = y(\tau) \dots$$
$$u(t) = v(th) = v(\tau) \tag{2.58}$$

elde edilir (Bu yerine koyma (2.47)'deki yerine koymadan farklıdır.) (Boltyanski, 1978).

Şimdi farzedelim ki $v(\tau)$ kabul edilebilir bir kontrol (sürekli problem açısından düşünüldüğünde) ve $y(\tau)$ ona karşılık gelen yörünge olsun. Burada $y(0) = y_0$ başlangıç koşullu $v = v(\tau)$ için (2.55) diferansiyel denkleminin çözümüdür. Bu nedenle

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = g(y(\tau), v(\tau))$$

dir. Bu bağıntı yaklaşık olarak şu şekilde elde edilebilir:

$$\frac{y(\tau) - y(\tau - h)}{h} \cong g(y(\tau), v(\tau)) \cong g(y(\tau - h), v(\tau))$$

Burada sadece $\tau = h, \dots., Nh$ olduğu düşünülür. Yukarıdaki yaklaşımdan

$$y(\tau) \cong y(\tau - h) + hg(y(\tau - h), v(\tau))$$

denkliği yazılabilir ya da (2.58)' den

$$x(t) \cong x(t-1) + hg\big(x(t-1), u(t)\big), \; t = 1, 2, \dots, N \tag{2.59}$$

bulunur. Buna ek olarak (2.57) integrali, integral toplamı şeklinde yaklaşık olarak şu şekilde elde edilebilir:

$$I^* \approx \sum_{t=1}^{N} hg^0(y(\tau), v(\tau)) \approx \sum_{t=1}^{N} hg^0(y(th), v(th)) \approx \sum_{t=1}^{N} hg^0(y(th - h), v(th))$$

$$= h \sum_{t=1}^{N} g^0(x(-1), u(t)) \tag{2.60}$$

Son olarak başlangıç bitiş koşulları ve (2.56) bağıntısı, (2.58) ile beraber düşünüldüğünde

$$u(t) \in V \tag{2.61}$$

$$x(0) = y_0, \; x(N) \in M_1 \tag{2.62}$$

f fonksiyonu (2.59)'un sağ tarafında kalan kısmı olsun. Yani:

$$f(x, u) = x + hg(x, u)$$

dir.

Hata terimini tanımlayarak (2.59)'daki yaklaşık olan denklem yerine kesin bir denklem olarak

$$x(t) = f\big(x(t-1), u(t)\big)$$

denklemini tanımlansın. Bununla birlikte (tekrar hatayı ihmal etmeden) I^* integralini (2.60)'ın sağ tarafı ile değiştirebiliriz. Buna göre yeni problem, I^* fonksiyonelinin maksimumunu bulma probleminden

$$J = h\sum_{t=1}^{N} g^0(x(t-1),\, u(t)) \tag{2.63}$$

fonksiyonelinin maksimumunu bulma problemine dönüşür (Boltyanski, 1978).

2.5. Kesikli Problemleri Çözme Metotları

2.5.1. Dinamik Programlama

Kesikli kontrol edilebilir yapıların optimalliğini bulmak için kullanılan metotları araştıralım. Bunlardan bir tanesi Bellman (1957) tarafından geliştirilen dinamik programlamadır. Dinamik programlama temel olarak şu şekilde oluşur: (2.41)-(2.43) kesikli yapılarında $u(1), u(2), \ldots, u(k)$ kontrol edicileri ve $x(0), x(1), \ldots, x(k)$ yörüngeleri sürecin başlangıcından $t = k$ anına kadar seçilmişti. Bu andan itibaren $u(k+1), \ldots, u(N)$ ve $x(k+1), \ldots, x(N)$ elemanları seçilerek sürecin tamamlanması istenmektedir. Eğer sürecin tamamlanmış olan kısmı ($t = k$'dan $t = N$'ye kadar) optimal değilse, süreci maksimum yapan

$$J = \sum_{t=k+1}^{N} f_t^0\big(x(t-1), u(t)\big) \tag{2.64}$$

fonksiyoneli açısından sürecin tamamı da optimal olmayacaktır. Aslında sürecin sonuna eklenecek olan ve (2.30)'daki terimlerin toplamından daha büyük olan değişkenler çeşitli olsaydı bu sürece bir bütün olarak kolaylık sağlardı (Boltyanski, 1971).

Bellman (1957)'a göre bu kesin fikir aşağıdaki gibi gerçeklenir. Farz edelim ki $t = k$ anında $x = x(k)$ noktasındayız (Başlangıç durumundan buraya nasıl ulaştığımız ihmal ediliyor.).

Tüm olası yöntemler kullanılarak sürecin $u(k+1), \ldots, u(N)$, ve $x(k+1), \ldots, x(N)$ tamamlanan kısmı gerçekleştirilir ((2.28) ve (2.29) nün sağlanması açısından).

Sürecin her bir tamamlanan kısmı için $w_k(x) = w_k(x(k))$ (2.64)'teki tüm toplamların en büyüğünü göstermek üzere hesaplanır. Bu yüzden $x = x(k)$ noktasından başlayarak sürecin tamamlanan kısmı, $w_k(x)$ değerinden büyük olmayacak şekilde seçilebilir. $k = 0, 1, \dots, N$ için $w_0(x), w_1(x), \dots, w_N(x)$ fonksiyonları elde edilir. Açıkça $w_N(x) = 0$ dır. Çünkü (2.64) toplamında $k = N$ için hiçbir terim bulunmayacağından toplam sıfır olur. Bununla birlikte $w_0(x_0)$, (2.68) toplamının maksimum değeridir. Başka bir deyişle, $w_0(x_0)$ değeri, $x(0) = x_0$ başlangıç koşullu bir optimal sürece karşılık gelen J fonksiyonelinin değeridir. Çünkü kesikli optimal kontrol problemi, sadece $w_0(x_0)$ değerini bulmaktan oluşur. Bu yüzden $w_N(x) = 0$'dan başlayarak ardışık olarak $w_{N-1}(x), \dots, w_0(x)$ fonksiyonlarının değerlerinin bulunmasıyla kesikli yapıların kontrol etme problemi çözülebilir (Boltyanski, 1971).

$t = k - 1$ anında $x = x(k-1)$ noktasından başlandığı farz edilerek sürecin en iyi sonunu seçelim. Yani

$$J_{k-1} = \sum_{t=k}^{N} f_t^0(x(t-1), u(t)) \tag{2.65}$$

fonksiyoneli maksimum $w_{k-1}(x)$ değerini aldığında $u(t)$, $x(t)$'yi seçelim.
Bu toplam;

$$f_k^0(x(k-1), u(k)) + \sum_{t=k}^{N} f_t^0(x(t-1), u(t))$$

eşitliğinin sağındaki ikinci terim olan J_k değerine eşittir. Bu değer ise $w_k(x_k)$ dır. Yani bu terim, J_k toplamının muhtemel en büyük değerine eşittir. Bu nedenle

$$w_{k-1}(x) = f_k^0\big(x(k-1), u(k)\big) + w_k(x)) \tag{2.66}$$

dir.

Eğer $x(k), u(k)$; $x = x(k-1)$ noktasından başlayan sürecin bitimine girerse bu bağıntı geçerlidir. Buna karşın keyfi $x(k), u(k)$ seçilirse yukarıdaki eşitlik

$$w_{k-1}(x) \geq f_k^0\big(x(k-1), u(k)\big) + w_k(x) \tag{2.67}$$

eşitsizliği olarak yazılmak zorundadır. Bu yüzden $w_{k-1}(x)$; uygun $u(k), x(k)$ seçilmesiyle elde edilebilen $f_k^0\big(x(k-1), u(k)\big) + w_k$(x) toplamının tüm değerlerinin en büyüğüdür. Yani

$$w_{k-1}(x) = \max\,[f_k^0\big(x(k-1), u(k)\big) + w_k(x)]$$

dir. $x(k)$ ile $f_k\big(x(k-1), u(k)\big)$ yer değiştirilip $x(k-1) = x$ yazılmasıyla son olarak,

$$w_{k-1}(x) = \max_{u \in U_k(x)}\big[f_k^0(x,u) + w_k\big(f_k(x,u)\big)\big] \tag{2.68}$$

eşitliği elde edilir. Bellman denklemi olarak bilinen (2.68) eşitliği, $w_N \equiv 0$'dan başlayarak ardışık olarak $w_{N-1}, \dots, w_0$ fonksiyonlarının bulunmasını sağlar. (2.68) eşitliği yardımıyla, aranan $w_0(x)$ fonksiyonunu bulmak için kullanılan bu tekniğe dinamik programlama denir. (Boltyanski, 1971).

Bu tekniğin pratik uygulaması genellikle geniş hafızalı bilgisayarların kullanımı için gereklidir. Fakat burada ardışık hesaplama yaparken son ana kadar ($w_0(x)$ bulunana kadar) hangi $x(t)$ durumunun optimal yörünge olduğu anlaşılamaz. Bu yüzden teoride tüm x değerleri için $w_k(x)$ fonksiyonlarının değerleri bulunmak zorundadır. Bu, aynı anda farklı $x(0)$ başlangıç durumlarına karşılık gelen optimal yörüngeleri bulmaya denktir (Boltyanski, 1971).

2.5.2. Kesikli Maksimum Prensibi

Sürekli süreçlerin optimal kontrol teorisinde kullanılan iki temel yöntemden birisi önceki bölümde ele alınan dinamik programlama metodudur. Diğer metot ise Pontryagin'in maksimum prensibidir. İlk olarak bu metot, sürekli optimal kontrol problemlerinin çözümüne dayanır. Maksimum prensibinin keşfi ve ispatlanmasından hemen sonra bu prensibin kesikli varyasyonunu bulma girişimlerinde bulunuldu. Şimdi bununla ilgili ilk olarak sabit zamanlı sürekli optimal kontrol problemi düşünülmesine rağmen temel olarak kesikli problem amacı korunarak maksimum prensibi formülü verilsin. Bu yüzden (2.55)-(2.59) problemlerine geri dönülsün. Burada M_1 kümesinin tüm $y^1, y^2, \dots, y^n$ değişken uzayına özdeş olduğu varsayılır. Bu durumda maksimum prensibi aşağıdaki gibi gösterilir (Boltyanski, 1971).

Yardımcı değişkenler $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ tanımlanır (n ,$y^1, y^2, \dots, y^n$ faz değişkenlerinin sayısı). Bu değişkenler ile yardımcı formül yazılırsa,

$$\widetilde{H}(\varphi, y, v) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i g^i(y\ v) \tag{2.69}$$

elde edilir. Burada g^0 ; (2.57) fonksiyonelinin tanımına giren fonksiyon ve $g^1, g^2, \dots, g^n$ ise (2.55)'in sağındaki $g(y, v)$ vektör fonksiyonunun bileşenleridir. Ayrıca yardımcı bilinmeyenler için aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi yazılsın.

$$\frac{d\varphi_j}{d\tau} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y^j} = -\sum_{i=0}^{n} \varphi_i \frac{\partial g^i(y\ v)}{\partial y^j}, j\ = 1, \dots, n \tag{2.70}$$

Burada

$$\varphi_o = 1 \tag{2.71}$$

alınır (Boltyanski, 1971). Farz edelim ki $v(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T$ kabul edilebilir kontrol olsun (Yani $v(\tau)$, (2.56) şartını sağlar). $y(\tau)$, (2.55) denkleminin çözümü iken $v(\tau)$ (2.56)'yı sağlar. $y = y(\tau)$, v= $v(\tau)$ fonksiyonları (2.70) eşitliğinin sağ tarafına yazılr ve $\varphi(\tau)$'ye

$$\varphi_1(T) = \varphi_2(T) = \cdots = \varphi_n(T) = 0 \tag{2.72}$$

başlangıç koşullu sistemin çözümü denir.

Eğer $(y(\tau),\ v(\tau))$ süreci optimal ise aşağıdaki maksimum bağıntısı geçerli olacaktır.

$$\widetilde{H}(\varphi(\tau)\,, y(\tau)\,, v(\tau)\,) = \max_{v \in V} \widetilde{H}(\varphi(\tau)\,, y(\tau)\,, v\,) \tag{2.73}$$

Yani, herhangi $v \in V$ için,

$$\widetilde{H}(\varphi(\tau)\,, y(\tau)\,, v(\tau)\,) \geq \widetilde{H}(\varphi(\tau)\,, y(\tau)\,, v\,)$$

elde edilir.

Eğer (2.57)'nin minimumu sorulmuş olsaydı

$$\varphi_o = -1$$

olması dışında formulasyon aynı kalırdı.

Maksimum prensibi, optimallik için gerek şartı verir. Çoğu durumda $y(0) = y_0$ başlangıç koşullu tüm süreçlerin dışında tek $v(\tau), y(\tau)$ sürecini seçmek optimallık için daha avantajlıdır (Boltyanski, 1971).

Şimdi maksimum prensibinin kesikli yapı için formülünü oluşturmaya çalışalım. Bunu yapmak için sürekli problemden kesikli probleme geçmek için önceki kısımda kullanılan geçiş yöntemi kullanılır. İlk olarak (2.58)'deki yerine koyma yapılır ve buna ek olarak ψ değişeni;

$$\psi\,(\mathrm{t}) = \varphi(th) = \varphi(\tau) \tag{2.74}$$

tanımlanır ve $\widetilde{H}$ fonksiyonu ψ, x, u bağımsız değişkenlerine bağlı olarak elde edilir.

$$\widetilde{H} = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \psi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t})\mathrm{g}^{\mathrm{i}}\big(\mathrm{x}(\mathrm{t}-1), \mathrm{u}(\mathrm{t})\big), (\psi_0 = \varphi_0)$$

Yeni değişkenler yardımıyla (2.73) bağıntısı herhangi $u \in V$ için;

$$\widetilde{H}(\psi\,(t)\,, x(t-1)\,, u(t)\,) \geq \widetilde{H}(\psi\,(t)\,, x(t-1)\,, u\,), \qquad t = 1,2, \dots, N$$

şeklinde yazılır. Yani,

$$\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \psi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t})\mathrm{g}^{\mathrm{i}}(\mathrm{x}(\mathrm{t}-1), \mathrm{u}(\mathrm{t})) \geq \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \psi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t})\mathrm{g}^{\mathrm{i}}(\mathrm{x}(\mathrm{t}-1), \mathrm{u}) \tag{2.75}$$

dir. Bununla birlikte (2.70) aşağıdaki yaklaşık denklemle değiştirilebilir:

$$\frac{\varphi_j(\tau) - \varphi_j(\tau - h)}{h} \cong -\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(\tau)\frac{\partial g^i(y(\tau), v(\tau)}{\partial y^j} \cong -\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(\tau)\frac{\partial g^i(y(\tau - h), v(\tau)}{\partial y^j}$$

Bu denklem, sadece $\tau = h, 2h, \dots, Nh$ değerleri için ele alınır. Yeni değişkenler yardımıyla yaklaşık çözüm aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\psi_{\mathrm{j}}(\mathrm{t}-1) \approx \psi_{\mathrm{j}}(\mathrm{t}) + \mathrm{h}\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \psi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t})\frac{\partial g^i(x(t-1), u(t)}{\partial x^j} \tag{2.76}$$

Son olarak (2.71) ve (2.72) eşitlikleri,

$$\psi_0 = 1 \tag{2.77}$$

$$\psi_1(\mathrm{N}) = \psi_2(\mathrm{N}) = \cdots\ \psi_{\mathrm{n}}(\mathrm{N}) = 0 \tag{2.78}$$

şeklinde yazılabilir.

$$f(x,u) = x + hg(x,u)$$

fonksiyonunu tanımlayalım ve (2.63) fonksiyonelinin

$$J = \sum_{t=0}^{N} f^0\big(x(t-1), u(t)\big) \tag{2.79}$$

şeklinde yazılabilmesi için $hg^0(x,u) = f^0(x,u)$ olsun. Bununla birlikte

$$H(\psi, x, u) = hg^0(x,u) + \sum_{i=1}^{n} \psi_{\mathrm{i}} \left(x^i + hg^i(x,u)\right) = \sum_{i=0}^{n} \psi_{\mathrm{i}} f^i(x,u)$$

fonksiyonu tanımlansın. (2.76) yaklaşık denklemini tam denklem ile yer değiştirdikten sonra (süreçteki hata tanımlanarak),

$$\psi_{\mathrm{j}}(\mathrm{t}-1) = \sum_{\mathrm{t}=0}^{\mathrm{n}} \psi_{\mathrm{i}}\,(\mathrm{t}) \frac{\partial f^i(x(t-1),\ u(t)}{\partial x^j} = \frac{\partial H(\psi(t),\ x(t-1),\ u(t)}{\partial x^j} \tag{2.80}$$

bulunur. (2.75) maksimum bağıntısı, herhangi $u \in V$ için

$$H(\psi(t), x(t-1), u(t)) \geq H(\psi(t), x(t-1), u)$$

olarak yazılabilir. Yani,

$$H(\psi(t), x(t-1), u(t) = \max_{v \in V} H(\psi(t), x(t-1), u\,)$$

elde edilir (Boltyanski, 1971).

Sürekli maksimum prensibi ile verilen analoji kullanılarak, kesikli maksimum prensibinin optimallik için bir gerek şart olduğu formulize edilmiştir. Bu yapılırken sadece başlangıçta verilen temel problemin durumu için sınırlanmıştır. Doğal olarak, sürekli bir yapıdan kesikli bir yapıya tam geçiş doğrudan ispatlanamadığından ve yaklaşık denklemler kullanılıp bazı hatalar tanımlandığından, buradaki fikirler kesikli maksimum prensibinin bir ispatı olarak verilemez (Boltyanski, 1971).

BÖLÜM 3

ÇOK PARAMETRELİ İKİLİ DİNAMİK SİSTEMLERİN GENEL MODELLERİ

Biyoloji, tıp, ekonomi, dil bilimi, bilişim gibi bir çok alanın farklı problemleri ikili ardışık dinamik sistemler ile gösterilebilir. Bilimin bir çok alanında optimal kontrol etme problemleri, ikili dinamik sistemler teorisi yardımıyla matematiksel olarak modellenebilir ve uygun yöntemler kullanılarak daha etkili ve detaylı bir şekilde incelenebilir.

Çok parametreli ikili dinamik sistemler, en genel halde zaman değişkenine bağlı kesikli dinamik sistemler olarak tanımlanır. Eğer $n \in N = Z_0 = \{0,1,2,...\}$ ile kesikli zaman, $c = (c_1, c_2, ..., c_k) \in Z^k = \{...,-1.0.1,...,\}^k$ ile k-boyutlu kesikli mekan belirtilirse aşağıdakiler yazılabilir.

Bu makinelerin karakteristiği ikili $a = (n,c) \in A = N \times C$'ye göre değişir. $A = N = Z_0$ durumunda kafesli olmayan dinamik sistemler kavramı, $A = Z^k$ durumunda ise kombinasyon kafesli dinamik sistemler kavramı elde edilir.

Böyle sonlu dinamik sistemlerin karakteristiğini "giriş-çıkış durum" kanonik denklemleri yardımıyla göstermek için aşağıdakilerin verilmesi gerekmektedir:

1. $GF(2)$, Galois cismi; (Hungerford, 1974)

2. **a)** Durum alfabesi $S = [GF(2)]^m$

b) Giriş alfabesi $X = [GF(2)]^r$

c) Çıkış alfabesi $Y = [GF(2)]^\ell$

Burada m, r ve ℓ sırasıyla sistemin durum $s(a) = s(n,c) \in S$, giriş $x(a) = x(n,c) \in X$ ve çıkış $y(a) = y(n,c) \in Y$ vektörlerinin boyutlarını göstermektedir.

3. $C = Z^k = \{c | c = (c_1, c_2, ..., c_k)\}$ kümesinde $c^1 = (c_1^1, c_2^1, ..., c_k^1) \leq c^2 = (c_1^2, c_2^2, ..., c_k^2) \Leftrightarrow c_\nu^1 \leq c_\nu^2$, $\nu = 1,2,..k$ şeklinde kısmi sıralama vardır.

4. $\xi_0 s(n,c) = s(n+1,c)$, $N \times C$'den $GF(2)$'ye tanımlanan zaman kaydırma operatörü, $\xi_\nu s(n,c) = s(n, c_1, c_2, ..., c_{\nu-1}, c_\nu + 1, c_{\nu+1}, ..., c_k)$, $\nu = 1,2,..k$ ise yer kaydırma operatörüdür (Burden ve Dauglas, 2000).

$a = (n, c_1, c_2, ..., c_k)$, $k+1$ boyutlu vektörü göstermek üzere, $\xi_\nu s(n,c) = \xi_\nu s(a) = s(a + e_\nu)$ dönüşümü, $\nu = 0$ durumunda zaman kaydırma operatörünü; $\nu = 1,2,...,k$ durumunda ise dinamik sistemlerde mekan kaydırma operatörünü belirler. Bu takdirde kafesli ve kafesli olmayan ikili dinamik sistemlerin bütün bilinen sınıfları,

$$\xi_v s(a) = F_v(a, s(a), x(a)),\ v = 1,2,...,k \tag{3.1}$$

$$y(a) = G(a, s(a), x(a)),\ \mathrm{GF}(2) \tag{3.2}$$

şeklindeki kanonik denklemleri ile karakterize edilir. Burada $F_v(.) = \{F_{v_1}, F_{v_2}, ..., F_{v_m}\}$ sistemin $Z_0 \times Z^k \times [GF(2)]^m \times [GF(2)]^r$ 'den $[GF(2)]^m$ 'ye karakteristik Boolean geçiş vektör fonksiyonları, $G = \{G_1, G_2, ..., G_\ell)$ ise sistemin $Z_0 \times Z^k \times [GF(2)]^m \times [GF(2)]^r$ 'den $[GF(2)]^\ell$ 'ye Boolean çıkış fonksiyonlarıdır (Gaishun, 1981; Yablonsky, 1989).

Böylece kafesli ve kafesli olmayan ikili dinamik sistemlerin genel yapısı oluşturulurken aşağıdaki tanımdan yararlanılabilir:

Tanım 3.1. $M =< X, S, Y, s(a^0), F_v, G >,\ v = 1,...,k$ nesnesine deterministik ve çok parametreli sonlu ikili dinamik sistem denir. Burada $s(a^0)$ başlangıç durum vektörüdür.

Farz edelim ki, (3.1), (3.2) ifadelerinde $k = 1$, $A = Z_0 = N$ olsun. O halde sonlu lineer olmayan ve stasyoner olmayan dinamik sistemler,

$$s(n+1) = F(n, s(n), x(n)),\ n = 0,1,...$$

$$y(n) = G(n, s(n), x(n)),\ n = 0,1,...$$

$$s(0) = s^0$$

şeklindeki kanonik denklemleri ile ifade edilir.

Eğer $F(.) = \{F_1(.), F_2(.), ..., F_m(.)\}$ ve $G(.) = \{G_1(.), G_2(.), ..., G_\ell\}$ fonksiyonları yerine sırası ile

$$s(n+1) = \varphi(n)s(n) \oplus \psi(n)x(n) \tag{3.3}$$

$$y(n) = H_1(n)s(n) \oplus H_2(n)x(n) \tag{3.4}$$

yazılacak olursa lineer ikili dinamik sistemlerin modeli elde edilmiş olur. Burada φ, ψ, H_1 ve H_2 sırasıyla $m \times m$, $m \times r$, $\ell \times m$ ve $\ell \times r$ boyutlu Boolean matrisleri, $\oplus$ sembolü ise mod 2'ye göre toplama işlemidir.

Farz edelim ki, (3.1) ve (3.2) denklemlerinde $k > 1$ ve $A = Z^k$ kabul edilsin. O halde çok parametreli lineer olmayan ikili dinamik sistemler aşağıdaki kanonik denklemlerle karakterize edilir:

$$\xi_v s(c) = F_v(c, s(c), x(c)),\ v = 1,2,...,k$$

$$y(c) = G(c, s(c), x(c)), \quad s(c^0) = s^0$$

Eğer geçiş ve çıkış fonksiyonları aşikâr olarak $c \in C$ değişkenine bağlı değilse, o halde stasyoner çok parametreli ikili dinamik sistemler elde edilir.

Böyle makineler tek değerli olarak sırası ile $m \times m$, $m \times r$, $\ell \times m$ ve $\ell \times r$ boyutlu $\{\varphi_v(c), v = 1,2,...,k\}, \{\psi_v(c), v = 1,2,...,k\}, H_1(c), H_2(c)$ karakteristik Boolean matrislerinin sonlu sınıflarıyla belirlenir (Karakaş, 2008).

BÖLÜM 4
ÇOK BOYUTLU KESİKLİ DİNAMİK SİSTEMLERİN ANALİZİ

4.1. Lineer Olmayan Kesikli Dinamik Sistemlerin Analizi

m boyutlu $R^m(m \geq 1)$ uzayının tam sayı bileşenli $k=(k_1,...,k_m)$ noktalarının kümesini Z^m ile gösterelim. F herhangi bir küme, $\Gamma(Z^m, F)$ ise Z^m den F 'ye bir dönüşüm olsun. Eğer her $i=1,2,...,m$ için $k_i^1 \geq k_i^2$ ise $k^1 \geq k^2$ eğer $k^1 \geq k^2$ ve $k^1 \neq k^2$ ise $k^1 > k^2$ kabul edelim.

Her $\varphi \in \Gamma(Z^m, F)$ için $(\Delta_i \varphi)(k) = \varphi(k+e_i)$ kuralı ile $\Gamma(Z^m, F)$ kümesini kendi kendine dönüştüren operatörü Δ_i ile gösterelim. Burada $e_1=(1,0...,0)$, $e_2=(0,1,...,0)$, $e_m=(0,0,...,1)$ dir. Eğer φ fonksiyonunun tanım kümesi $Z^m \times F$ ve değer kümesi F ise, bu durumda $\Delta_i \varphi(k,x)$, $F \ni x \to \varphi(k+e_i, x) \in F$ biçiminde bir fonksiyondur (Gaishun, 1981; Burden ve Douglas, 2001).

$$\Delta_i x(k) = f_i(k, x(k)) \tag{4.1}$$

denklem sistemi şeklinde verilmiş çok boyutlu kesikli sistemi göz önüne alalım. Burada f_i $Z^m \times F$ 'yi F 'ye dönüştüren herhangi bir fonksiyondur.
$Z_+^m(k_0) = \{k : k \in Z^m, k \geq k_0\}$ kümesini F 'ye dönüştüren her bir $k \in Z_+^m(k_0)$ için eğer $\Delta_i \varphi(k) = f_i(k, \varphi(k)), (i=1,....,m)$ ise $\varphi : Z_+^m(k^0) \to F$ dönüşümüne (4.1) denklemler sisteminin çözümü denir. Eğer (4.1) sisteminin

$$x(k^0) = x^0 \tag{4.2}$$

başlangıç koşulunu sağlayan her $(k^0, x^0) \in Z^m \times F$ noktası için bir tek $x : Z_+^m(k^0) \to F$ çözümü varsa (4.1) denklem sistemine tam çözülebilendir denir (Gaishun, 1981).

(4.1) denklem sisteminin (4.2) başlangıç koşulunu sağlayan çözümünün bulunması işlemine, (4.1) şeklindeki denklem sistemi için Cauchy Problemi denir. Böylece (4.1) sisteminin tek çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter koşul, her $(k^0, x^0) \in Z^m \times F$ için Cauchy probleminin tek çözümünün olmasıdır.

Eğer (4.1) sisteminde f_i fonksiyonları k'ye bağlı değilse söz konusu sisteme otonom, aksi halde otonom olmayan sistem denir.

Z^m kümesinden;

1) $k^{i+1} \geq k^i$, $i = 1,...,N-1$

2) $\sum_{\alpha=1} (k_\alpha{}^{i+1} - k_\alpha{}^i) = 1$

koşullarını sağlayan $k^1,...,k^N$ noktalarını ele alalım. Böyle noktaların oluşturduğu kümeyi k^1 ve k^N noktalarını birleştiren kesikli yol veya eğri olarak niteleyip bu kümeyi $L(k^1,...,k^N)$ ile gösterelim. Görüldüğü gibi $N = 1$ için 1 ve 2 koşulları anlamsızdır. Bu durumda bir noktalı yol oluştuğu varsayılır.

$$\left|L(k^1,...,k^N)\right| = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\alpha=1}^{m} (k_\alpha{}^{i+1} - k_\alpha{}^i)$$

değerine $L(k^1,...,k^N)$ eğrisinin uzunluğu denir. Bir noktalı eğrinin uzunluğunun sıfır olduğu kabul edilir.

Herhangi $i \in [1,m]$ için $[1,N]$ doğal sayılar kümesi üzerinden Z^m kümesine $\varphi(s+1) - \varphi(s) = e_i$ koşulunu sağlayan bütün monoton dönüşümler kümesini ϕ_N ile gösterelim. Her $N \geq 1$ için ϕ_N'lerin birleşimi ϕ olsun. Bu durumda Z^m'deki bütün kesikli eğrilerin kümesi ile ϕ arasında karşılıklı tek değerlik koşulu sağlanacaktır.

Her bir $\varphi \in \phi$, uygun kesikli eğrinin parametrik gösterimi ile isimlendirilir. Böylece şu yorum yapabiliriz: $[1,N]$ kapalı aralığındaki çift-çift kesişmeyen ve birleşimleri $[1,N]$ olan kümeleri $A_1,...,A_m$ ile gösterelim ve aşağıdaki fonksiyonu oluşturalım.

$\varphi_\alpha(1) = k_\alpha{}^1$,

$$\varphi_\alpha(s+1) = \begin{cases} \varphi_\alpha(s)+1, s+1 \in A_\alpha \\ \varphi_\alpha(s), s+1 \in [1,N]/A_\alpha \end{cases} \tag{4.3}$$

Burada $k^1 = k_1^1,...,k_m^1$; Z^m' den alınmış noktalardır. Bu durumda $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_m) \in \phi$ ve $k^s = \varphi(s) = (\varphi_1(s),...,\varphi_m(s))$, $s \in [1,N]$ noktaları Z^m'de kesikli eğri oluşturur. Buna göre eğer $L(k^1,...,k^N)$ bir kesikli eğri ise onun parametrik gösterimi aşağıdaki şekilde oluşturulur:

A_α kümesine $[1,N]$ kapalı aralığının yalnız ve yalnız $k_\alpha{}^{s} - k_\alpha{}^{s-1} = 1$ ve $s-1 \in [1,N]$ koşullarını sağlayan noktalarını ekleyelim. Daha sonra oluşmuş A_α kümesinden k^1 noktasından yararlanarak (4.3) formülüne göre $L(k^1,...,k^N)$ kesikli eğrisinin istenen parametrik gösterimi olan $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_m)$ fonksiyonu oluşturulur.

Farz edelim ki L, Z^m'de parametrik gösterimi $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_m)$ olan kesikli eğri olsun.

$$z(s+1) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\varphi(s), z(s))(\varphi_i(s+1) - \varphi_i(s)) = (\varphi_1,...,\varphi_m),\ s \in [1, N_\varphi] \tag{4.4}$$

ifadesini L eğrisi boyunca (*) sistemi olarak adlandıralım.

(4.4) denkleminden yararlanarak (*) sisteminin tam çözüm koşulu aşağıdaki şekilde yorumlanabilir:

k^0, k ve $k > k^0$ Z^m' den alınmış herhangi noktalar ve L de bu noktaları birleştiren eğri olsun. $x_L(k)$; (4.1) sisteminin L eğrisi boyunca k noktasındaki çözümü olsun. Yani, $x_L(k) = z(N)$. Burada N, $\varphi(N) = k$ koşulunu sağlayan sayıdır.

Görüldüğü gibi (4.1) sisteminin tam çözümünün olması için gerek ve yeter şart $x_L(k)$'nın Z^m'den alınmış, istenilen k^0 ve k noktalarını birleştiren L eğrisine bağlı olmamasıdır. Dolayısıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1. (4.1) sistemin tam çözülebilmesi için gerek ve yeter koşul tüm $(k,x) \in Z^m \times F$ için

$$f_i(k+e_j, f_j(k,x)) = f_j(k+e_i, f_i(k,x)),\ i,j = 1,...,m \tag{4.5}$$

dir (Gaishun, 1981).

İspat. $\Delta_1,...,\Delta_m$ operatörleri çift çift değişme özelliklerine sahip olduğundan (4.1) sisteminin her çözümü için

$$\Delta_i \Delta_j x(k) = \Delta_j \Delta_i x(k) \quad i,j = 1,...,m$$

ifadesi sağlanır. Bu ise görüldüğü gibi $x = x(k)$ için (4.5) koşuluna denktir. Böylece gerekli koşul ispatlanmış olur.

Yeterli koşulu ispatlamak için ilk olarak aşağıdaki gösterim kabul edilir:

$$f_i^{\,p}(k,.))(x) = f_i(k, f_i(k,..., f_i(k,x)...)),$$
$$(f_i^{\,0}(k,.))(x) = x,$$
$$(f_1(k^1,.)\circ f_2(k^2,.)\circ ....\circ f_m(k^m,.))(x) = f_1(k^1, f_2(k^2,..., f_m(k^m,x)...)),$$
$$(\prod_{i=1}^{m}\circ f_1^{\,p_{i_1}}(k^i,.)...f_m^{\,p_{i_m}}(k^i,.))(x) = f_1^{\,p_{m_1}}(k^m,.)\circ ...\circ f_m^{\,p_{m_m}}(k^m,.)\circ ...$$
$$...\circ f_1^{\,p_{i_1}}(k^1,.)\circ ...\circ f_m^{\,p_{1_m}}(k^1,.))(x)$$

Burada p ve p_{ij} ’ler negatif olmayan tam sayılardır.

$L(k^1,...,k^N)$, Z^m ’den alınmış herhangi bir kesikli eğri olsun.

$$\pi(x) = (\prod_{L(k^1,...,k^N)}\circ f_1^{\,\Delta p_1}(p,.)....f_m^{\,\Delta p_m}(p,..))(x) = (\prod_{i=1}^{N}\circ f_1^{\,k_1^{i+1}-k_1}(k^i,.)...f_m^{\,k_m^{i+1}}(k^i,.))(x)$$

dönüşümünü dahil edelim.

Görüldüğü gibi genel halde $\pi(x)$, $L(k^1,...,k^N)$ yolunun yalnız başlangıç ve son noktalarına değil $k^j (1\le j\le N)$ noktalarına da bağlıdır. Yani genel olarak $\pi(x)$, k^1ve k^N noktalarını birleştiren yolun seçimine bağlıdır.

Şimdi $\pi(x)$ ’in söz konusu eğrinin yalnız başlangıç ve son noktalarına bağlı olduğunu ve onları birleştiren yola bağlı olmadığını sağlayan koşulu bulalım. Bunun için önce kesikli eğrinin basit dönüşüm kavramını verelim.

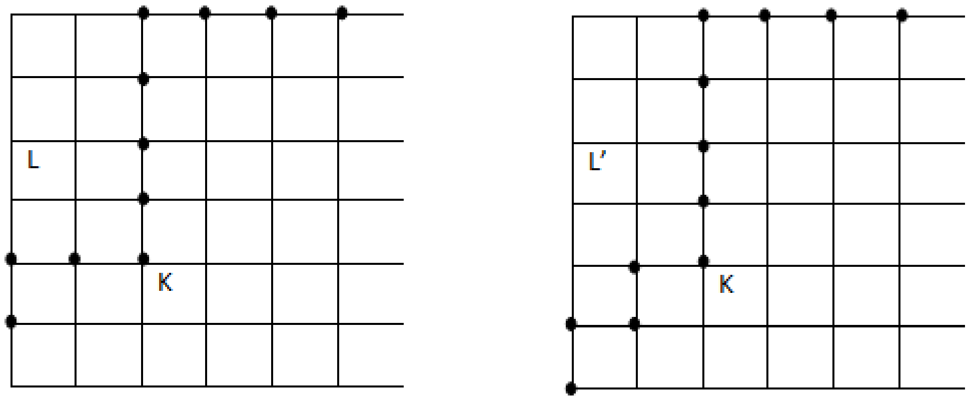
Farz edelim ki $L = L(k^1,...,k^N)$ yolunu oluşturan $k^1,...,k^N$ noktaları arasında herhangi α, β, $\alpha<\beta$, $\alpha\in[1,m]$, $\beta\in[1,m]$ ’ler için

$$k_\alpha^{r+2} - k_\alpha^r = 1,\; k_\beta^{r+2} - k_\beta^r = 1$$

koşullarını sağlayan k^r, k^{r+1}, k^{r+2} noktaları vardır. Eğer $L(k^1,...,k^N)$ eğrisi $L' = L'(k^1,...,k^r,k^{r+1},k^{r+2},...k^N)$ ile değiştirilmiş ise söz konusu eğrinin k^r noktasında basit dönüşümü elde edilmiştir.

Burada $k^{r+1} = (k_1^{r+1},...,k_{\alpha-1}^{r+1}, k_\alpha^{r+1} + k_\beta^{r+1} - k_\beta^r, k_{\alpha+1}^{r+1},...,k_{\beta-1}^{r+1}, k_\beta^{r+1} + k_\alpha^{r+1} - k_\alpha^r, k_{\beta+1}^{r+1},....,k_m^{r+1}$

dir.



Şekil 4.1. L ve L' kesikli yolları

Basit dönüşüm yardımıyla aynı kesikli eğrilere dönüştürülebilen L ve L' yollarına denk yollar denir. İki tane sabitlenmiş noktayı birleştiren bütün kesikli yollar denktir ve tersine, denk yollar aynı noktaları birleştiren yollardır.

Böylece yolların denklik tanımından da görüldüğü gibi yukarıda tanımlanan π ‘nin yoldan bağımsız olması için gerekli ve yeterli koşul (4.5) ifadesinin sağlanmasıdır.

Bu durumda π için aşağıdaki gösterimden yararlanılabilir.

$$\pi(x) = \Big(\prod_{(k^1,k^N)} \circ f_1^{\Delta p_1}(p,.)...f_1^{\Delta p_m}(p,.)\Big)(x) \tag{4.6}$$

$(k^0, x^0) \in Z^m \times F$ olsun.

$$x(k,k^0,x^0) = \Big(\prod_{(k^0,k)} \circ f_1^{\Delta p_1}(p,.)...f_1^{\Delta p_m}(p,.)\Big)(x_0) \tag{4.7}$$

formulü ile $x(k) = x(k,k^0,x^0)$ fonksiyonunu tanımlayalım ve $\Delta_i x(k,k^0,x^0)$ hesaplanırsa $\Delta_i x(k,k^0,x^0) = (f_i(k,.) \circ x(k,k^0,.))(x^0) = f_i(k, x(k,k^0,x^0))$ elde edilir. Böylece $x(k)$ ’nın (4.1) sisteminin çözümü olduğu ispatlanır.

Çözümün tekliği ise $x(k,k^0,x^0)$ ’nın ifadesinden görülmektedir. Böylece gerek ve yeter koşul teoremi ispatlanmış olur.

4.2. Lineer Kesikli Dinamik Sistemlerin Analizi

4.2.1. Homojen Lineer Kesikli Dinamik Sistemler

F sonlu boyutlu normlu vektör uzayı olsun.

$$\Delta_i x(k) = A_i(k)x(k) + f_i(k),\ i = 1...,m \qquad (4.8)$$

ifadesine çok boyutlu lineer kesikli dinamik sistem denir. Burada $A_i(k)$, F 'den F 'ye bir lineer dönüşüm, f_i ise Z^m de tanımlı ve değer kümesi F olan bir fonksiyondur.

(4.8) biçimindeki sistemde $f_i(k) = 0$ ise ele alınan sisteme homojen lineer kesikli dinamik sistem denir. Buna göre homojen lineer sistem aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\Delta_i x(k) = A_i(k)x(k),\ i = 1...,m \qquad (4.9)$$

Bu durumda (4.9) sisteminin tam çözüm koşulu tüm $k \in Z^m$ için aşağıdaki gibi olur (Gaishun, 1981):

$$A_i(k+e_j)A_j(k) = A_j(k+e_i)A_i(k),\ i, j = 1,...m \qquad (4.10)$$

$L(k^1,...,k^N)$; Z^m 'den alınmış herhangi bir kesikli eğri olsun. F den F 'ye tanımlanan

$$\pi = \prod_{L(k^1,...,k^N)} A^{\Delta p_1}(p)...A_m^{\Delta p_m}(p) = \prod_{i=1}^{N-1}[A(k^i)]^{k_1^{i+1}-k_1^i}...[A_m(k^i)]^{k_m^{i+1}-k_m^i}$$

biçimindeki lineer dönüşümü, $A_1,...,A_m$ fonksiyonlarının $L(k^1,...,k^N)$ eğrisi boyunca çarpımı olarak gösterilsin. Bu durumda da π 'nin k^1 ve k^N noktalarını birleştiren yoldan bağımsız olması için gerekli ve yeter koşul (4.10) eşitliğinin sağlanmasıdır.

Burada π aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\pi = \prod_{(k^1,k^N)} A_1^{\Delta p_1}(p)...A_m^{\Delta p_m}(p)$$

Buna göre (4.9) sisteminin $x(k,k^0,x^0)$ çözümü,

$$x(k,k^0,x^0) = \prod_{(k^0,k)} A_1^{\Delta p_1}(p)...A_m^{\Delta p_m}(p)x^0$$

dir. Eğer (4.9) sisteminde A_i, k 'ya bağlı değilse; yani sistem

$$\Delta_i x(k) = A_i x(k) + f_i(k) \tag{4.11}$$

biçiminde yazılmışsa bu durumda tam çözüm koşulu, $A_1,...,A_m$ operatörlerinin çift çift değişme özelliğine sahip olma koşulu ile denk olacaktır ve $x(k^0) = x^0$ koşulunu sağlayan çözüm

$$x(k) = \prod_{i=1}^{m} A^{k_i - k_i^0} x^0 \tag{4.12}$$

şeklinde olur .

4.2.2. Homojen Olmayan Lineer Kesikli Dinamik Sistemler

$$\Delta_i x(k) = A_i(k)x(k) + f_i(k),\ i = 1...,m$$

homojen olmayan sistemini yani (4.8)'i göz önüne alalım. (4.10) koşulu sağlandığında söz konusu sistemin tam çözüm koşulu;

$$A_i(k+e_j) f_j(k) + f_i(k+e_j) = A_j(k+e_i) f_i(k) + f_j(k+e_i),\ i, j = 1,...,m \tag{4.13}$$

biçimindedir (Gaishun, 1981).

Her bir k için $A_i(k)$ operatörünün tersinin olduğunu varsayalım ve (4.8) sisteminin çözümünü belirleyen formulü bulalım.

$$k \to X(k) = \prod_{(k^0,k)} A_1^{\Delta p_1}(p)...A_m^{\Delta p_m}(p)$$

dönüşümünü (4.9) sisteminin temel operatörü olarak gösterelim. Bu durumda (4.9) sisteminin istenilen $X(k)$ çözümü, $x^{(j)}(k)$ fonksiyonlarının sabit katsayılı lineer kombinasyonları şeklinde yazılabilir. Yani,

$$X(k) = c_1 x^{(1)}(k) + ... + c_n x^{(n)}(k)$$

dir. Burada $x^{(j)}(k)$'lar $X(k)$ matrisinin sütunlarıdır.

Buna göre $x^{(1)}(k),....,x^{(n)}(k)$'lar (4.9) sisteminin çözümlerinin temel sistemini oluşturur ve $X(k)$'ya temel matris denir (Hungerford, 1974). $L(k^1,...,k^N)$, Z^m'de herhangi kesikli bir eğri, $\psi_1,...,\psi_m$ 'ler ise Z^m'den F'ye dönüşümler olsun.

$$q = \sum_{L(k^1,...,k^N)} \psi_1(p)\Delta p_1 + ... + \psi_m(p)\Delta p_m = \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{m} \psi_i(k^j)(k_i^{j+1} - k_i^j)$$

biçiminde tanımlanan $q \in F$, söz konusu dönüşümlerin $L(k^1,...,k^N)$ eğrisi boyunca olan toplamını gösterir.

Görüldüğü gibi bu toplam genel olarak yalnız k^1 başlangıç ve k^N bitiş noktalarına bağlı değil, aynı zamanda $L(k^1,...,k^N)$ yolunun $k^j\,(1 < j < N)$ noktalarına da bağlı olur.

Önceki işlemlere benzer olarak q'nun k^j'ye bağlı olmaması için gerek ve yeter koşulun

$$\psi_i + \Delta_i\psi_j = \psi_j + \Delta_j\psi_i$$

olduğu elde edilebilir. Bu durumda q'nun yola bağlı olmadığı söylenebilir ve

$$q = \sum_{(k^1,k^N)} \psi_1(p)\Delta p_1 + ... + \psi_m(p)\Delta p_m$$

şeklinde yazılabilir. Söz konusu toplamın yola bağlı olmadığı koşul sağlandığında ve $k^0 \in Z^m$ için,

$$k \to \sigma(k) = \sum_{(k^0,k)} \psi_1(p)\Delta p_1 + ... + \psi_m(p)\Delta p_m$$

dönüşümü bütün $k \in Z^m + k^0$ için tanımlıdır.

(4.8) sistemini yeniden göz önüne alalım. Söz konusu sistemin çözümünü

$$x(k) = X(k) + u(k)$$

şeklinde arayalım. Burada u, Z^m'den F'ye bilinmeyen bir dönüşümdür.

$x(k) = X(k) + u(k)$'yı (4.8) sisteminde yerine yazarsak bazı sadeleştirmelerden sonra u fonksiyonunun

$$\Delta_i u(k) = u(k) + X^{-1}(k)A_i^{-1}(k)f_i(k)$$

denklemini sağladığı görülür.

$$u(k) = u(k^0) + \sum_{(k^0,k)} X^{-1}(p)A_1^{-1}(p)f_1(p)\Delta p_1 + X^{-1}(p)A_m^{-1}(p)f_m(p)\Delta p_m \tag{4.14}$$

söz konusu sistemin çözümüdür. Buradan,

$$x(k) = F(k,k^0)x^0 + \sum_{(k^0,k)} \sum_{i=1}^{m} F(k_i, p+e_i) f_i(p) \Delta p_i \tag{4.15}$$

bulunur. Burada $F(k, p) = X(k)X^{-1}(p)$' dir.

(4.15) formülüne, (4.8) sistemi için Cauchy formülü, $F(k, p)$ operatörüne ise bu sistem için Cauchy operatörü denir.

BÖLÜM 5
LİNEER OLMAYAN STOKASTİK İKİLİ DİNAMİK SİSTEMLERİN ANALİZİ

5.1. Lineer Olmayan Stokastik İkili Dinamik Sistemlerin Genel Yapısı

Sonlu sistemler teorisinin daha az incelenen alanlarından biri, lineer olmayan çok parametreli ikili dinamik sistemler teorisidir. Böyle sistemlerin bir alt sistemi olan stokastik ikili dinamik sistemler genel olarak aşağıdaki gibi gösterilir:

Tanım 5.1.1. $K =< X, S, Y, s^0, p(\omega), F_\nu, G |>,\ \nu = 1,2,..k$

şeklinde verilen parçalı nesneye lineer olmayan stokastik ikili dinamik sistem denir.

Burada $X = [GF(2)]^r, S = [GF(2)]^m$ ve $Y = [GF(2)]^q$ sırasıyla giriş, durum ve çıkış kümeleri, s^0 başlangıç durum vektörü ve $p(\omega)$ deterministik kesikli olasılık dağılımıdır (Akdeniz, 2007; Knill, 2009), ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_p\}$ sonlu küme, $p(\omega) = \{p(\omega_i) : \omega_i \in \Omega, \sum_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i) = 1\}$). $F_\nu(\cdot) = \{F_{\nu_1}(\cdot), ..., F_{\nu_m}(\cdot)\}$ ile gösterilen ve geçiş fonksiyonu olarak bilinen karakteristik Boolean vektör fonksiyonları $Z^k \times [GF(2)]^m \times [GF(2)]^r$ kümesi üzerinde tanımlı lineer olmayan fonksiyonları, G, $GF(2)$ Galois cismi üzerinde tanımlanan çıkış karakteristik fonksiyonlarıdır (Yablonsky, 1989). Kolaylık açısından $(c, s(c), x(c), \omega(c))$ ifadesi $(.)$ sembolü ile gösterilmiştir. Verilen tanıma ek olarak çok parametreli stokastik ikili dinamik sistem aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\xi_\nu s(c) = F_\nu(c, s(c), x(c), \omega(c)),\ \nu = 1,2,...,k \tag{5.1}$$
$$y(c) = G(c, s(c), x(c), \omega(c))$$

Burada sırasıyla $s(c)$ durum, $x(c)$ giriş, $y(c)$ çıkış değişkenleri ve $\omega(c)$ ise rasgele büyüklüktür. $c = (c_1, ..., c_k) \in G_d = \{c | c \in Z^k, c_1^0 \le c_1 \le c_1^L, ..., c_k^0 \le c_k \le c_k^L, c_i \in Z\}$, Z^k 'dan alınan noktalardır. L_i, sistemin devam etme süresidir. $Z = \{..., -1, 0, 1, ...\}$ tamsayılardır. ξ_ν kaydırma operatörü olup $\xi_\nu s(c) = s(c + e_\nu)$ 'dir. $e_\nu = (0, ..., \overset{\nu}{1}, 0, ..., 0)$ $\nu = 1, ..., k$, $i = 1, ..., k$ (Burden, 2000; Çağal, 2000).

Stokastik ikili dinamik sistemlerle verilen her bir kontrol etme sürecinde ω açık anlam içerir. Örneğin, stokastik ikili dinamik sistemlerin identifikasyon problemlerinde ω giriş değeri anlamına, optimal ardışık dinamik sistemlerin sentez problemlerinde ω

sistemin bütün mümkün durumlar kümesi anlamına gelir (Yermolyev, 1986; Stengel, 1986).

Görüldüğü gibi stokastik ikili dinamik sistemlerde sistemin durumu, ω rasgele büyüklüğüne bağlıdır. Böyle ω'lar hem dinamik sistemlerin kendi parametrelerini hem de giriş sembolünü etkileyebilir.

Son halde stokastik ikili dinamik sistem için geçiş fonksiyonu:

$$s(c+e_\nu) = F_\nu(c, s(c), x(c) \dot{\oplus} \omega(c)),\ \nu = 1,...,k$$

şeklinde yazılır. Burada $\dot{\oplus}$ sembolü $x(c)\dot{\oplus}\omega(c)$'nin her zaman X giriş alfabesinin elemanı olduğunu gösterir.

Stokastik ikili dinamik sistemler ile verilen kesikli optimal süreçler,

$$J(x) = M_\omega\{\phi(s(c^L))\} \tag{5.2}$$

fonksiyoneli ile karakterize edilir. Burada $M_\omega\{\bullet\}$, ω rasgele büyüklüğünün matematiksel beklenen değerini gösterir (Knill, 2009).

G_d kümesinde tanımlanan ve değerler kümesi $[GF(2)]^r$ olan her bir r-boyutlu $X(c) = (x_1(c),...,x_r(c))$ yönetici vektör fonksiyonlar kümesini $\hat{X}$ ile gösterelim. Yani $\hat{X} = \{x(c), c \in G_d\}$ olsun. Görüldüğü gibi her bir $x(c) \in \hat{X}$ için (5.1) sisteminde denklemlerin sayısı bilinmeyenlerin sayısından fazla olduğundan bu sistemler aşırı belirlenmiş sistemdir (Gaishun, 1981). Bu bakımdan probleme aşağıdaki gibi mümkün optimal kontrol edici dahil edilebilir.

Tanım 5.1.2. Eğer $\hat{X}$ kümesinden alınmış $x(c) \in \hat{X}$ için (5.1) sisteminin tek çözümü varsa o zaman $x(c)$ 'ye mümkün kontrol edici denir.

5.2. Lineer Olmayan Stokastik İkili Dinamik Sistemlerdeki Boolean Değerli Geçiş Vektör Fonksiyonlarının Aritmetik İfadeleri

Boolean değerli fonksiyonlar ile aritmetik fonksiyonlar arasındaki ilişkinin belirlenmesi şarttır. Bunun için stokastik ikili dinamik sistem modelini göz önüne alalım: Buradaki $F_\nu(c, s(c), x(c), \omega(c))$ fonksiyonu, Boolean değerli kesikli vektör fonksiyonudur. Optimal süreci karakterize eden $J(x) = M_\omega\{\phi(s(c^L)\}$ fonksiyoneli ise reel değerli bir fonksiyondur. Problemin çözümü için bu iki farklı tipteki fonksiyon arasında matematiksel bir bağ kurulması gerekir. Bu yüzden Boolean vektör fonksiyonlarının aritmetik yazılışları bu açıdan önem arz etmektedir. Böyle ifadeler aşağıda verilen önermeye göre belirlenir.

Önerme 5.2.1. $v_{ij}^{v}(c),\quad (i=1,...,L_1;\, j=1,....,L_2;\, v=1,...,k)$ 'lerin Boolean sütun vektörleri olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{L_1}\sum_{j=1}^{L_2} v_{ij}^{v}(c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{L_1}\prod_{j=1}^{L_2}(1-2v_{ij}^{v}(c)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^{\sum_{i=1}^{L_1}\sum_{j=1}^{L_2} v_{ij}^{v}(c)}$$

dir.

Önerme 5.2.1'den yararlanılarak, Boolean fonksiyonlarının aritmetik ifadelerini elde etmek için aşağıdaki tanım verilir:

Tanım 5.2.1. Boolean fonksiyonlarından meydana gelen herhangi bir $\{F_1, F_2, ..., F_s\}$ sistemi verilsin. Her bir Boolean fonksiyonu, bu sistemin fonksiyonları ile gösterilebiliyorsa incelenen bu sisteme tam sistem denir (Rosen, 2012).

Açıktır ki her Boolean fonksiyonu, $D = \{\overline{x}, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2\}$ sisteminin fonksiyonları yardımıyla gösterilebilir. Bu nedenle D sistemi tamdır. Aşağıdaki teoremden yararlanılarak farklı sistemler de oluşturulabilir.

Teorem 5.2.1. Boolean değerli vektör fonksiyonlarından meydana gelen $F = \{F_1, F_2, ..., F_s\}$ ve $G = \{G_1, G_2, ..., G_r\}$ sistemleri göz önüne alınsın. Eğer F sistemi tam sistem ve F 'nin her bir fonksiyonu G sisteminin fonksiyonları tarafından yazılabilirse G sistemi de tamdır (Rosen, 2012).

Şimdi Teorem 5.2.1.'den yararlanarak aşağıdakiler gösterilebilir:

a) $D_1 = \{\overline{x}, x_1 \wedge x_2\}$ sistemi tamdır.

b) Boolean fonksiyonlarından $D_2 = \{0,1, x_1 \otimes x_2, x_1 \oplus x_2\}$ sistemi tamdır ($\otimes$, ilkel çarpma işlemini; $\oplus$ ise mod 2'ye göre toplama işlemini göstermektedir).

Eğer birinci sistem $D_1 = \{\overline{x}, x_1 \wedge x_2\}$, ikinci sistem $D_2 = \{0,1, x_1 \otimes x_2, x_1 \oplus x_2\}$ kabul edilirse

$$\overline{x_1} = x_1 \oplus 1$$
$$x_1 \wedge x_2 = x_1 \otimes x_2$$

denkliklerinden ve Teorem 5.2.1.'den (b) ifadesi kanıtlanır.

$D_2 = \{0,1, x_1 \otimes x_2, x_1 \oplus x_2\}$ sistemi tam olduğu için keyfi Boolean vektör fonksiyonu bu sistemin fonksiyonları cinsinden yazılabilir. Buna göre,

$$Q_v = F_v(c, s(c), x(c), \omega(c))$$

Boolean geçiş fonksiyonunun aritmetik yazılışı, D_2 sisteminin fonksiyonları tarafından gösterilip, Önerme 5.2.1.'in uygulanmasıyla bulunur.

Burada D_2'nin fonksiyonları ile belirlenen her bir gösterim, bazı kısaltma işlemlerinden sonra,

$$\sum_{i_1,\dots,i_s} a_{i_1},\dots,a_{i_s} x_{i_1},\dots,x_{i_s}$$

biçiminde yazılabilir. Bu toplama, mod 2'ye göre Jegalkhin Polinomu adı verilir. Burada $a_{i_1},\dots a_{i_s} \in \{0,1\}$ dir. Jegalkhin polinomunda $x_{i_1},\dots,x_{i_s}$ değişkenlerinin sayısı, Boolean fonksiyonunun değişkenlerinin sayısı ile ilişkilidir. O halde bu polinomların sayısı şu şekilde elde edilir: $x_{i_1},\dots,x_{i_s}$ terimlerinin sayısı, $\{1,2,3,\dots,n\}$ kümesinin $\{i_1,\dots,i_s\}$ alt kümelerinin sayısıdır. Yani polinomların sayısı 2^{2^n}'dir. Benzer biçimde $x_1,\dots,x_n$ değişkenlerine göre Boolean değerli $f(x_1,\dots,x_n)$ fonksiyonlarının sayısı 2^{2^n}'dir. Buna göre, her bir Boolean fonksiyonu, Jegalkhin polinomu biçiminde tek türlü olacak şekilde yazılabilir (Çölkesen, 2015; Yablonsky, 1989).

Q_v fonksiyonunu,

$$Q_v = \sum_{\sigma} d_\sigma^v q_\sigma^v$$

şeklinde tek türlü olarak verelim. Denklemdeki

$$q_\sigma^v = c_{\alpha_1}^{\ v\beta_{\alpha_1}} c_{\alpha_2}^{\ v\beta_{\alpha_2}} \dots c_{\alpha_\delta}^{\ v\beta_{\alpha_\delta}} s_{\alpha_{\delta+1}}^{\ v\beta_{\alpha_{\delta+1}}}(c) \dots s_{\alpha_\mu}^{\ v\beta_{\alpha_\mu}}(c) x_{\alpha_{\mu+1}}^{\ v\beta_{\alpha_{\mu+1}}}(c) \dots x_{\alpha_\gamma}^{\ v\beta_{\alpha_\gamma}}(c) \omega_{\alpha_{\gamma+1}}^{\ v\beta_{\alpha_{\gamma+1}}}(c) \dots \omega_{\alpha_\sigma}^{\ v\beta_{\alpha_\sigma}}(c)$$

$$d_\sigma^v \in \{0,1\},\ \beta_{\alpha_\mu} \in \{0,1\},\ \alpha_\mu = 1,2,\dots,k+m+r+p$$

dir. Özel olarak Önerme 5.2.1 kullanılarak;

$$Q_v = F_v(c, s(c), x(c)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\prod_{\sigma}(1 - 2d_\sigma^v q_\sigma^v)$$

elde edilir. Böylece Boolean değerli Q_v geçiş fonksiyonunun aritmetik yazılışı gösterilmiş olur.

Benzer şekilde lineer ikili dinamik sistemler için Boolean değerli geçiş fonksiyonlarının aritmetik ifadeleri de elde edilebilir. Bu sistemdeki geçiş fonksiyonları

$$F_v(c, s(c), x(c), \omega(c)) = \Phi_v(c)s(c) \oplus \Psi_v(c)(x(c) \oplus \omega(c))$$

biçiminde tanımlandığından bu eşitliği önce,

$$F_{iv}(c,s(c),x(c),\omega(c))=\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}^{v}(c)s_j(c)\oplus\sum_{j=1}^{r}\psi_{ij}^{v}(c)(x_j(c)\oplus\omega_j(c)),i=1,...,m;v=1,...,k,c\in G_d$$

$$\Phi_v(c)=\{\varphi_{ij}^{v}(c)\},\Psi_v(c)=\{\psi_{ij}^{v}(c)\}$$

biçiminde düzenleyelim. Son eşitlik Önerme 5.2.1. göz önüne alınarak tekrar yazılırsa,

$$F_{iv}(c,s(c),x(c),\omega(c))=\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}^{v}(c)s_j(c)\oplus\sum_{j=1}^{r}\psi_{ij}^{v}(c)(x_j(c)\oplus\omega_j(c)),i=1,...,m$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m}(1-2\varphi_{ij}^{v}(c)s_j(c))\prod_{j=1}^{r}(1-2\psi_{ij}^{v}(c)(x_j(c)\oplus\omega_j(c)),v=1,...,k;c\in G_d$$

bulunur. Böylece lineer ikili dinamik sistemlerdeki geçiş fonksiyonu için aritmetik yazılış belirlenmiş olur.

5.3. Lineer Olmayan Stokastik İkili Dinamik Sistemler İle Verilen Süreçler İçin Optimal Kontrol Etme Problemi

Çok parametreli lineer olmayan stokastik ikili dinamik sistemler için aşağıdaki gibi terminal kontrol etme problemi ele alınsın (Boltyanskii, 1971):

Verilmiş çok parametreli lineer olmayan stokastik ikili dinamik sistemini L adımda s^0 başlangıç durumundan $s^*(c^L)$ son duruma getiren öyle $x(c)\in\hat{X}$ kontrol edicisinin bulunması gerekiyor ki, (5.2) fonksiyoneli minimal değer alsın (Hacı ve ark., 2016). Yani;

$$\xi_v s(c)=\hat{F}_v(c,s(c),x(c),\omega(c)),c\in\hat{G}_d \tag{5.3}$$

$$s(c^0)=s^0 \tag{5.4}$$

$$x(c)\in\hat{X},c\in G_d \tag{5.5}$$

$$J(x)=M_\omega\{\phi(s(c^L)\}\to\min \tag{5.6}$$

dir. Burada $\hat{F}_v(\cdot)$, $F_v(\cdot)$ Boolean vektör fonksiyonlarının pseudo Boolean yazılışlarıdır. Kontrol edici vektör fonksiyonlar kümesinden alınan her bir $x(c)$ için çok parametreli lineer olmayan sonlu fark denklemler sisteminde, denklemlerin sayısı bilinmeyenlerin sayısından fazla olduğundan (5.1) denklemleri ile verilen problemin çözümünün olabilmesi için tek çözüm koşullarının bulunması şarttır (Gaishun, 1981). Bu amaçla önce aşağıdaki kesikli eğriyi ele alalım:

$c^0 = (c_1^0, c_2^0, ..., c_k^0), c^1 = (c_1^1, c_2^1, ..., c_k^1), ..., c^L = (c_1^L, c_2^L, ..., c_k^L)$ 'lar Z^k 'dan alınmış noktalar olsun.

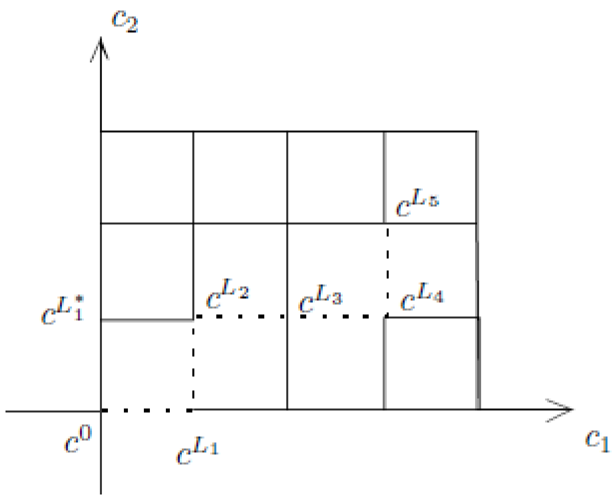
Burada $L = \sum_{i=1}^{k} L_i$ 'dir.

Eğer a) $c_\nu^{i+1} \geq c_\nu^i, \ \nu = 1, \ldots, \mathrm{k}, \ i = 0, ..., L-1$

b) $\sum_{\nu=1}^{k} (c_\nu^{i+1} - c_\nu^i) = 1, \ i = 0, ..., L-1$

koşulları sağlanırsa, o zaman Z^k 'dan alınmış böyle noktaların c^0 ve c^L 'yi birleştiren bir kesikli eğri oluşturduğu düşünülür.

Kolaylık açısından iki boyutlu uzay üzerinde sistemin davranışı detaylı bir şekilde analiz edilebilir:



Şekil 5.1. (5.1) sistemi için G_d üzerinde kesikli bir yol

Bunun için Şekil 5.1. incelenip G_d kümesi de göz önüne alındığında elde edilecek parçalı yol; sistemin c^0 başlangıç durumundan sağa ve yukarıya hareketlerle $c^{L_1}, c^{L_2}, c^{L_3}$ ve c^{L_4} noktalarına uğrayarak c^{L_5} bitiş noktasına ulaşınca tamamlanır. Böylece başlangıç noktası c^0, bitiş noktası c^{L_5} olan bir çok yol bulunur. Şimdi c^{L_1} noktasında sistemin durumunu belirleyelim: $k = 2$ için $e_1 = (1,0)$ ya da $e_2 = (0,1)$ 'dir. $\xi_\nu s(c)$ 'nin tanımından

$$s(c^{L_1}) = \xi_1 s(c^0) = s(c^0 + e_1) = s((c_1{}^0, c_2{}^0) + (1,0)) = F_1(c^0, s(c^0), x(c^0), \omega(c^0))$$

bulunur. Benzer şekilde c^{L_2} noktasındaki sistemin durumu ise;

$$s(c^{L_2}) = \xi_2 s(c^{L_1}) = s(c^{L_1} + e_2) = s((c_1{}^{L_1}, c_2{}^{L_1}) + (0,1)) = F_2(c^{L_1}, s(c^{L_1}), x(c^{L_1}), \omega(c^{L_1}))$$

dir. c^{L_3} noktasındaki sistemin durumu;

$$s(c^{L_3}) = \xi_1 s(c^{L_2}) = s(c^{L_2} + e_1) = s((c_1{}^{L_2}, c_2{}^{L_2}) + (1,0)) = F_1(c^{L_2}, s(c^{L_2}), x(c^{L_2}), \omega(c^{L_2}))$$

dir . c^{L_4} noktasındaki sistemin durumu;

$$s(c^{L_4}) = \xi_1 s(c^{L_3}) = s(c^{L_3} + e_1) = s((c_1{}^{L_3}, c_2{}^{L_3}) + (1,0)) = F_1(c^{L_3}, s(c^{L_3}), x(c^{L_3}), \omega(c^{L_3}))$$

dir. Son olarak c^{L_5} noktasındaki sistemin durumu ise;

$$s(c^{L_5}) = \xi_2 s(c^{L_4}) = s(c^{L_4} + e_2) = s((c_1{}^{L_4}, c_2{}^{L_4}) + (0,1)) = F_2(c^{L_4}, s(c^{L_4}), x(c^{L_4}), \omega(c^{L_4}))$$

ile belirlenir.

Şekil 5.1.'den görüldüğü gibi, herhangi bir noktadan hareket ettikten sonra tek bir denklem yerine sistemin bir sonraki durumu için birden fazla denklem bulunmaktadır. Başka bir deyişle c^0 noktasındaki sistemin bir sonraki durumu $s(c^{L_1})$ ya da $s(c^{L_1^*})$ dir. Böylece denklem sistemi aşağıdaki şekilde her ikisini de içerir.

$$s(c^{L_1}) = \xi_1 s(c^0) = F_1(c^0, s(c^0), x(c^0), \omega(c^0))$$
$$s(c^{L_1^*}) = \xi_2 s(c^0) = F_2(c^0, s(c^0), x(c^0), \omega(c^0))$$

Her bir aşamada bir sonraki durum için sistemin çoğu denkleminin birden fazla çözümünün olduğu görülür. Bu yüzden c^0 den c^{L_5}'e sistemin durumlar dizisi tek değildir. Böylece her $x(c)$ kontrol edicisi için (5.1) sistemi aşırı belirlenmiş sistemdir.

(5.1) sistemi ile verilen problemin çözümünün varlığı için tek çözüm koşulu verilmek zorundadır.

Farz edelim ki, c^0 ve c, Z^k'dan alınmış noktalar, K; bu noktaları birleştiren kesikli eğri, $s_K(c)$ ise (5.1) sisteminin K kesikli eğrisi boyunca c noktasındaki çözümüdür. Çok açıktır ki, çok parametreli lineer olmayan stokastik ikili dinamik sisteminin tek çözümü olması için gerek ve yeter koşul $s_K(c)$ çözümünün K kesikli eğrisine bağlı olmamasıdır (Gaishun, 1981).

Bu olguyu analitik olarak aşağıda verilen teorem ile ifade edebiliriz:

Teorem 5.3.1. (5.1) sisteminin $s(c^0) = s^0$ başlangıç koşulunu sağlayan tek çözümü olması için gerek ve yeter koşul, sabit tutulan her $x(c)$ ve istenilen $(c,s) \in Z^k \times [GF(2)]^m$ için

$$F_\nu(c+e_\mu, F_\mu(c,s(c),x(c),\omega(c)),x(c+e_\mu),\omega(c+e_\mu))$$
$$=F_\mu(c+e_\nu, F_\nu(c,s(c),x(c),\omega(c)),x(c+e_\nu),x(c+e_\nu)),\ \nu,\mu=1,2,...,k\ ,\ GF(2) \quad (5.7)$$

dir (Gaishun, 1981).

İspat (Gereklilik) $\xi_\nu s(c)$ kaydırma operatörünün tanımına göre,

$\xi_\nu s(c)=s(c+e_\nu)$ yazılabilir. Bu eşitliğin her tarafına ξ_μ operatörü uygulanırsa

$$\xi_\mu \xi_\nu s(c)=\xi_\mu s(c+e_\nu)=s(c+e_\nu+e_\mu) \quad (5.8)$$

elde edilir. Benzer olarak

$\xi_\nu \xi_\mu s(c)=s(c+e_\mu+e_\nu)$ eşitliği de yazılabilir. (5.9)

Bilindiği gibi toplam işlemi değişme özelliğine sahiptir. Bu nedenle

$$s(c+e_\nu+e_\mu)=s(c+e_\mu+e_\nu) \quad (5.10)$$

dir. (5.8), (5.9) ve (5.10) ifadelerinden

$$\xi_\mu \xi_\nu s(c)=\xi_\nu \xi_\mu s(c) \quad (5.11)$$

eşitliği çıkarılabilir. Diğer yandan

$$\xi_\mu \xi_\nu s(c)=\xi_\nu s(c+e_\mu)=F_\nu(c+e_\mu, s(c+e_\mu),x(c+e_\mu),\omega(c+e_\mu))$$
$$=F_\nu\ (c+e_\mu, F_\mu(c,s(c),x(c),\omega(c)),x(c+e_\mu),\omega(c+e_\mu))$$

yazılabilir. Yani

$$\xi_\mu \xi_\nu s(c)=F_\nu(c+e_\mu, F_\mu(c,s(c),x(c),\omega(c)),x(c+e_\mu),\omega(c+e_\mu)) \quad (5.12)$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak

$$\xi_\nu \xi_\mu s(c)=F_\mu(c+e_\nu, F_\nu(c,s(c),x(c),\omega(c)),x(c+e_\nu),\omega(c+e_\nu)) \quad (5.13)$$

bulunur. O zaman (5.11), (5.12) ve (5.13) ifadelerinden

$$F_\nu(c+e_\mu, F_\mu(c,s(c),x(c),\omega(c)),x(c+e_\mu),\omega(c+e_\mu))$$
$$=F_\mu(c+e_\nu, F_\nu(c,s(c),x(c),\omega(c)),x(c+e_\nu),\omega(c+e_\nu))$$

elde edilir. Böylece gereklilik ispatlanmış olur.

İspat. (Yeterlilik) Önce aşağıdaki eşitlikler kabul edilsin:

$$(F_\nu^0(c,\cdot))(s)=s,\ (F_\nu^r(c,\cdot))(s)=F_\nu\underbrace{(c,F_\nu(c,...,F_\nu\ (c,s)...))}_{rdefa}$$

$$(F_1(c^1,\cdot)\otimes F_2\ (c^2,\cdot)\otimes...\otimes F_m(c^m,\cdot))(s)=F_1(c^1,F_2(c^2,...,F_m(c^m,s)...))$$

$K(c^1,c^2,...,c^L)$, Z^k dan alınmış $\left(c^1,c^2,...,c^L\right)$ noktalarını birleştiren kesikli eğri olsun. Bu eğri üzerinde aşağıdaki ifade yazılırsa:

$$\pi(s)=(\prod_{k(c^1,...,c^L)}\otimes F_1^{\Delta l_1}(l,x(l),\omega(l)\cdot)...F_k^{\Delta l_k}(l,x(l),\omega(l),\cdot))(s)$$
$$=(\prod_{i=1}^{L-1}\otimes F_1^{c_1^{i+1}-c_1^i}(c^i,x(c^i),\omega(c^i),\cdot)...F_k^{c_k^{i+1}-c_k^i}(c^i,x(c^i),\omega(c^i),\cdot))(s),GF(2)$$

olur. $\pi(s)$ değerinin sadece $K(c^1,c^2,...,c^L)$ kesikli eğrisinin başlangıç ve son noktalarına değil, ayrıca $c^i\,(1<i<L)$ noktalarına bağlı olduğu kontrol edilebilir.

Çok boyutlu kesikli sistemlerde olduğu gibi $\pi(s)$ değerinin sadece $K(c^1,c^2,...,c^L)$ kesikli eğrisinin başlangıç ve son noktalarına bağlı olmasını sağlayan yeterli koşul (5.7) şeklinde yazılabilir.

Bu durumda $\pi(s)$ için aşağıdaki eşitlik kullanılırsa;

$$\pi(s)=\prod_{(c^1,c^L)}\otimes F_1^{\Delta l_1}(l,x(l),\omega(l)\cdot)...F_k^{\Delta l_k}(l,x(l),\omega(l)\cdot))(s)$$

olur. Farz edelim ki, $(c^0,s^0)\in Z^k\times[GF(2)]^m$ olsun. Aşağıdaki gibi $s(c)=s(c,c^0,s^0,x(c),\omega(c))$ fonksiyonunu göz önüne alalım:

$$s(c,c^0,s^0,x(c),\omega(c))=\prod_{(c^0,c)}\otimes F_1^{\Delta c_1}(c,x(c),\omega(c)\cdot)...F_k^{\Delta c_k}(c,x(c),\omega(c)\cdot))(s^o)$$

O halde,

$$\xi_\nu s(c,c^0,s^0,x(c),\omega(c))=(F_\nu(c,\cdot)\otimes s(c,c^0,\cdot))(s^0)=F_\nu(c,s(c,c^0,s^0,x(c),\omega(c)))$$

bulunur. Yani $s(c)$; (5.1) sisteminin tek çözümüdür.

Bilindiği gibi çok adımlı stokastik kesikli süreçler için optimal kontrol problemlerinin çözüm yöntemlerinden biri dinamik programlama yöntemidir (Bellman, 1957). İncelenen problemi çözmek için bu yöntemden yararlanılabilir. Bu amaçla (5.3)-

(5.6) problemi aşağıdaki optimal kontrol etme problemi şeklinde yazılabilir:

$$s(c+e_\nu)=\hat{F}_\nu(c,s(c),x(c),\omega(c)), c\in G_d(\sigma)\text{, v=1,…,k} \tag{5.14}$$

$$s(\sigma)=\aleph$$

$$x(c)\in X, c\in G_d(\sigma) \tag{5.15}$$

$$\hat{F}_\nu(c+e_\mu,\hat{F}_\mu(c,s(c),x(c),\omega(c)),x(c+e_\mu),\omega(c+e_\mu))$$

$$=\hat{F}_\mu(c+e_\nu,\hat{F}_\nu(c,s(c),x(c),\omega(c)),x(c+e_\nu),\omega(c+e_\nu)) \tag{5.16}$$

$$J(x)=M_\omega\{\phi(s(c^L))\}\to\min \tag{5.17}$$

Burada $\aleph$, S 'den alınmış herhangi elemandır.

Görüldüğü gibi (5.14)-(5.17) probleminde $\sigma=c^0$ veya $\aleph=s^0$ yerine yazıldığında ilk problem elde edilir. Eğer tek çözüm şartları sağlanıyorsa o zaman istenilen $s(\sigma)=\aleph$ başlangıç şartı ve $x(c), c\in G_d(\sigma)$ kontrol edicisi için $s(c)$ tek türlü olarak bulunur. Yani (5.17) fonksiyoneli $\aleph$ ve $x(c), c\in G_d(\sigma)$ parametrelerinin fonksiyonelidir:

$$J(x)=J(\aleph,x(G_d(\sigma))$$

Burada $x(G_d(\sigma))$, $c\in G_d(\sigma)$ noktalarında $x(c)$ kontrol edicisinin değerler kümesini göstermektedir:

$$x(G_d(\sigma))=\{x(c);c\in G_d(\sigma)\}$$

(5.3) sisteminin tek çözüm şartlarından görülür ki, (5.3)-(5.5) sistemi ile kontrol edilen stokastik süreç, $G_d(\sigma)$ kümesinde ve aynı zamanda

$$G_{d_1}(\sigma)=\{c;c_1^0\le c_1<\sigma_1,...,c_k^0\le c_k<\sigma_k\}$$

kümesinde de incelenebilir.

Tanım 5.3.1. Göz önüne alınan (5.14)-(5.17) problemindeki (5.3) fonksiyonelini minimalleştiren $x(c)$, $c\in G_d(\sigma)$ kontrol edicisine $G_d(\sigma)$ bölgesinde $(\sigma,\aleph)$ başlangıç çiftine karşılık gelen optimal kontrol edici denir.

Teorem 5.3.2. (Optimallık Prensibi) Farz edelim ki $x^0(c)$, G_d bölgesinde (c^0,s^0) başlangıç çiftine karşılık gelen optimal kontrol edici ve $s^0(c)$ ise uygun optimal yörünge olsun. O zaman keyfi $\sigma \in G_d$ için $x^0(c)$, $(\sigma, s^0(\sigma))$ başlangıç çiftine karşılık gelen $G_d(\sigma)$ bölgesinde optimaldır.

İspat. Aksini farz edelim. O halde

$$J(\aleph, x(G_d(\sigma)) < J(\aleph, x^0(G_d(\sigma))$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $x(c)$, $c \in G_d(\sigma)$ kontrol edicisi vardır.

Şimdi aşağıdaki gibi yeni $\tilde{x}(c), c \in G_d$ kontrol edicisini seçelim:

$$\tilde{x}(c) = \begin{cases} x^0(c), c \in G_{d_1}(\sigma) \\ x(c), c \in G_d(\sigma) \end{cases} \tag{5.18}$$

Görüldüğü gibi (5.18)'deki $\tilde{x}(c)$ mümkün kontrol edicidir. Bu nedenle

$$J(s^0, \tilde{x}(G_d)) = J(s^0, \tilde{x}(G_{d_1}(\sigma) \cup G_d(\sigma)) \tag{5.19}$$

dir. Şarta göre $s^0(\sigma) = \aleph$. Buradan;

$$J(s^0, \tilde{x}(G_{d_1}(\sigma) \cup G_d(\sigma)) = J(s^0(\sigma), \tilde{x}(G_d(\sigma)) = J(\aleph, x(G_d(\sigma))) < J(\aleph, x^0(G_d(\sigma)))$$
$$= J(s(\sigma), x^0(G_d(\sigma))) = J(s^0, x^0(G_d)) \tag{5.20}$$

elde edilir. (5.19) ve (5.20)'den ise

$$J(s^0, \tilde{x}(G_d)) < J(s^0, x^0(G_d))$$

bağıntısı yazılabilir. Bu ise $x^0(c), c \in G_d$ kontrol edicisinin optimal olmasıyla çelişir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$$B(\sigma, \aleph) = \min M_\omega \{\phi(s(c^L))\}$$

fonksiyonu, her bir sabit σ ve $\aleph$ için (5.14)-(5.17) problemindeki pseudo-Boolean fonksiyonelinin optimal değerine karşılık gelen Bellman fonksiyonunun benzeri olan bir fonksiyon olsun (Bellman, 1957). Burada minimum, bütün mümkün $x(c), c \in G_d(\sigma)$ kontrol edicilerine göre alınır(Musayev ve Alp, 2000).

Şimdi $B(\sigma, \aleph)$ fonksiyonu için Bellman denklemini belirleyelim. Farz edelim ki $x^0(c), c \in G_d$ kontrol edicisi, $(\sigma, \aleph)$ başlangıç çiftli (5.14)-(5.17) problemine uygun kontrol edicidir. $s^0(c), c \in G_d(\sigma)$ ise uygun yörüngedir. Herhangi $\sigma \in G_d(\sigma)$, keyfi $y \in X(\sigma)$ alalım ve $s(c+e_\nu) = \xi_\nu s(c)$ şeklinde gösterilsin. Eğer $x(\sigma) = y(c)$ ise o zaman $\xi_\nu \sigma$ noktasındaki sistemin durumu $s(\xi_\nu \sigma) = \hat{F}_\nu(\sigma, \aleph, y, \omega(\sigma))$ eşitliği ile belirlenir. Aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$\xi_\nu s(c) = \hat{F}_\nu(\sigma, \aleph, y, \omega(c)), c \in G_d(\xi_\nu \sigma)$$

$$s(\xi_\nu \sigma) = \hat{F}_\nu(\sigma, \aleph, y)$$

$$x(c) \in X(c), c \in G_d(\xi_\nu \sigma)$$

$$J(x) = M_\omega \{\phi(s(c^L))\} \rightarrow \min$$

Eğer $\hat{y}(c), c \in G_d(\xi_\nu \sigma)$ göz önüne alınan problem için optimal kontrol edici ve $\hat{s}(c), c \in G_d(\xi_\nu \sigma)$ uygun optimal yörünge ise tanıma göre

$$M_\omega \{\phi(s(c^L))\} = B(\xi_\nu \sigma, \hat{F}_\nu(\sigma, \aleph, y, \omega(\sigma)))$$

yazılır.

Şimdi (5.14)-(5.17) problemi için

$$\tilde{x}(c) = \begin{cases} y & , c = \sigma \\ \hat{y}(c), & c \in G_d(\xi_\nu \sigma) \end{cases}$$

mümkün kontrol edicisini göz önüne alalım. O zaman uygun optimal yörünge;

$$\tilde{s}(c) = \left\{ \begin{array}{l} \hat{F}_\nu(\sigma, \aleph, y, \omega(\sigma)), c = \sigma \\ \hat{s}(c) \ , c \in G_d(\xi_\nu \sigma) \end{array} \right\}$$

bağıntısı ile belirlenir. Buradan $J(x) = M_\omega \{\phi(s(c^L))\}$ fonksiyonelinin $\tilde{x}(c), c \in G_d(\sigma)$ kontrol edicisi için uygun değeri

$$M_\omega \{\phi(\tilde{s}(c^L))\} = M_\omega \{\phi(\hat{s}(c^L))\} = B(\xi_\nu \sigma, \hat{F}_\nu(\sigma, \aleph, y, \omega(\sigma)))$$

eşitliği ile belirlenir. $\tilde{x}(c), c \in G_d(\sigma)$ genel olarak optimal kontrol edici olmadığından

$$M_\omega \{\phi(\tilde{s}(c^L))\} \geq M_\omega \{\phi(s^0(c^L))\} = B(\sigma, \aleph)$$

dir. Böylece

$$B(\sigma, \aleph) \leq B(\xi_\nu \sigma, \hat{F}_\nu(\sigma, \aleph, y, \omega(\sigma)) \tag{5.21}$$

elde edilir. Diğer taraftan $y(c) = x^0(\sigma)$ alınırsa, optimallik prensibinden $\hat{y}(c)(c \in G_d(\xi_\nu \sigma)) = x^0(c)(c \in G_d(\xi_\nu \sigma))$

bulunur (Pontryagin ve ark., 1962; Boltyanskii, 1978). Böylece

$$B(\sigma,\aleph) = B(\xi_\nu \sigma, \hat{F}_\nu(\sigma,\aleph,x^0(\sigma),\omega(\sigma))) \tag{5.22}$$

elde edilir. (5.21) ve (5.22) bağlantılarından Bellman denklemi

$$B(\sigma,\aleph) = \min_{y\in X(\sigma)} B(\xi_\nu \sigma, \hat{F}_\nu(\sigma,\aleph,y,\omega(\sigma))), \aleph \in S \tag{5.23}$$

şeklinde bulunur.

Bellman denklemi için başlangıç koşulu G_d ' nin sağ üst bölgesinde verilir:

$$B(c^L,\aleph) = \phi(\aleph), \ \ \aleph \in S \tag{5.24}$$

eşitliği yardımıyla doğrudan belirlenebilir. Dolayısyla Bellman fonksiyonu (5.24) başlangıç koşullu (5.23) denkleminin çözümüdür. Buradan Bellman denkleminin tam çözümünün olduğu anlaşılmaktadır (Bellman, 1957).

η_ν ; ξ_ν kaydırma operatörünün ters operatörü ise,

$\eta_\nu B(\xi_\nu \sigma,\aleph) = B(\sigma,\aleph)$

elde edilir. Bu yüzden Bellman denklemi aşağıdaki gibi türetilebilir:

$$\eta_\nu B(\xi_\nu \sigma,\aleph) = \min_{y(c)\in \bar{X}} B(\xi_\nu \sigma, \hat{F}_\nu(\sigma,\aleph,y,\omega(\sigma))) \quad \nu = 1,...,k \tag{5.25}$$

(5.25) de $\xi_\nu \sigma$ yerine δ alınırsa,

$$\eta_\nu B(\delta,\aleph) = \min_{y(c)\in \bar{X}(\eta_\nu \delta)} B(\delta, \hat{F}_\nu(\eta_\nu \delta,\aleph,y,\omega(\sigma)))$$

bulunur. Eğer her $\nu,\nu' = 1,...,k$ için $\eta_\nu(\eta_{\nu'} B(\delta,\aleph)$ hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
\eta_\nu(\eta_{\nu'} B(\delta,\aleph)) &= \eta_\nu(\min_{y(c)\in \bar{X}(\eta_\nu ' \delta)} B(\delta, \hat{F}_{\nu'}(\eta_{\nu'}\delta,\aleph,y,\omega(\sigma))) \\
&= \min_{y(c)\in \bar{X}(\eta_\nu ' \delta)} \eta_\nu B(\delta, \hat{F}_{\nu'}(\eta_{\nu'}\delta,\aleph,y,\omega(\sigma))) \\
&= \min_{y(c)\in \bar{X}(\eta_\nu, \eta_\nu ' \delta)} [\min_{x(c)\in \bar{X}(\eta_\nu \delta)} B(\delta, \hat{F}_\nu(\eta_\nu \delta, \hat{F}_{\nu'}(\eta_{\nu'}\eta_\nu \delta,\aleph,y,\omega(\sigma)),x(\sigma),\omega(\sigma)))]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

dir. Benzer şekilde

$$\eta_{\nu'}(\eta_\nu B(\delta,\aleph)) = \min_{y(c)\in \bar{X}(\eta_{\nu}'\eta_\nu\delta)} [\min_{x(c)\in \bar{X}(\eta_{\nu}'\delta)} B(\delta, \hat{F}_{\nu'}(\eta_{\nu'}\delta, \hat{F}_\nu(\eta_\nu\eta_{\nu'}\delta,\aleph, y, \omega(\sigma)), x(\sigma), \omega(\sigma)))] \qquad (5.27)$$

elde edilir.

(5.14) sisteminin tek çözüm koşul teoreminden (Gaishun, 1981)

$$\begin{aligned}&\hat{F}_\nu(c+e_\mu, \hat{F}_\mu(c, s(c), x(c), \omega(c)), x(c+e_\mu), \omega(c+e_\mu))\\ &= \hat{F}_\mu(c+e_\nu, \hat{F}_\nu(c, s(c), x(c), \omega(c)), x(c+e_\nu), \omega(c+e_\nu))\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklemde $\mu = \nu'$ alınırsa

$$\begin{aligned}&\hat{F}_\nu(\eta_\nu\delta, \hat{F}_\nu(\eta_\nu\eta_{\nu'}\delta, \aleph, x(\eta_\nu\eta_{\nu'}\delta), \omega(\eta_\nu\eta_{\nu'}\delta)), x(\eta_\nu\delta), \omega(\eta_\nu\delta))\\ &= \hat{F}_{\nu'}(\eta_{\nu'}\delta, \hat{F}_\nu(\eta_{\nu'}\eta_\nu\delta, \aleph, x(\eta_{\nu'}\eta_\nu\delta), \omega(\eta_{\nu'}\eta_\nu\delta), x(\eta_{\nu'}\delta), \omega(\eta_{\nu'}\delta))\end{aligned} \qquad (5.28)$$

dir. (5.26)-(5.28)' den

$$\eta_\nu(\eta_{\nu'} B(\delta,\aleph)) = \eta_{\nu'}(\eta_\nu B(\delta,\aleph)$$

eşitliği bulunur ki bu sonucun Bellman denklemi için tam çözüm varlığını gösteren bir koşul olduğu çıkarılabilir. Bellman denklemi, $\widehat{L}(c^0, c^1, c^2, ..., c^L)$ eğrisi boyunca (5.24) koşulu göz önüne alınıp çözülebilirse, L adım sonunda

$$B(c^L, \aleph), B(c^{L-1}, \aleph), ..., B(c^0, \aleph)$$

fonksiyonlarına ulaşılır.

$B(c^0, s(c^0))$ ise (5.26)-(5.28) problemindeki pseudo-Boolean fonksiyonelinin minimal değeridir. Optimal kontrol ise;

$$B(\xi_\nu c, \hat{F}_\nu(c, s(c), x^0(c), \omega(c))) = \min_{x(c)\in \bar{X}} B(\xi_\nu c, \hat{F}_\nu(c, s(c), x(c), \omega(c)))$$

yardımıyla belirlenir. Burada $c \in \widehat{L}(c^0, c^1, c^2, ..., c^L)$ olup $\widehat{L}(c^0, c^1, c^2, ..., c^L)$ eğrisi c^0 ve c^L noktalarını birleştiren parçalı eğridir. ν değerini $\xi_\nu c \in \widehat{L}(c^0, c^1, c^2, ..., c^L)$ olacak şekilde alır. Optimal yörünge ise

$$\begin{aligned}&\xi_\nu s(c) = \hat{F}_\nu(c, s(c), x^0(c), \omega(c)), \nu = 1,2,...,k\\ &s(c^0) = s^0\end{aligned}$$

ile belirlenir.

5.4. Lineer Olmayan Stokastik İkili Dinamik Sistemler ile Verilen Süreçler İçin Optimal Kontrol Edicinin Varlığı ve Erişim Kümesi

Çok parametreli stokastik ikili dinamik sistemler ile verilen süreçlerde çok adımlı kesikli optimal kontrol etme problemini, pseudo-Boolean fonksiyonelinin minimal değerinin bulunması problemine dönüştürmek için bir küme oluşturalım. Bunun için ele alınan optimal kontrol etme problemini inceleyelim: Sabit tutulan her $\{x(c)\ , c \in \hat{G}_d\}$ için (5.1) sistemi tam çözülebilendi. Aynı zamanda problem tek çözüm koşulunu sağladığından (5.1) sisteminin çözümü, kesikli eğrinin yapısına bağlı değildir (Gaishun, 1981). Bu nedenle bu sistemin çözümü,

$$\hat{L} = \hat{L}(c^0, c^1, ..., c^{L_1}, c^{L_1+1}, ..., c^{L_1+L_2}, ..., c^L)$$

kesikli eğrisi boyunca incelenirse;

$$c^i = (c_1^0 + i, c_2^0, ..., c_k^0),\ i = 0, ..., L_1,\ c^{L_1+i} = (c_1^0 + L_1, c_2^0 + i, c_3^0, ..., c_k^0),\ i = 0, ..., L_2,$$

$$c^{L_1+L_2+i} = (c_1^0 + L_1, c_2^0 + L_2, c_3^0 + i, c_4^0, ..., c_k^0), i = 0, ..., L_3,$$

$$c^{L_1+L_2+...+L_\nu+i} = (c_1^0 + L_1, ..., c_\nu^0 + L_\nu, c_{\nu+1}^0 + i, c_{\nu+2}^0, ..., c_k^0),\ i = 0,1, ..., L_{\nu+1},\ \nu = 1,2, ..., k-1,$$

$$L = L_1 + L_2 + ... + L_k$$

bulunur. Başlangıç koşulundan $s(c^0) = s^0$,

$$s = \{s(c) = (s_1(c), s_2(c), ..., s_m(c)), c \in Z^k\} = [GF(2)]^m \text{ dir.}$$

Ele alınan problem için optimal kontrol edicinin varlığını göstermek amacıyla aşağıdaki kümeleri oluşturalım. Yukarıdaki incelemeler sonucu çok parametreli lineer olmayan denklemler sistemiyle, s^0 başlangıç durumundan

$$\hat{L} = \hat{L}(c^0, c^1, ..., c^{L_1}, c^{L_1+1}, ..., c^{L_1+L_2}, ..., c^L)$$

kesikli eğrisi boyunca bir adımda ulaşılması mümkün olan durumlar kümesi aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$R_1(s^0) = \left\{ s : s = F_1(c^0, s(c^0), x(c^0), \omega(c^0)), x(c^0) \in \hat{X} \right\}$$

Benzer şekilde s^0'dan $\hat{L}$ kesikli eğrisi boyunca iki adımda ulaşılması mümkün olan kümesini oluşturalım:

$$R_{\eta_1}^1(s^0) = \left\{ s : s = F_1(c^{\eta_1-1}, s(c^{\eta_1-1}), x(c^{\eta_1-1}), \omega(c^{\eta_1-1})), s(c^{\eta_1-1}) \in R_{\eta_1-1}(s^0), x(c^{\eta_1-1}) \in \hat{X} \right\}$$

Aynı yöntem uygulanarak,

$$R^{\nu}_{\eta_\nu}(s^0)=\left\{\begin{array}{l} s:s=F_\nu(c^{\eta_\nu-1},s(c^{\eta_\nu-1}),x(c^{\eta_\nu-1}),\omega(c^{\eta_\nu-1})),s(c^{\eta_\nu-1})\in R^{\nu}_{\eta_\nu-1}(s^0),x(c^{\eta_\nu-1})\in \hat{X}, \\ \eta_\nu=1,...L_\nu,\nu=1,...,k \end{array}\right\}$$

elde dilir. Böylece $R^{\nu}_{\eta_\nu}(s^0)$; s^0'dan $\hat{L}=\hat{L}(c^0,c^1,...,c^L)$ kesikli eğrisi boyunca $L_1+L_2+...+L_\nu$ adımda ulaşılması mümkün olan durumlar kümesidir. Bu kümelerden sonuncusuna erişim kümesi denir.

Yukarıdaki optimal kontrol etme problemi incelendiğinde her mümkün kontrol edicisi yalnız $s(c^L)$ durumuna bağlıdır. O halde optimal kontrol etme problemi aşağıdaki probleme dönüştürülebilir:

$R^{\nu}_{\eta_\nu}(s^0)=R_L(s^0)$ erişim kümesinde $J(x)=M_\omega\{\phi(s(c^L)\}$ fonksiyonelin minimal değeri bulunmalıdır.

Görüldüğü gibi erişim kümesi önceden verilmemekte olup, problemdeki çok parametreli stokastik ikili dinamik sistemler yardımıyla başlangıç durumuna bağlı olarak bulunur.

Şimdi son yazılan problem için aşağıdaki varlık teoremini verelim:

Teorem 5.4.1. Çok parametreli stokastik ikili dinamik sistemlerde sabit tutulan her $x(c)$ kontrol edicisi için, $S=[GF(2)]^m$ durumlar kümeli dinamik sisteminin bağlı ve tam çözülebilen bir sistem olduğunu farz edelim. Buna göre istenilen $s(c^0)=s^0$ başlangıç durumu için

$$x^*=\{x^*(c^0),x^*(c^1),...,x^*(c^{L-1})\}$$

optimal kontrol edicisi vardır.

İspat. Bilindiği gibi incelenen optimal kontrol etme problemi, $R_{\hat{L}}(s(c^0))$ erişim kümesinde $M_\omega\{\phi(s(c^L)\}$ pseudo-Boolean fonksiyonelinin minimal değerinin bulunması problemine dönüştürülebilir (Yablonsky, 1989; Rosen, 2012). Çok parametreli stokastik ikili kesikli denklemler sistemi tam çözülebilen olduğundan sabit tutulan her $x(c)$ kontrol edicisi için bu fonksiyonelin $s(c^L)$ noktasındaki değeri, c^0 ve c^L noktalarını birleştiren kesikli eğriye bağlı değildir. Diğer yandan bağlılık koşuluna göre,

$$R_{\hat{L}}(s(c^0))=S=[GF(2)]^m$$

elde edilir. O zaman

$$M_{\omega}\{\phi(s(c^{L})\} = J(s(c^{0}), x(c^{1}),..., x(c^{L-1}), \omega(c^{1}),..., \omega(c^{L-1}))$$

pseudo-Boolean fonksiyoneli $m + L(r + p)$ boyutlu bütün sıralı ikililerde tek türlü olarak tanımlanır ve istenilen $s(c^{0})$ başlangıç durumu için sınırlı değer alır. Bu nedenle $R_{\hat{L}}(s^{0})$ sınırlı küme olduğuna göre sabit tutulan her $s(c^{0}) = s^{0}$ için $M_{\omega}\{\phi(s(c^{L})\}$ minimal değerini, herhangi bir $x(c^{k})$; $k = 0,..., L-1,\ x(c^{k}) \in [GF(2)]^{r}$ mümkün kontrol ediciye uygun olarak alır. Böylece optimal kontrol edicinin varlığı ispatlanmış olur.

BÖLÜM 6
LİNEER STOKASTİK İKİLİ DİNAMİK SİSTEMLERİN ANALİZİ

6.1. Lineer Stokastik İkili Dinamik Sistemlerin Genel Yapısı

Tanım 6.1.1.

$$\xi_\nu s(c) = \Phi_\nu(c)s(c) \oplus \Psi_\nu(c)(x(c) \oplus \omega(c)),\ \nu = 1,...,k\ ,GF(2) \tag{6.1}$$
$$s(c^0) = s^0$$

şeklinde gösterilen matematiksel modele çok parametreli lineer stokastik ikili dinamik sistem denir.

Burada $c = (c_1,...,c_k) \in G_d = \{c | c \in Z^k, c_1^0 \le c_1 \le c_1^{L_1},...,c_k^0 \le c_k \le c_k^{L_k}, c_i \in Z\}$, Z^k 'dan alınan noktalardır. $L = L_1 + L_2 + ... + L_k$ sürecin devam etme süresidir. $Z = \{...,-1,0,1,...\}$, tam sayılar kümesidir. $s(c) \in S, x(c) \in X$; $S = [GF(2)]^m$, $X = [GF(2)]^r$ sırasıyla durum ve giriş alfabeleridir. $s(c)$ ve $x(c)$ ise Z^k kümesinde tanımlanan m ve r boyutlu durum ve giriş vektörleri olup, $\omega(c)$ rasgele büyüklüktür (Knill, 2009). $\xi_\nu s(c)$ aşağıdaki gibi tanımlanan kaydırma operatörüdür (Burden ve Dauglas, 2000).

$$\xi_\nu s(c) = s(c + e_\nu); e_\nu = (0,...,0,\overset{\nu}{1},0,...,0),\ \nu = 1,...,k$$

$\{\Phi_\nu(c), \nu = 1,...k\}$, $\{\Psi_\nu, \nu = 1,...,k\}$ sırası ile $m \times n$ ve $m \times r$ boyutlu karakteristik Boolean geçiş matrisleridir. $GF(2)$, Galois cismidir (Hungerford, 1974). $s(c^0) = s^0$ başlangıç durum vektörü ve $\oplus$ sembolü ise $x(c) \oplus \omega(c)$'nin her zaman X giriş alfabesinin elemanı olduğunu gösterir.

Eğer (6.1) sistemi ile çok parametreli ikili lineer dinamik sistemler gösterilmiş ise o zaman bu sistemlerle verilen optimal kesikli süreçler

$$J(x) = M_\omega\{a^T(s(c^L))\} \tag{6.2}$$

şeklindeki Boolean fonksiyoneli ile karakterize edilir. Burada $M_\omega\{.\}$; ω rasgele büyüklüğünün matematiksel beklenen değeri, a^T ise $a = (a_1, a_2,..., a_m)$ vektörünün transpozudur (Stengel, 1986).

Lineer olmayan stokastik ikili dinamik sistemlerde olduğu gibi lineer stokastik ikili dinamik sistemlerle verilen her bir kontrol etme sürecinde de ω benzer anlam içermektedir. Örneğin, lineer stokastik ikili dinamik sistemlerin identifikasyon problemlerinde ω giriş değeri anlamına, sentez problemlerinde ω sistemin tüm mümkün durumlar kümesi anlamına gelmektedir (Yablonsky, 1989; Knill, 2009).

Bir önceki bölümüdeki LOSİDS'e benzer olarak çok paramatreli LSİDS'de sistemin durumu ω rasgele büyüklüğüne bağlıdır. Böyle ω' lar dinamik sistemlerin hem kendi parametrelerini hem de giriş sembolünü etkileyebilir (Yermolyev, 1976; Rosen, 2012).

Ayrıca benzer şekilde, $\hat{G}_d$ kümesinde tanımlanan ve değerler kümesi $[GF(2)]^r$ olan her bir r-boyutlu $X(c) = (x_1(c),...,x_r(c))$ yönetici vektör fonksiyonlar kümesini $\hat{X}$ ile gösterelim. Yani $\hat{X} = \{x(c), c \in \hat{G}_d\}$ olsun. Görüldüğü gibi her bir $x(c) \in \hat{X}$ için (6.1) sisteminde denklemlerin sayısı bilinmeyenlerin sayısından fazladır. Bu bakımdan probleme, aşağıdaki gibi mümkün optimal kontrol edici dahil etmek amacımıza uygundur.

Tanım 6.1.2. $x(c) \in \hat{X}$ için, (6.1) sistemi tek çözüme sahip ise, $x(c)$'ye mümkün kontrol edici denir (Hacı ve Ozen 2009).

Şimdi çok parametreli lineer stokastik ikili dinamik sistemler için aşağıdaki optimal kontrol etme problemi incelenebilir (Boltyanskii, 1971; Gaishun 1981):

Verilmiş çok parametreli lineer stokastik ikili sonlu dinamik sistemini L adımda s^0 başlangıç durumundan $s^*(c^L)$ son duruma getiren öyle mümkün $x(c) \in \hat{X}$ kontrol edicisinin bulunması gerekir ki, (6.2) fonksiyoneli minimal değer alsın:

$$\xi_\nu s(c) = \Phi_\nu(c)s(c) \oplus \Psi_\nu(c)(x(c) \oplus \omega(c)),\ c \in G_d,\ \nu = 1,...,k \tag{6.3}$$

$$s(c^0) = s^0,$$

$$x(c) \in \hat{X}, c \in \hat{G}_d, \tag{6.4}$$

$$J(x) = M_\omega\{a^T(s(c^L))\} \to \min \tag{6.5}$$

Burada $\hat{G}_d = G_d \setminus \{c^L\}$.

6.2. Lineer İkili Stokastik Dinamik Sistemler İle Verilen Süreçler İçin Optimal Kontrol Etme Problemi

(6.1) sistemi için tek çözüm koşulunun sağlandığını farz edelim (Gaishun, 1981). Önceki bolümde ele alınan problemi çözmek için

$$\varphi(c) = \Phi_v(c)\varphi(\xi_v c), c \in G_d,\ v = 1,...,k$$

şeklindeki ardışık dinamik sistemini göz önüne alarak,

$$h_v(c, x(c) \oplus \omega(c), \varphi(\xi_v c)) = \varphi(\xi_v c)\Psi_v(c)(x(c) \oplus \omega(c)),\ \ v = 1,...,k$$

Boolean fonksiyonelini yazalım (Hacı ve ark., 2016). Daha sonra bu fonksiyonel yardımı ile

$$\hat{h} = \sum_{L(c^l, c^L)} \sum_{v=1}^{k} h_v(c, x(c) \oplus \omega(c), \varphi(\xi_v c))\Delta_2 c_v\ ,\ [GF(2)] \tag{6.6}$$

Boolean toplamını oluşturalım. Burada Δ_2 birinci Boolean farkıdır.

Teorem 6.2.1. (6.3)' deki sistemin tam çözümünün olduğunu kabul edelim. O halde (6.6**)**'daki toplam, yoldan bağımsızdır.

İspat. Açıktır ki;

$$\begin{aligned}
&\varphi(\xi_v c)\Psi_v(c)(x(c) \oplus \omega(c)) \oplus \varphi(\xi_{v'}\xi_v c)\Psi_{v'}(\xi_v c)(x(\xi_v c) \oplus \omega(\xi_v c)) \\
&= \varphi(\xi_{v'} c)\Psi_{v'}(c)(x(c) \oplus \omega(c)) \oplus \varphi(\xi_v \xi_{v'} c)\Psi_v(\xi_{v'} c)(x(\xi_{v'} c) \oplus \omega(\xi_{v'} c)), \\
&c \in G_d, \mathrm{v}, \mathrm{v}' = 1,...,\mathrm{k}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanırsa (6.6) yoldan bağımsızdır. Buna göre;

$$\varphi(c) = \Phi_v(c)\varphi(\xi_v c), c \in G_d$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\varphi(\xi_v \xi_{v'} c) = (\Phi_{v'}(\xi_v c))^{-1}(\Phi_v(c))^{-1}\varphi(c), \\
&\varphi(\xi_v \xi_{v'} c) = (\Phi_v(\xi_{v'} c))^{-1}(\Phi_{v'}(c))^{-1}\varphi(c), \mathrm{v}, \mathrm{v}' = 1,...,\mathrm{k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik önceki ifadede yerine konulursa;

$$\begin{aligned}
&(\Phi_v(c))^{-1}\Psi_v(c)(x(c) \oplus \omega(c))\varphi(c) \oplus (\Phi_{v'}(\xi_v c))^{-1}(\Phi_v(c))^{-1}\Psi_{v'}(\xi_v c)(x(\xi_v c) \\
&\oplus \omega(\xi_v c))(\varphi(c) = (\Phi_{v'}(c))^{-1}\Psi_{v'}(c)(x(c) \oplus \omega(c))\varphi(c) \oplus (\Phi_v(\xi_{v'} c))^{-1}(\Phi_{v'}(c))^{-1} \\
&\Psi_v(\xi_{v'} c)(x(\xi_{v'} c) \oplus \omega(\xi_{v'} c))\varphi(c)
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemin her iki tarafı,

$$\Phi_v(\xi_{v'} c)\Phi_{v'}(c) = \Phi_{v'}(\xi_v c)\Phi_v(c)$$

ile çarpılırsa;

$$\Phi_{v'}(\xi_v c)\Psi_v(c)(x(c)\oplus\omega(c))\varphi(c)\oplus\Psi_{v'}(\xi_v c)(x(\xi_v c)\oplus\omega(\xi_v c))\varphi(c)$$
$$=\Phi_v(\xi_{v'} c)\Psi_{v'}(c)(x(c)\oplus\omega(c))\varphi(c)\oplus\Psi_v(\xi_{v'} c)(x(\xi_{v'} c)\oplus\omega(\xi_{v'} c))\varphi(c)$$

bulunur. Son eşitlik her $\varphi(c)$ için sağlandığından;

$$\Phi_{v'}(\xi_v c)\Psi_v(c)(x(c)\oplus\omega(c))\oplus\Psi_{v'}(\xi_v c)x(\xi_v c)\oplus\omega(\xi_v c))$$
$$=\Phi_v(\xi_{v'} c)\Psi_{v'}(c)(x(c)\oplus\omega(c))\oplus\Psi_v(\xi_{v'} c)(x(\xi_{v'} c)\oplus\omega(\xi_{v'} c))$$

olarak yazılabilir. Böylece bu eşitliğin, incelenen sistem için bir tam çözüm olduğu gösterilmiş olur. Çözüm tam olduğundan varsayım sağlanır (Gaishun, 1981). (6.6) Boolean toplamının yoldan bağımsız olduğu ispatlanmış olur.

c^0 ve c^L noktalarını birleştiren bir $\hat{L}(c^0, c^1, \ldots, c^L)$ kesikli eğrisi seçelim. Bu durumda her bir l'inci adımda $(0 \le l < L)$, c^l noktasından c^{l+1} noktasına eğri parçası için v_t değerini belirleyelim. O zaman (6.6) Boolean toplamı, aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\hat{h} = \sum_{(c^l, c^L)} h_{v_t}(c^{t-1}, x(c^{t-1})\oplus\omega(c^{t-1}), \varphi(c^t)) = \sum_{t=l+1}^{L} h_{v_t}(c^{t-1}, x(c^{t-1})\oplus\omega(c^{t-1}), \varphi(c^t)) \quad (6.7)$$

Şimdi Boolean fonksiyonelinin benzeri olan

$$H(\varphi(c), s(c)) = \varphi(c)s(c), c \in G_d \quad (6.8)$$

Hamilton-Pontryagin fonksiyonelini dahil edelim (Hacı ve ark., 2016).

Teorem 6.2.2. $c^l, 0 \le l < L$ noktası için $x^0(c^l, c^{L-1}) = \{x^0(c^l), x^0(c^{l+1}), \ldots, x^0(c^{L-1})\}$ kontrol edicisinin ve ona uygun $s^0(c^l, c^L) = \{s^0(c^l), s^0(c^{l+1}), \ldots, s^0(c^L)\}$ yörüngesinin optimal olması için gerek ve yeter koşul;

$$H(\varphi^0(c^l), s^0(c^l)) = \sum_{t=l+1}^{L} h_{v_t}(c^{t-1}, \varphi^0(c^t), x^0(c^{t-1})\oplus\omega(c^{t-1})) \quad (6.9)$$

dir.

Burada $\varphi^0(c^t)$'ler $(t = l, l+1, \ldots, L-1)$, $\varphi(c) = \Phi_v(c)\varphi(\xi_v c), c \in G_d$, $v = 1, \ldots, k$ denkleminden $\varphi^0(c^L) = a$ başlangıç koşulunun yardımı ile bulunur.

İspat (Gereklilik). (6.7)'den $l+1 \le t \le L$ için aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
&H(\varphi^0(c^t), s^0(c^t)) = \varphi^0(c^t)s^0(c^t)\\
&= \varphi^0(c^t)\Phi_{\nu_t}(c^{t-1})s^0(c^{t-1}) \oplus \varphi^0(c^t)\Psi_{\nu_t}(c^{t-1})x^0(c^{t-1}) \oplus \omega(c^{t-1})\\
&= \varphi^0(c^{t-1})s^0(c^{t-1}) \oplus \varphi^0(c^t)\Psi_{\nu_t}(c^{t-1})x^0(c^{t-1}) \oplus \omega(c^{t-1})\\
&= H(\varphi^0(c^{t-1}), s^0(c^{t-1})) \oplus h_{\nu_t}(c^{t-1}, x^0(c^{t-1}) \oplus \omega(c^{t-1}), \varphi^0(c^t))
\end{aligned}
$$

Eğer eşitliğin her tarafı $l+1$'den L'ye kadar toplam şeklinde yazılırsa,

$$
\sum_{t=l+1}^{L} H(\varphi^0(c^t), s^0(c^t)) = \sum_{t=l+1}^{L} H(\varphi^0(c^{t-1}), s^0(c^{t-1})) \oplus \sum_{t=l+1}^{L} h_{\nu_t}(c^{t-1}, x^0(c^{t-1}) \oplus \omega^0(c^{t-1}), \varphi^0(c^t))
$$

bulunur. Buradan ise,

$$
H(\varphi^0(c^L)s^0(c^L)) = H(\varphi^0(c^l), s^0(c^l)) \oplus \sum_{t=l+1}^{L} h_{\nu_t}(c^{t-1}, x^0(c^{t-1}) \oplus \omega^0(c^{t-1}), \varphi^0(c^t)) \quad (6.10)
$$

elde edilir.

$\Phi(s^0(c^L)) = M_\omega\{a^T(s(c^L))\} = \varphi^0(c^L)s^0(c^L) = H(\varphi^0(c^L), s^0(c^L))$ sağlandığına ve $s^0(c^L)$ optimal durum olduğuna göre $H(\varphi^0(c^L), s^0(c^L)) = 0$ elde edilir. Bu ise (6.9) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir. Böylece gereklilik ispatlanmış olur.

Gereklilik koşulunun ispat yönteminden görüldüğü gibi yeterlilik, (6.10) şartından doğrudan bulunur.

(6.1) sisteminin dengede olduğunu kabul edelim. Bu durum için aşağıdaki gerek ve yeter koşul ispatlanabilir:

Teorem 6.2.3. (6.3)-(6.5) probleminde $x^0(c)$ kontrol edicisinin ve ona uygun $s^0(c)$ yörüngesinin optimal olması için gerek ve yeter koşul;

$$
\Big(\sum_{(c^0,c^L)}\sum_{\nu=1}^{k} h_\nu(c, x^0(c) \oplus \omega^0(c), \varphi^0(\xi_\nu c))\Delta_2 c_\nu\Big) \otimes \overline{\Big(\sum_{(c^0,c^L)}\sum_{\nu=1}^{k} h_\nu(c, x(c) \oplus \omega(c), \varphi^0(\xi_\nu c))\Delta_2 c_\nu\Big)} = 0
$$

dır.

Burada yukarıdaki çizgi, mantıksal değili işlemini göstermektedir (Rosen, 2012). Sol taraftaki toplam ise c^0 ve c^L noktalarını birleştiren kesikli eğri boyunca bütün mümkün $x(c)$ kontrol edicileri için yapılır.

İspat (Gereklilik). Ele aldığımız (6.3) sisteminin tam çözüm koşulundan

$$
s(c^L) = \sum_{(c^0,c^L)}\sum_{\nu=1}^{k} \hat{\Phi}(c^L, \xi_\nu c)\Psi_\nu(c)(x(c) \oplus \omega(c))\Delta_2 c_\nu,
$$

$$J(x) = M_\omega\{a^T(s(c^L))\} = \sum_{(c^0,c^L)} \sum_{\nu=1}^{k} a\hat{\Phi}(c^L, \xi_\nu c)\Psi_\nu(c)(x(c) \oplus \omega(c))\Delta_2 c_\nu$$

eşitlikleri yazılabilir. $\varphi(\xi_\nu c) = a\hat{\Phi}(c^L, \xi_\nu c)$ olsun. Burada $c = c^0, c^1, \ldots, c^{L-1}$ ve $\hat{\Phi}(c^L, \xi_\nu c) = s(c^L)s^{-1}(\xi_\nu c)$'dir. Ayrıca buradaki $S(c)$;

$$\xi_\nu s(c) = \Phi_\nu(c)s(c), \nu = 1, \ldots, k$$
$$s(c^0) = s^0$$

sisteminin c noktasındaki temel matris operatörüdür. Böylece $\varphi^0(c^L) = a$'dır ve optimal kontrol için

$$\sum_{(c^0,c^L)} \sum_{\nu=1}^{k} h_\nu(c, x^0(c) \oplus \omega^0(c), \varphi^0(\xi_\nu c))\Delta_2 c_\nu) = \min \sum_{(c^0,c^L)} \sum_{\nu=1}^{k} h_\nu(c, x(c) \oplus \omega(c), \varphi^0(\xi_\nu c))\Delta_2 c_\nu)$$

elde edilir. Tüm mümkün kontrol ediciler içerisinden c^0 noktasını c^L nooktasına birleştiren herhangi bir eğri üzerinde minimum alınmış olur. Bu eğri üzerinde (6.8) eşitliği göz önüne alınarak;

$$\sum_{(c^0,c^L)} \sum_{\nu=1}^{k} h_\nu(c, x(c) \oplus \omega(c), \varphi^0(\xi_\nu c))\Delta_2 c_\nu) \geq \sum_{(c^0,c^L)} \sum_{\nu=1}^{k} h_\nu(c, x^0(c) \oplus \omega^0(c), \varphi^0(\xi_\nu c))\Delta_2 c_\nu)$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer yandan bu eşitlik

$$(\sum_{(c^0,c^L)} \sum_{\nu=1}^{k} h_\nu(c, x^0(c) \oplus \omega^0(c), \varphi^0(\xi_\nu c))\Delta_2 c_\nu) \times \overline{(\sum_{(c^0,c^L)} \sum_{\nu=1}^{k} h_\nu(c, x(c) \oplus \omega(c), \varphi^0(\xi_\nu c))\Delta_2 c_\nu)} = 0$$

dir.

İspat (Yeterlik). Teoremdeki eşitliğin sağlandığını, yani çarpımın sıfır olduğunu kabul edelim. Bu takdirde yukarıdaki eşitsizlik kullanılabilir. Eğer bu eşitsizlikte

$$\varphi(\xi_\nu c) = a\hat{\Phi}(c^L, \xi_\nu c)$$

yerine yazılırsa

$$\sum_{(c^0,c^L)} \sum_{\nu=1}^{k} a\hat{\Phi}(c^L, \xi_\nu c)\Psi_\nu(c)(x^0(c) \oplus \omega^0(c))\Delta_2 c_\nu \leq \sum_{(c^0,c^L)} \sum_{\nu=1}^{k} a\hat{\Phi}(c^L, \xi_\nu c)\Psi_\nu(c)(x(c) \oplus \omega(c))\Delta_2 c_\nu$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlik incelendiğinde $x(c)$ herhangi mümkün kontrol edicinin bir optimal kontrol edici olduğu gösterilmiş olur.

Bu bölümde elde edilen sonuçlara dayanarak optimal kontrol edicinin bulunması için aşağıdaki algoritma oluşturulabilir:

1.Adım: $a^T s(c^L) = 0$ koşulundan $s^0(c^L)$ bulunur.

Bu denklemin çözümü genelde tek değildir. Gerekli olduğunda sonraki adımlar için tam çözüm koşulunun sağlandığının kontrol edilmesi amacıyla denklemin bütün çözümleri kaydedilir.

2.Adım: $l = L-1$; $\varphi^0(c^L) = a$ kabul edilir.

3.Adım: v_t seçilir (Genelde v_t rasgele seçilebilir. Fakat hesaplama sayısının azaltılması için $\hat{G}_d$ 'nin sınırından geçen yönün seçilmesi amaca uygundur.).

4.Adım: $\varphi^0(c^l) = \Phi(c^l)\varphi^0(c^{l+1})$ hesaplanır.

5.Adım: Eğer $l = 0$ ise $s^0(c^l) = s(c^0)$

6.Adım: $x^0(c^l)$ ve ona uygun $s^0(c^l)$ tam çözüm koşullarından bulunur.

7.Adım: Eğer $\varphi^0(c^l)s^0(c^l) = \sum_{t=l+1}^{L} h_{v_t}(c^{t-1}, \varphi^0(c^t), x^0(c^{t-1}) \oplus \omega^0(c^{t-1}))$ ise 8. Adım'a, aksi halde 6.Adım'a geçilir.

8.Adım: Eğer $l > 0$ ise $l = l-1$ kabul edilir ve 3.Adım'a, aksi halde 9.Adım'a geçilir.

9.Adım: Son.

BÖLÜM 7
PARAMETREYE BAĞLI LİNEER OLMAYAN STOKASTİK İKİLİ DİNAMİK SİSTEMLERİN ANALİZİ

7.1. Parametreye Bağlı Lineer Olmayan Stokastik İkili Dinamik Sistemlerin Genel Yapısı

Parametreye bağlı lineer olmayan stokastik ardışık dinamik sistem, çok parametreli sonlu ardışık dinamik sistemlerin genelleştirilmiş halidir. Fakat bu sistem, özel olarak belirlenmiş parametre içermektedir. Bu sistem şu şekilde tanımlanmaktadır:

Tanım 7.1.1.

$$\xi_\nu s(c) = F_\nu(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)),\ \nu = 1,2,...k \tag{7.1}$$

$$y(c) = G(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)) \tag{7.2}$$

şeklindeki sisteme parametreye bağlı lineer olmayan stokastik ikili dinamik sistem denir. Burada $s(c)$, $x(c)$ ve $y(c)$ c noktasındaki sırasıyla m, r ve q boyutlu durum, giriş ve çıkış vektörleri , $\omega(c)$ rasgele değişken ve $\lambda(c)$ özel parametredir (Knill, 2009).

$c = (c_1, c_2, ..., c_k) \in G_d = \{c | c \in Z^k, c_1^0 \le c_1 \le c_1^L, ..., c_k^0 \le c_k \le c_k^L, c_i \in Z\}$ Z^k'dan alınmış noktalar, L_i, ($i = 1,2,...k$) bu sürecin devam etme süresi, Z tam sayılar kümesi ve $\xi_\nu s(c)$ ise aşağıdaki şekilde tanımlanan kaydırma operatörüdür.

$$\xi_\nu s(c) = s(c + e_\nu),\ e_\nu = (0,...,0,\overset{\nu}{1},0,...,0),\ \nu = 1,2,...,k$$

İncelenen dinamik sistem denklemi aşırı belirlenmiş sistem olduğundan tek çözüm koşulunun sağlanması gerekir. Bu yüzden optimallik prensibinin ispatında yer alan, başlangıç ve diğer gereken durumların bağlı olduğu parametrenin, sabit giriş değerine uygun olarak tek çözüm koşulunu sağlayan parametre olduğu varsayılır.

Teorem 7.1.1. (7.1)'de verilen sistemin tek çözümünün olması için gerek ve yeter koşul sabit tutulan her $x(c)$ ve $\lambda(c)$ parametresi için

$$F_\nu(c + e_\mu, F_\mu(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), x(c + e_\mu), \omega(c + e_\mu), \lambda(c + e_\mu))$$

$$= F_\mu(c + e_\nu, F_\nu(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), x(c + e_\nu), \omega(c + e_\nu), \lambda(c + e_\nu)) \tag{7.3}$$

dir.

İspat (Gerek koşul). Kaydırma operatörü tanımından

$\xi_\nu s(c) = s(c + e_\nu)$

dir. ξ_μ operatörü yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına uygulandığında

$$\xi_\mu \xi_\nu s(c) = \xi_\mu s(c + e_\nu) = s(c + e_\nu + e_\mu) \tag{7.4}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\xi_\nu \xi_\mu s(c) = s(c + e_\mu + e_\nu) \tag{7.5}$$

yazılır. Toplama işlemi değişmeli olduğundan

$$s(c + e_\nu + e_\mu) = s(c + e_\mu + e_\nu) \tag{7.6}$$

elde edilir. (7.4)-(7.6) birlikte düşünüldüğünde

$$\xi_\mu \xi_\nu s(c) = \xi_\nu \xi_\mu s(c) \tag{7.7}$$

yazılabilir. Diğer taraftan (7.2) eşitliği göz önüne alındığında

$$\xi_\mu \xi_\nu s(c) = \xi_\nu s(c + e_\mu) = F_\nu (c + e_\mu, s(c + e_\mu), x(c + e_\mu), \omega(c + e_\mu), \lambda(c + e_\mu))$$

$$= F_\nu \, (c + e_\mu, F_\mu(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), x(c + e_\mu), \omega(c + e_\mu), \lambda(c + e_\mu)) \qquad (7.8.)$$

elde edilir. Denklem tekrar yazıldığında

$$\xi_\mu \xi_\nu s(c) = F_\nu (c + e_\mu, F_\mu (c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), x(c + e_\mu), \omega(c + e_\mu), \lambda(c + e_\mu)) \tag{7.9}$$

dir. Benzer şekilde;

$$\xi_\nu \xi_\mu s(c) = F_\mu (c + e_\nu, F_\nu (c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), x(c + e_\nu), \omega(c + e_\nu), \lambda(c + e_\nu)) \tag{7.10}$$

dir. Bu yüzden (7.7)-(7.10)'dan

$$F_{\nu}(c+e_{\mu},F_{\mu}(c,s(c),x(c),\omega(c),\lambda(c)),x(c+e_{\mu}),\omega(c+e_{\mu}),\lambda(c+e_{\mu}))$$
$$=F_{\mu}(c+e_{\nu},F_{\nu}(c,s(c),x(c),\omega(c),\lambda(c)),x(c+e_{\nu}),\omega(c+e_{\nu}),\lambda(c+e_{\nu})),$$
$$(\nu,\mu=1,2....k) \qquad (7.11)$$

elde edilir. Böylece gerek koşul ispatlanmış olur.

İspat (Yeter Koşul). Teoremin yeter koşulu Bölüm 5'deki Teorem 5.3.1. ispatında yer alan kabullere göre ispatlanabilir.

Aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını varsayalım:

$$(F_{\nu}^{0}(c,\cdot))(s)=s,\quad (F_{\nu}^{r}(c,\cdot))(s)=F_{\nu}\underbrace{(c,F_{\nu}(c,...,F_{\nu}\ (c,s,x,\omega,\lambda)...))}_{r times}$$
$$(F_{1}(c^{1},\cdot)\otimes F_{2}\ (c^{2},\cdot)\otimes...\otimes F_{m}(c^{m},\cdot))(s)\ =F_{1}(c^{1},F_{2}(c^{2},...,F_{m}(c^{m},s,x,\omega,\lambda)...)) \qquad (7.12)$$

$K(c^{1},\,c^{2},...\,c^{L}),\left(c^{1},\,c^{2},...\,c^{L}\right)$ noktalarını birleştiren parçalı eğri olsun.

Bu eğri boyunca düşünüldüğünde,

$$\pi(s)=(\prod_{k(c^{1},...c^{L})}\otimes F_{1}^{\Delta l_{1}}(l,x(l),\omega(l),\lambda(l)\cdot)...F_{k}^{\Delta l_{k}}(l,x(l),\omega(l),\lambda(l)\cdot))(s)$$

$$=(\prod_{i=1}^{L-1}\otimes F_{1}^{c_{1}^{i+1}-c_{1}^{i}}(c^{i},x(c^{i}),\omega(c^{i}),\lambda(c^{i}).)...F_{k}^{c_{k}^{i+1}-c_{k}^{i}}(c^{i},x(c^{i}),\omega(c^{i}),\lambda(c^{i})\cdot))(s) \qquad (7.13)$$

yazılır. Burada $\otimes$ sembolü Galois cismi üzerinde modulo 2 çarpmayı göstermektedir.

$\pi(s)$ değerinin sadece $K(c^{1},\,c^{2},...\,c^{L})$'nın başlangıç ve bitiş noktalarına değil aynı zamanda $c^{i}\,(1<i<L)$ noktalarına bağlı olduğu görülmektedir.

Çok boyutlu kesikli sistemlerde olduğu gibi $\pi(s)$ değerinin sadece $K(c^{1},c^{2},...,c^{L})$ kesikli eğrisinin başlangıç ve son noktalarına bağlı olmasını sağlayan yeterli koşulu (7.3) şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\pi(s)$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\pi(s)=\prod_{(c^{1},c^{L})}\otimes F_{1}^{\Delta l_{1}}(l,x(l),\omega(l),\lambda(l)\cdot)...F_{k}^{\Delta l_{k}}(l,x(l),\omega(l),\lambda(l)\cdot))(s) \qquad (7.14)$$

Farz edelim ki, $(c^0, s^0) \in Z^k \times [GF(2)]^m$ olsun. Böylece aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım:

$$s(c, c^0, s^0, x(c), \omega(c), \lambda(c))$$
$$= \prod_{(c^0, c)} \otimes F_1^{\Delta c_1}(c, x(c), \omega(c), \lambda(c).)...F_k^{\Delta c_k}(c, x(c), \omega(c), \lambda(c)\cdot))(s^o) \quad (7.15)$$

(7.15)'te göz önüne alınan fonksiyona kaydırma operatörü uygulanırsa

$$\xi_v s(c, c^0, s^0, x(c), \omega(c), \lambda(c)) = (F_v(c, \cdot) \otimes s(c, c^0, \cdot))(s^0)$$
$$= F_v(c, s(c, c^0, s^0, x(c), \omega(c), \lambda(c))) \quad (7.16)$$

elde edilir. Sonuç olarak s(c), (7.2)'de verilen sistemin tek çözümüdür.

Bununla birlikte göz önüne alınan sistemin durumu, stokastik ardışık dinamik sistemlerin parametreleri ile birlikte giriş değişkenlerini etkileyen rasgele ω değişkenine bağlıdır.

Son olarak (7.2) denklemi aşağıdaki biçime dönüştürülebilir.

$$\xi_v s(c) = F_v(c, s(c), x(c) \oplus \omega(c), \lambda(c)), \; v = 1, 2, ..., k \quad (7.17)$$

Burada $\oplus$ sembolü , $x \oplus \omega$ toplamının daima X giriş kümesinin elemanı olduğu anlamına gelmektedir.

Parametreye bağlı stokastik ikili dinamik sistemler ile kesikli optimal süreçler aşağıdaki fonksiyonel ile karakterize edilir.

$$J(x) = M_\omega\{\phi(s(c^L))\} \quad (7.18)$$

Burada $M_\omega\{.\}, \omega'$ nın matematiksel beklenen değeridir.

7.2. Optimal Kontrol Etme Problemi ve Optimallik Prensibi

Bu kısımda verilen tanım, teorem ve özellikler LOSİDS'deki özelliklere benzer şekilde gösterilmiştir.

Parametreye bağlı stokastik ikili dinamik sistemler ile verilen süreçler için optimal kontrol etme problemini inceleyelim. (7.18) fonksiyoneli minimal değer alacak şekilde parametreye bağlı stokastik ikili dinamik sistemini L adımda, bilinen s^0 başlangıç durumundan $s^*(c^L)$ son durumuna getiren mümkün $x(c) \in \hat{X}$ kontrol edicisinin bulunması gerekir.

$$\xi_\nu s(c) = \hat{F}_\nu(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), c \in G_d\,,\ \nu = 1,2,...k \tag{7.19}$$

$$s(c^0) = s^0,\ x(c) \in X\,, c \in G_d \tag{7.20}$$

$$\hat{F}_\nu(c + e_\mu, \hat{F}_\mu(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), x(c + e_\mu), \omega(c + e_\mu), \lambda(c + e_\mu))$$

$$= \hat{F}_\mu(c + e_\nu, \hat{F}_\nu(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), x(c + e_\nu), \omega(c + e_\nu), \lambda(c + e_\nu)) \tag{7.21}$$

$$J(x) = M_\omega\{\phi(s(c^L)\} \to \min \tag{7.22}$$

Burada $\hat{F}_\nu(.)$ $(\nu = 1,...,k)$ Boolean vektör fonksiyonlarının pseudo-Boolean ifadesini göstermektedir (Yablonsky, 1989).

Optimal kontrol etme probleminin çözümü için bilinen yöntemlerden biri olan dinamik programlama yönteminden yararlanılabilir (Bellman, 1957). Göz önüne alınan problem için bu yöntem yardımıyla (7.19)-(7.22) denklemleri, bir optimal problem olarak aşağıdaki gibi formülize edilebilir.

$$\xi_\nu s(c) = \hat{F}_\nu(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), c \in G_d(\sigma) \tag{7.23}$$

$$s(\sigma) = \aleph \tag{7.24}$$

$$x(c) \in X, c \in G_d(\sigma) \tag{7.25}$$

$$\hat{F}_\nu(c + e_\mu, \hat{F}_\mu(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), x(c + e_\mu), \omega(c + e_\mu), \lambda(c + e_\mu))$$

$$= \hat{F}_\mu(c + e_\nu, \hat{F}_\nu(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), x(c + e_\nu), \omega(c + e_\nu), \lambda(c + e_\nu)) \tag{7.26}$$

$$J(x) = M_{\omega}\{\phi(s(c^L))\} \rightarrow \min \tag{7.27}$$

Burada $\aleph$, S' de keyfi bir elemandır. (7.23)-(7.27)'de $\sigma = c^0$ ya da $\aleph = s^0$ yazılırsa yukarıda belirtilen birinci problem elde edilir. Tek çözümün varlığı için koşullar sağlanırsa, verilen $s(\sigma) = \aleph$ başlangıç durumu ve $x(c)(c \in G_d(\sigma))$ kontrol edicisi için tek bir $s(c)$ elde edilir. Yani (7.27) fonksiyoneli, $\aleph$ parametresinin ve $x(c)$ kontrol edicisinin fonksiyonudur. Buna göre;

$$J(x) = J(\aleph, x(G_d(\sigma)) \tag{7.28}$$

dir. Burada $x(G_d(\sigma))$, $c \in G_d(\sigma)$ noktasındaki $x(c)$ kontrol edicisinin görüntüsüdür.

$$x(G_d(\sigma)) = \{x(c), c \in G_d(\sigma)\} \tag{7.29}$$

(7.19)'un tek çözüm koşulundan, stokastik sürecin $G_d(\sigma)$ kümesi ve bununla birlikte

$$G_{d_1}(\sigma) = \{c; c_1^0 \leq c_1 < \sigma_1, ..., c_k^0 \leq c_k < \sigma_k\} \tag{7.30}$$

kümesi üzerinde incelenebileceği görülmektedir.

Tanım 7.2.1 (7.23)-(7.27) problemlerinde (7.18) fonksiyonelini minimal yapan $x(c)$ kontrol edicisine ele alınan bölge üzerindeki $(\sigma, \aleph)$ başlangıç çiftine karşılık gelen optimal kontrol edici denir (Hacı ve Candan, 2014).

Teorem 7.2.1. Parametreye bağlı stokastik ikili ardışık dinamik sistem ele alınsın. $x^0(c)$'nin G_d bölgesi üzerindeki (c^0, s^0) başlangıç çifti için bir optimal kontrol edici ve $s^0(c)$'nin mümkün optimal yörünge olduğunu kabul edelim. Buna göre $G_d(\sigma)$ bölgesindeki $(\sigma, s^0(\sigma))$ başlangıç çiftine karşılık gelen $x^0(c)$, bir optimal kontrol edicidir.

İspat. Bölüm 5'deki optimallik prensibinin verildiği Teorem 5.3.2.'nin ispatına benzer şekilde gösterilebilir. Aksini kabul edelim. Yani

$$J(\aleph, x(G_d(\sigma)) < J(\aleph, x^0(G_d(\sigma)) \tag{7.31}$$

olacak şekilde $x(c) \in X, c \in G_d(\sigma)$ vardır.

Aşağıda $\tilde{x}(c), c \in G_d$ olarak tanımlanan yeni bir kontrol edici seçilir.

$$\tilde{x}(c) = \begin{cases} x^0(c), c \in G_{d_1}(\sigma) \\ x(c), c \in G_d(\sigma) \end{cases} \tag{7.32}$$

Buradan görülüyor ki (7.32), aşağıdaki eşitlik sağlanacak şekilde mümkün kontrol edicidir.

$$J(s^0, \tilde{x}(G_d)) = J(s^0, \tilde{x}(G_{d_1}(\sigma) \cup G_d(\sigma)). \tag{7.33}$$

Koşula göre, $s^0(\sigma) = \aleph$ dir. Böylece

$$J(s^0, \tilde{x}(G_{d_1}(\sigma) \cup G_d(\sigma)) = J(s^0(\sigma), \tilde{x}(G_d(\sigma))$$
$$J(\aleph, x(G_d(\sigma))) < J(\aleph, x^0(G_d(\sigma)))$$
$$= J(s(\sigma), x^0(G_d(\sigma))) = J(s^0, x^0(G_d)) \tag{7.34}$$

yazılabilir ve (7.33) ve (7.34)'den

$$J(s^0, \tilde{x}(G_d)) < J(s^0, x^0(G_d)) \tag{7.35}$$

elde edilir. Bundan dolayı (7.35) hipotez ile çelişir ki bu ise $x^0(c), c \in G_d$'nın optimal kontrol edici olduğunu gösterir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$$B(\sigma, \aleph, \lambda) = \min M_\omega \{\phi(s(c^L))\} \tag{7.36}$$

olarak verilen fonksiyon, her sabit σ ve $\aleph$ için (7.23)-(7.27)'deki problemdeki pseudo-Boolean fonksiyonelinin optimal değerine karşılık gelen bir fonksiyon olsun. Burada minimalleştirme $x(c), c \in G_d(\sigma)$ mümkün kontrol edicinin kümesi üzerinde yapılmaktadır.

Şimdi dinamik programlama olarak da bilinen Bellman denklemini $B(\sigma, \aleph)$ için belirleyelim (Bellman, 1957). Farz edelim ki $x^0(c), c \in G_d$ başlangıç koşullarına sahip

(7.23)-(7.27)'ye karşılık gelen mümkün kontrol edici ve $s^0(c), c \in G_d(\sigma)$ de optimal yörünge olsun. $\xi_v s \in G_d(\sigma)(v = 1,2,...,k)$ noktası ve herhangi bir $y(c) \in X$ elemanı belirlensin. Eğer $x(\sigma) = y(c)$ ise sistemin $\xi_v \sigma$ noktasındaki durumu;

$$s(\xi_v \sigma) = \hat{F}_v(\sigma, \aleph, y, \omega(\sigma), \lambda(\sigma)) \tag{7.37}$$

ile belirlenir.

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$\xi_v s(c) = \hat{F}_v(c, s(c), x(c), \omega(c), \lambda(c)), c \in G_d(\xi_v \sigma) \tag{7.38}$$

$$s(\xi_v \sigma) = \hat{F}_v(\sigma, \aleph, y, \omega(\sigma), \lambda(\sigma)) \tag{7.39}$$

$$x(c) \in X(c), c \in G_d(\xi_v \sigma) \tag{7.40}$$

$$J(x) = M_\omega \{\phi(s(c^L))\} \to \min \tag{7.41}$$

Eğer $\hat{y}(c), c \in G_d(\xi_v \sigma)$ ve $\hat{s}(c), c \in G_d(\xi_v \sigma)$ sırasıyla optimal kontrol edici ve bu optimal kontrol ediciye karşılık gelen optimal yörünge ise,

$$M_\omega \{\phi(\hat{s}(c^L))\} = B(\xi_v \sigma, \hat{F}_v(\sigma, \aleph, y, \omega(\sigma), \lambda(\sigma))) \tag{7.42}$$

şeklinde bulunur.

(7.23)-(7.27) için $\tilde{x}(c)$ aşağıda tanımlanan mümkün kontrol edici olsun.

$$\tilde{x}(c) = \begin{cases} y & , c = \sigma \\ \hat{y}(c), & c \in G_d(\xi_v \sigma) \end{cases} \tag{7.43}$$

Bununla birlikte $\tilde{s}(c)$ optimal yörüngesi ise

$$\widetilde{s}(c)=\begin{Bmatrix}\hat{F}_\nu(\sigma,\aleph,y,\omega(\sigma),\lambda(\sigma)), c=\sigma\\ \hat{s}(c)\ , c\in G_d(\xi_\nu\sigma)\end{Bmatrix} \tag{7.44}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da açıkça görülmektedir ki $J(x)=M_\omega\{\phi(s(c^L))\}$ fonksiyonelinin değeri;

$$M_\omega\{\phi(\widetilde{s}(c^L))\}=M_\omega\{\phi(\hat{s}(c^L))\}=B(\xi_\nu\sigma,\hat{F}_\nu(\sigma,\aleph,y,\omega(\sigma),\lambda(\sigma))). \tag{7.45}$$

dir. $\widetilde{x}(c), c\in G_d(\sigma)$ optimal kontrol edici olmadığından

$$M_\omega\{\phi(\widetilde{s}(c^L))\}\geq M_\omega\{\phi(s^0(c^L))\}=B(\sigma,\aleph,\lambda) \tag{7.46}$$

dir. Böylece,

$$B(\sigma,\aleph,\lambda)\leq B(\xi_\nu\sigma,\hat{F}_\nu(\sigma,\aleph,y,\omega(\sigma),\lambda(\sigma))) \tag{7.47}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan, $y(c)=x^0(\sigma)$ olarak alınırsa optimallik prensibinden,

$$\hat{y}(c)=x^0(c)(c\in G_d(\xi_\nu\sigma)) \tag{7.48}$$

dir. Buradan da

$$B(\sigma,\aleph)=B(\xi_\nu\sigma,\hat{F}_\nu(\sigma,\aleph,x^0(\sigma),\omega(\sigma),\lambda^0(\sigma))) \tag{7.49}$$

elde edilmiş olur.

(7.47) ve (7.48)'den Bellman denklemi;

$$\begin{gathered}B(\sigma,\aleph)=\min_{y\in X(\sigma)}B(\xi_\nu\sigma,\hat{F}_\nu(\sigma,\aleph,y,\omega(\sigma),\lambda(\sigma))),\\ \aleph\in S\end{gathered} \tag{7.50}$$

şeklinde belirlenmiş olur.

Böylece bu bölümde λ parametresinin sabit giriş değerine uygun olarak tek çözüm koşulu ifadesinden elde edildiği gösterilmiştir. Bu yüzden bu belirli parametre, optimallik prensibinin ispatında yer alan başlangıç ve diğer bazı uygun durumlarda etkin rol oynamıştır. Bununla birlikte çok adımlı stokastik kesikli süreçler için optimal kontrol etme probleminin çözüm yöntemlerinden biri olan dinamik programlama yöntemi, göz önüne alınan probleme uygulanarak Bellman denklemi elde edilmiştir.

BÖLÜM 8
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında şu sonuçlara varılmıştır:

Çok boyutlu kesikli dinamik sistem denklemleri analiz edilmiştir.

Çok parametreli lineer ve lineer olmayan stokastik ikili dinamik sistemler ile verilen süreçlerin gösterimi için yöntemler verilmiştir.

Optimal kontrol etme probleminin çözümünün varlığı için gerekli olan, çok parametreli lineer olmayan stokastik ikili denklemler sisteminin tam çözümünün olmasını sağlayan teorem ispatlanmıştır.

Lineer olmayan stokastik ikili dinamik sistemlerin erişim kümesi oluşturularak detaylı bir şekilde incelenmiş ve uygun süreçler için optimal kontrol edicinin varlık teoremi ispatlanmıştır.

Terminal kontrol etme probleminin farklı yönlerinden biri sistemin geçiş fonksiyonunun Boolean fonksiyonu, süreci minimalleştiren kriterin ise pseudo-Boolean fonksiyonu olmasıdır. Bu nedenle bir adımlı ve çok adımlı geçiş fonksiyonlarının aritmetik gösterimlerinin verilmesi gerekmektedir. Bunun için bu problemin çözümüne uygun yöntemler verilmiştir.

Tam çözülebilen çok parametreli LOSİDS'de terminal kontrol etme problemi için Bellman'ın denklemler sistemi tipinde optimallik prensibi önerilmiş ve optimallik için gerekli koşul ispatlanmıştır.

LSİDS denklemleri için Hamilton-Pontryagin fonksiyonunun Boolean benzeri bir fonksiyoneli önerilmiş ve söz konusu nitelik kriteri durumunda, kesikli maksimum prensibi tipli optimal kontrol problemi için gerek ve yeter koşul bulunmuştur.

Parametreye bağlı lineer olmayan stokastik ikili dinamik sistemlerde parametrenin, tam çözüm koşulunu sağladığı varsayılarak benzer şonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Çok parametreli LSİDS için bazı test problemlerinin bilgisayarda çözümü için bir algoritma oluşturulmuştur.

Beşinci ve altıncı bölümdeki bulgular sırasıyla Hacı ve Candan (2015), Hacı ve Candan (2016) olarak yayımlanmıştır.

Tezde elde edilen sonuçlar, optimal lineer olmayan impuls sistemlerinin araştırılmasında ve hesaplanmasında, yanlışlıkları düzelten kodlama teorisinde, çok boyutlu sistemlerin optimal kontrol etme problemlerinde, tam sayılı programlamada uygulanabilir.

Bundan sonraki çalışmalarda, optimal kontrol etme probleminin çözümünün varlığı için gerekli olan, çok parametreli lineer stokastik ikili denklemler sisteminin tam çözümünün olmasını sağlayan yöntemler de araştırılabilir.

Çok parametreli LOSİDS ile verilen süreçlerde bazı test problemlerinin bilgisayarda çözümü için algoritmaların bulunması üzerine çalışmalar yapılabilir.

LSİDS ve LOSİDS ile gösterilen süreçler için elde edilen optimal kontrol etme problemlerinin nümerik çözümlerini bulmak üzerine yaklaşımlarda bulunulabilir.

Oyun teorisinin araştırma alanlarından olan matris oyunları ve diferansiyel oyunlar ile bu çalışmada göz önüne alınan dinamik sistem modellerinin bağlılığı ve benzer yanları incelenerek bu alanların ikili dinamik sistem denklemlerine uyarlanıp uyarlanamayacağı üzerine çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Akdeniz F., 2007. Olasılık ve İstatistik (13. Baskı). Nobel Kitabevi. Adana. 125-159.

Anderson J. A., 2004. Discrete Mathematics with Combinatorics. Prentice Hall, New Jersey. 45-46.

Arbib M. A., 1966. Automata Theory and Control Theory. Automatica. 3: 161-189.

Azhmyakov V., Basin M. V., Garcia A. E. G., 2014. Optimal Control Processes Associated with a Class of Discontinuous Control Systems: Applications to Sliding Mode Dynamics. Kybernetika, 50(1): 5-18.

Azimli A., 2011. Matematiksel Optimizasyon. Papatya Yayıncılık, İstanbul. 297 p.

Bellman R., 1957. Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 3-11, 81-85.

Boltyanskii V. G., 1971. Mathematical Methods of Optimal Control, Holt,Rineart and Winston Inc., USA.1-33, 92-108.

Boltyanskii V. G., 1978. Optimal Control of Discrete Systems. John Willey, New York. 1-63, 317-384.

Bonnans J. F., Fernandez de la Vega C. S., 2010. Optimal Control of State Constrained Integral Equationes. Set-Valued and Variational Analysis, 18 (3- 4): 307-326.

Burden R. L., Douglas J., 2001. Numerical Analysis (7th ed.). Brooks/Cole, Pacific Grove, Australia. 498-516, 611-613.

Çağal B., 2000. Sayısal Analiz. Birsen Yayınevi, İstanbul. 61-66.

Çölkesen T. R., 2015. Bilişim Matematiği Uygulamalı Ayrık Matematik. Papatya Yayıncılık, İstanbul.109-150.

Farajov R. G., 1975. Linear Sequential Machines. Sov. Radio, Moscow (in Russian).

Gabasov R., Kirillova F. M., Paulianok N. S., 2008. Optimal Control of Linear Systems on Quadratice Performance Index. Applied and Computational Mathematics, 7(1): 4-20.

Gabasov R., Kirillova F. M., Payasok E. S., 2009. Robust Optimal Control on Imperct Measurements of Dynamic Systems States. Applied and Computational

Mathematics, 8(1): 54-69.

Gaishun I. V., 1981. Completely Solvable Multidimensional Differential Equations. Nauka and Tekhnika, Minsk. 43-63 (in Russian).

Gill A., 1962. Introduction to the Theory of Finite State Machines. McGraw-Hill, London. 207 p.

Gill A., 1975. Linear Sequential Machines. Mir, Moscow. 287 p (in Russian).

Guillaume C., Tahraoui R., 2008. On Some Optimal Control Problems Governed by a State Equation with Memory. ESAIM: Control Optimisation and Calculus of Variations, 14(4): 725-743.

Hacı Y., 2009. Optimal Control Problem For Processes With Multi-Parametric Binary Linear Difference Equation System. Applied and Computational Mathematics, 8(2): 263-267.

Hacı Y., Candan M., 2014. Optimal Control Problem For Processes Represented By Stochastic Sequential Machine. International Journal on Cybernetics and Informatics, 3(4): 21-26.

Hacı Y., Candan M., Or A., 2016. On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamic System. International Journal in Foundations of Computer Science and Technology, 6(1): 57-63.

Hacı Y., Ozen K., 2009. Terminal Control Problem for Processes Represented by Nonlinear Multi Binary Dynamic System. Control and Cybernetics, 38(3):625-633.

Hungerford T. W., 1974. Graduate Texts in Mathematics Algebra. Springer-Verlag, New York. 269-278.

Karakaş H. İ., 2008. Cebir Dersleri, TÜBA Ders Kitapları, Ankara. 402 p.

Kirk D. E., 1970. Optimal control theory: an introduction. Prentice-Hall, London.

Knill O,. 2009. Probability Theory and Stochastic Processes with Applications. Overseas Press, India. 23-42.

Mamedova G. G., 2003. Controllability of n-Dimensional Homogeneous Bilinear Sequential Machines Over The Field GF(p). Proceeding of IMM of NAS of

Azerbaijan. 219-226.

Mordukhovich B. S., 2006. Variational Analysis and Generalized Differentiation, I: Basic Theory. Springer, Detroit, USA. 581 p.

Musayev B., Alp M., 2000. Fonksiyonel Analiz. Balcı Yayınları, Kütahya. 349-366.

Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze Mishchenko., 1962. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Interscience Publishers, New York. 360 p.

Rosen H. K., 2012. Discrete Mathematics and Its Applicatication (7th ed.). McGraw-Hill, New York. 811-819.

Stengel R. F., 1986. Stochastic Optimal Control Theory and Applications. John Wiley and Sons, New York. 420-451.

Tzafestas S. G., 1972. Concerning Controllability and Observability of Linear Sequential Machines. Int. J. Systems Sci. 3: 197-208.

Yablonsky S. V., 1989. Introduction to Discrete Mathematics. Mir Publishers, Moscow. 100-113 (in Russian).

Yermolyev Y. M., 1976. Stochastic Programming Methods. Nauka, 240.241 (in Russian).

Zadeh L.A., 1965. Fuzzy Sets. Information and Control, 8: 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Muhammet CANDAN

Doğum Yeri : İzmir

Doğum Tarihi : 10.10.1985

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü (2008)

Yüksek Lisans Öğrenimi : ÇOMÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ABD (2011)

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce.

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar -SCI -Diğer

1. Hacı H. Yakup, Candan Muhammet (2014). Optimal Control Problem for Processes Represented by Stochastic Sequential Machine. Internatinal Journal on Cybernetics and Informatics, 3(4), 21-26.
2. Hacı H. Yakup, Candan Muhammet, Or Aykut (2016). 'On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamic System'', International Journal in Foundations of Computer Science and Technology. 6(1), 57-63.

b) Bildiriler -Uluslararası

1. Hacı Yakup, Candan Muhammet (2012). Analysis of Mathematical Model of Stochastic Sequantial Machines. 8th International Symposium of Statistics, Eskişehir, Türkiye. (Özet bildiri)
2. Hacı Yakup, Or Aykut, Candan Muhammet (2012). Values of Some Infinite Matrix Games. 8th International Symposium of Statistics, Eskişehir, Türkiye. (Özet bildiri)
3. Hacı Yakup, Candan Muhammet (2015). On the Principle of Optimality for Stochastic Dynamical Systems. International Conference on Applied Analysis Mathematical Modeling, İstanbul, Türkiye. (Özet bildiri)
4. Hacı Yakup, Candan Muhammet (2016). Optimal Control Problem for Processes Given by Multi-Parameter Linear Stochastic Dynamic System. Function Theory on Infinite Dimensional Spaces XIV, Madrid, İspanya. (Özet bildiri)

5. Or Aykut, Candan Muhammet, Hacı Yakup, (2016). Succesive Approximation Method in Matrix Games. Function Theory on Infinite Dimensional Spaces XIV, Madrid, İspanya. (Özet bildiri)

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : ÇOMÜ Matematik Bölümü (Araştırma Görevlisi) 2009-2017

İLETİŞİM

E-posta Adresi : mcandan@comu.edu.tr