



T.C.

**ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MINKOWSKI UZAYINDA PH-HELİS EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EREN CAN ÖZBAL

Tez Danışmanı

DR. ÖĞR. ÜYESİ MEHMET GÜMÜŞ

ÇANAKKALE – 2023



T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MINKOWSKI UZAYINDA PH-HELİS EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EREN CAN ÖZBAL

Tez Danışmanı

DR. ÖĞR. ÜYESİ MEHMET GÜMÜŞ

Bu çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri

Koordinasyon kurumu tarafından desteklenmiştir.

Proje No: FYL-2021-3818.

ÇANAKKALE – 2023



T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ



Eren Can ÖZBAL tarafından Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ yönetiminde hazırlanan ve **24/08/2023** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan “**Minkowski Uzayında PH-Helis Eğriler**” başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS YETERLİK TEZİ** olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ
(Danışman)

Doç. Dr. Çetin CAMCI

Doç. Dr. İnan ÜNAL

.....

.....

.....

Tez No : 10567517

Tez Savunma Tarihi : 24/08/2023

.....
Prof. Dr. Ahmet Evren ERGİNAL
Enstitü Müdürü

.././2023

ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Eren Can ÖZBAL

24/08/2023

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ'e, tezin düzenlenmesinde önemli katkıları olan Doç. Dr. Çetin CAMCI'ya,

Hayatımın her evresinde olduğu gibi tez çalışmamı hazırlarken de bana destek olan kıymetli ailem annem Serap ÖZBAL'a, babam Bayram ÖZBAL'a,

Yüksek lisans eğitimi için beni teşvik eden, bilgi ve birikimleriyle daima yol gösteren ablam Ceren BAYDEMİR'e ve eşi Barış BAYDEMİR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: FYL-2021-3818.

Eren Can ÖZBAL
Çanakkale, Ağustos 2023

ÖZET

MINKOWSKI UZAYINDA PH-HELİS EĞRİLER

Eren Can ÖZBAL

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ

24/08/2023, 41

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmıdır. İkinci bölümde, tezde kullanılmış olan Öklid 3-uzayı ve Minkowski 3-uzayındaki bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise, Minkowski 3-uzayında PH-Eğriler için karakterizasyon elde edilmiş ve örnek verilmiştir. Dördüncü bölümde ise, Minkowski 3-uzayında PH-Helis eğrileri elde etmek için eğrinin bulunduğu düzlemin casual karakterine göre incelenerek bir karakterizasyon verilmiş ve örneklendirilmiştir. Son olarak beşinci bölümde, Minkowski 3-uzayında PH-Eğri ve PH-Helis eğri ile ilgili elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: PH-Eğri, PH-Helis Eğri, Minkowski Uzayı.

ABSTRACT

PH-HELICAL CURVES IN MINKOWSKI SPACE

Eren Can ÖZBAL

Çanakkale Onsekiz Mart University

School of Graduate Studies

Master of Science Thesis in Department Of Mathematics

Advisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet GÜMÜŞ

24/08/2023, 41

This thesis consists of five chapters. The first section is the introduction. In the second section, the basic concepts and the theorems in Euclidean 3-space and Minkowski 3-space are given. In the third section, a characterization for the PH-Curves in Minkowski 3-space is constructed and an example is given. In the fourth section, a characterization is given to obtain PH-Helical curves in Minkowski 3-space according to the casual character of the plane in which the curve is located and examples are given. Finally, in the fifth section, the results obtained for PH-Curves and PH-Helical curves in Minkowski 3-space are given.

Keywords: PH-Curve, PH-Helical Curve, Minkowski Space.

İÇİNDEKİLER

| | Sayfa No |
|------------------------------|----------|
| JÜRİ ONAY SAYFASI..... | i |
| ETİK BEYAN..... | ii |
| TEŞEKKÜR..... | iii |
| ÖZET | iv |
| ABSTRACT | v |
| İÇİNDEKİLER | vi |
| SİMGELER ve KISALTMALAR..... | viii |
| ŞEKİLLER DİZİNİ..... | ix |

BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

İKİNCİ BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

4

2.1. Öklid 3-Uzayında Temel Kavramlar ve Teoremler.....

4

2.2. Minkowski 3-Uzayında Temel Kavramlar ve Teoremler

9

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

MINKOWSKİ 3-UZAYINDA PH EĞRİLER

10

3.1. Minkowski 3- Uzayında PH-Eğri.....

14

| | | |
|---|--|----|
| DÖRDÜNCÜ BÖLÜM | | 20 |
| MINKOWSKI 3-UZAYINDA PH-HELİS EĞRİ | | |
| 4.1. Minkowski Uzayında PH-Helis Eğriler ve Karakterizasyonu..... | | 24 |
| 4.1.1. Normal Vektörü Timelike Olan Spacelike Düzlem..... | | 24 |
| 4.1.2. Null Düzlem..... | | 34 |
| 4.1.3. Normal Vektörü Spacelike Olan Timelike Düzlemler..... | | 35 |
| BEŞİNCİ BÖLÜM | | 38 |
| SONUÇ ve ÖNERİLER | | |
| KAYNAKÇA | | 40 |
| ÖZGEÇMİŞ | | 1 |

SİMGELER VE KISALTMALAR

| | |
|----------------------|---|
| \mathbb{R} | Reel sayılar kümesi |
| I | Reel sayılar kümesinin bir açık alt aralığı |
| \mathbb{E}^3 | 3- Boyutlu Öklid uzayı |
| \mathbb{E}^n | n - Boyutlu Öklid uzayı |
| \mathbb{E}_1^3 | Üç boyutlu minkowski uzayı |
| T | Bir Eğrinin teğet vektörü |
| N | Bir Eğrinin normal vektörü |
| B | Bir Eğrinin binormal vektörü |
| κ | Bir Eğrinin eğriliği |
| τ | Bir Eğrinin burulması (torsiyonu) |
| \times | Vektörel çarpım |
| $\ , \ $ | Norm |
| $\ , \ _L$ | Minkowski anlamında norm |
| \langle, \rangle | İç çarpım |
| \langle, \rangle_L | Minkowski anlamında iç çarpım |

| Şekil No | Şekil Adı | Sayfa No |
|-----------------|--|-----------------|
| Şekil 1 | Minkowski Uzayında PH-Eğri Örneği | 19 |
| Şekil 2 | Normal Vektörü Timelike Olan Spacelike Düzlemde Bulunan Eğri | 21 |
| Şekil 3 | Minkowski Uzayındaki PH-Eğri Örneği | 29 |
| Şekil 4 | Minkowski Uzayında PH-Helis Eğri Örneği | 31 |
| Şekil 5 | Normal Vektörü Null Olan Null Düzlemde Bulunan Eğri | 32 |
| Şekil 6 | Normal Vektörü Spacelike Olan Timelike Düzlemde Bulunan Eğri | 33 |



BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

Diferansiyel geometride, eğriler teorisi en temel çalışma alanlarından birisidir. Bir eğrinin özelliklerini karakterize etmek için farklı yöntemler kullanılmakta olup, bu yöntemlerden birisi de Frenet çatısı ve bunların eğri boyunca değişimlerini içeren Frenet denklemleridir (Kreyszig, 1959). Ayrıca eğrileri sınıflandırmak için de Frenet denklemleri ve eğrinin eğrilikleri önemli bir araç olarak kullanılmaktadır. Diğer yandan eğriler teorisinin en önemli ve ilgi çekici eğrilerinden birisi de helis eğrisidir. Çekici simetrisi ve zarif biçimleriyle helis eğrileri, büyüleyici matematiksel yapılardır.

Fiziksel dünyada çeşitli şekillerde tezahür eden helisler, birçok farklı bilim dalında çok geniş kullanım alanlarına ve uygulamalara sahiptir. DNA çift sarmalında, deniz kabuğunun zarif kıvrımına, hayvan boynuzlarında, sarmal gökadalardan kollarında, asma filizinin tırmanırken çizdiği eğri olarak helis eğrisiyle karşılaşırız.

Bir çok uygulama alanlarında kullanılan helis eğrileri; yapılarda mimari olarak verimlilik ve cazibe katmak amacıyla tek sarmala veya çift sarmala sahip merdivenler, mühendislik alanında helisel dişliler, düz dişlilere göre daha yumuşak ve sessiz çalışma imkanı sunar, otomotiv şanzımanlarında, endüstriyel makinelerde, vidalar ve cıvatalar ise nesnelere birbirine tutturmalarını verimli olması için kullanılır.

Helislerle ilgili genel bir tanımı M.A. Lancret tarafından ifade edilmiş (Lancret, 1806) ve ilk olarak 1845 yılında B.de Saint Venant tarafından bir eğrinin helis olabilmesi için gerek ve yeter şartının τ burulmasının κ eğriliğine olan oranının sabit olması gerektiği ispatlanmıştır (Struik, 1988). DNA'nın yapısındaki moleküllerin dizilişinde, Fraktal geometride, bilgisayar destekli tasarım ve bilgisayar grafikleri gibi pek çok alanda kullanılması helis eğrilerinin ilgi çekmesine yol açmıştır. Dolayısıyla bu eğrilerin karakterizasyonları üzerine gün geçtikçe daha fazla sayıda araştırmacı tarafından çalışılmaya devam edilmektedir.

Kubota'nın polinomlar için Pisagor koşulunu öne sürmesiyle hızı bir polinomun karesine eşit olan eğri düşüncesi ortaya çıkmıştır (Kubota, 1972). Kubota'nın bu

çalışmasından faydalanan Farouki ve Sakkalis ise Pisagor-Hodograf (PH) eğrilerini tanımlamışlardır. Çalışmalarında Pisagor-Hodograf eğrilerin temel özellikleri belirlemiş ve düzlemsel Pisagor-Hodograf eğriler için karakterizasyonlar vermişlerdir. Ayrıca PH eğriler ile helis eğriler arasındaki bağlantılar incelenmiştir (Farouki, Sakkalis, 1990). Sonrasında Farouki, uzunluğu tam olarak hesaplanabilen düzlemsel Pisagor-Hodograf eğrilerinin tasarım ve yaklaşım geometrisi için kullanımını göstermiştir (Farouki, 1992).

Dietz vd. (Dietz R. vd., 1993) polinomlar için üç boyutlu uzayda kısmi Pisagor koşulunu vermesiyle, Farouki ve Sakkalis tarafından uzaysal Pisagor-Hodograf eğri karakterizasyonu verilmiştir (Farouki, Sakkalis, 1994). En genel sonuçlar ve Pisagor-Hodograf eğrilerinin helis eğrileri ile olan ilişkisi Farouki tarafından 2008 yılında elde edilmiştir (Farouki, 2008).

Minkowski uzayı, Minkowski tarafından 1907 yılında tanımlanmıştır (Ratcliffe, 1994). Minkowski uzayının çıkış sebebi, Minkowski'nin rölativite teorisinin dört boyutlu uzayda en iyi şekilde anlaşılabilceğini fark etmesi üzerine olmuştur. Fiziksel olayların daha iyi açıklanabildiği bu uzayda zaman, dördüncü boyut olarak düşünülmüştür. Minkowski uzayında tanımlanan spacelike, timelike ve lightlike vektörler aynı düzlemde yer aldığından bu uzay, uzay-zaman olarak da bilinmektedir. Moon ise 1999 yılında Pisagor-Hodograf eğrilerini tanımlamak için Minkowski metriğini kullanmıştır. Böylelikle Minkowski Pisagor-Hodograf (MPH) eğrilerini elde ederek ifade etmiştir (Moon, 1999).

Çağla Ramis 2014 (Ramis, 2014) yılında Pisagor-Hodograf eğrileri ve uygulamalarını yüksek lisans tezinde araştırmıştır. Pisagor-Hodograf eğrilerinin Öklid uzayındaki özellikleri detaylı olarak incelenmiş, iki ve üç boyutlu uzaylarda detaylandırılarak bu uzaylarda Pisagor-Hodograf eğrileri üretilmiştir. Ayrıca Minkowski metriğine göre özellikleri incelenmiş, Minkowski Pisagor-Hodograf eğrilerini iki ve üç boyutlu uzaylardaki karakterizasyonları çeşitli metotlarla verilmiştir. Düzlemsel ve uzaysal Minkowski Pisagor-Hodograf eğrileri elde etme yöntemleri gösterilmiştir.

Izumiya ve Takeuchi, 3 boyutlu bir Öklid uzayında düzlemsel bir eğriden bir sarmal eğri elde etmek için bir yöntem vermişlerdir (Izumiya, Takeuchi, 2002). Camcı ve İlarslan 3-boyutlu Öklid uzayında düzlemsel polinom eğrilerinden PH-Helis eğrileri oluşturmak için yeni bir yöntem vermişlerdir (Cancı, İlarslan, 2019). Bu yöntem Mollaoğulları vd.

tarafından n-boyutlu Öklid Uzayında Pisagor-Hodograf eğrilerine genelleştirilmiştir (Mollaoğulları A. vd., 2021).

Bu çalışmada 3 boyutlu Minkowski uzayında Pisagor-Hodograf eğrileri elde etmek için genel bir karakterizasyon verilmiş olup, örnek ve şekil ile ifade edilerek gösterilmiştir. 3 boyutlu Minkowski uzayında PH-Eğri elde etmek için üçüncü bölümde elde edilen karakterizasyondan faydalanarak, eğrinin bulunduğu düzlemin ve bu düzlemin normalinin casual karakteri olan spacelike, timelike ve null (lightlike) düzlem olma durumlarına göre PH-Helis eğrileri elde etme yöntemleri incelendi, örnek ve şekil ile ifade edilerek gösterildi.



İKİNCİ BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. Öklid 3-Uzayında Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 2.1.1. A boştan farklı bir küme, K bir cisim ve V , K üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f: A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu;

$$i) \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in A$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır

özelliklerini sağlıyorsa A kümesine V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.2. A bir afin uzay olsun. V vektör uzayı olmak üzere iç çarpım işlemi

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde **Öklid iç çarpımı** tanımlandığında A afin uzayına Öklid Uzayı denir ve \mathbb{E}^n ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.3. n boyutlu Öklid uzayı \mathbb{E}^n de

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overline{xy}\|$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna \mathbb{E}^n uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in \mathbb{E}^n$ noktaları arasındaki **uzaklık** denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.4. α , \mathbb{E}^n uzayında bir eğri ve $t \in I \subset \mathbb{R}$ olsun.

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$$
$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

olacak şekilde tanımlanan vektör, eğriye teğet olduğu $\alpha(t)$ noktasında **hız vektörü** olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.5. \mathbb{E}^3 reel vektör uzayı ve γ eğri olmak üzere, $\forall s \in \mathbb{R}$ için $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ şartı sağlanıyorsa γ eğrisine **birim hızlı eğri** denir ve s parametresi de **yay parametresi** olarak adlandırılır (Struik, 1988).

Tanım 2.1.6. V vektör uzayı ile birleşen bir A afin uzayı olmak üzere; $p \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için (p, \vec{v}) sıralı ikilisine **tanjant vektörü** denir. A afin uzayının p noktasındaki tanjant vektörlerin cümlesi $T_A(P)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.7. \mathbb{E}^n uzayında α eğrisi birim hızlı bir eğri olsun. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ olmak üzere

$$T(s) = \alpha'(s)$$

ile $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.1.8. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, \mathbb{E}^3 reel vektör uzayında bir eğri olsun. Bu durumda,

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \dot{\gamma}(t) = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \frac{d\gamma_3}{dt} \right)$$

şeklinde tanımlı ifadeye γ eğrisinin **teğet tanjant vektörü** denir. T ile gösterilir (Struik, 1988).

Tanım 2.1.9. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı olmak koşuluyla aşağıdaki biçimde tarif edilen fonksiyona **eğrilik fonksiyonu** denir:

$$\begin{aligned}\kappa: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \kappa(s) = \|T'(s)\| \\ &= \|\alpha''(s)\|\end{aligned}$$

$\kappa(s)$ ye $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.1.10. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere;

$$\begin{aligned}N(s) &= \frac{1}{\kappa(s)}T'(s) \\ &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $N(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birinci dik vektörü veya aslinormali** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.1.11. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $B(s) = T(s) \times N(s)$ ile tanımlanan $B(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **ikinci dik vektörü** denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.1.12. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında olacak şekilde Tanım 2.1.5., Tanım 2.1.7. ve Tanım 2.1.8 de belirtilen T, N ve B vektörleri **Frenet vektörleri veya Frenet 3-ayaklısı** olarak adlandırılır. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki T, N ve B vektörlerinden oluşturulan $\{T, N, B\}$ kümesi ise **Frenet çatısı** olarak isimlendirilir. α eğrisinin üstünde yer alan T, N ve B olarak adlandırılan vektör alanlarına da Frenet vektör alanları denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.1.13. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri ve T, N ve B Frenet vektör alanları olsun.

$$\begin{aligned}\tau: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \tau = \langle B', N \rangle\end{aligned}$$

ile tanımlanan τ fonksiyonuna α eğrisinin **burulma fonksiyonu** denir. (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.1.14. V bir reel vektör uzayı ve üzerinde $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı dönüşüm, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için,

- i. $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
 $\langle \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ (bilineer),
- ii. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (simetrik),
- iii. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ koşulu $\forall \vec{v} \in V$ için $\vec{u} = 0$ olmak zorunda (nondejenere),

özelliklerini sağladığı takdirde, g ye V üzerinde **skalar çarpım** denir. Ayrıca V vektör uzayı ise **skalar çarpım uzayı** olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.15. V bir skalar çarpım uzayı, W da üzerinde skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu alt uzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g **skalar çarpımının indeksi** denir. g skalar çarpımının indeksi k ise $0 \leq k \leq \text{boy}V$ dir. Ayrıca skalar çarpımının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.16. $\mathbb{E}^n, n -$ boyutlu standart vektör uzayı üzerinde bulunan $\forall p \in \mathbb{E}^n$ ve $\forall u_p, v_p \in T_p \mathbb{E}^n$ için

$$\langle u_p, v_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-m} u_i v_i - \sum_{i=n-m+1}^n u_i v_i$$

eşitliğiyle verilen m indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya **yarı Öklidiyen uzay** denir ve \mathbb{E}_k^n ile gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, u_i ve v_i , sırasıyla u_p ve v_p tanjant vektörlerin bileşenleridir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.17. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $0 \leq i \leq n, a_i \in \mathbb{R}$ olacak biçimde

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \quad a_n \neq 0$$

tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu, k . dereceden bir **polinom** olarak adlandırılır (Larson 2012).

Tanım 2.1.18. $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ eğrisinin $1 \leq i \leq n$ için $\gamma_i(t)$ ifadeleri birer polinom olma şartını sağlıyorsa $\gamma(t)$ eğrsine **n – boyutlu polinom eğrisi** denir (Larson 2012).

Tanım 2.1.19. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$, n – boyutlu polinom eğrisi olmak üzere türevi olan $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$ vektör alanına **hodografı** denir (Farouki ve Sakkalis 1990).

Tanım 2.1.20. \mathbb{E}^n te bir polinom eğrisi $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ olsun. Hodografı olan $\gamma'(t)$ eğer aşağıdaki eşitliği sağlayacak şekilde $\sigma(t)$ polinomu bulunuyorsa, bu eğri **Pisagor-Hodograf Eğri** olarak adlandırılır;

$$\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2 + \dots + \gamma'_n(t)^2 = \sigma^2$$

ve **PH-Eğri** olarak gösterilir (Farouki, Sakkalis, 1994).

Tanım 2.1.21. \mathbb{E}^3 te γ eğrisinin teğet vektörü, eğer $\vec{u} \neq (0,0,0)$ biçimindeki bir sabit vektör ile her noktasında sabit açı yapıyorsa, γ eğrisi helistir (Struik 1988).

Teorem 2.1.1 \mathbb{E}^3 te $\gamma(t)$ eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olmasıdır (Lancret 1806).

Tanım 2.1.22. Öklid uzayında bir uzay eğrisinin torsiyonu daima sıfır oluyorsa, eğri düzlemseldir. Bir $\gamma(t)$ eğrisi için

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \left(\cot\theta \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du \right) a + c$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\gamma}(t)$ bir uzay eğrisi olur. θ sabit bir sayı ve a, c sabit vektörlerdir öyle ki; $\langle \gamma', a \rangle = 0$ ve $\|a\| = 1$ dir (Izumiya, Takeuchi, 2002).

Teorem 2.1.2. \mathbb{E}^3 de düzlemsel bir eğri $\gamma(t)$ olsun. Bu takdirde

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \left(\cot\theta \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du \right) a + c$$

şeklinde tanımlı $\tilde{\gamma}(t)$ eğrisi bir silindirik helistir. Üstelik tüm helisler bu methodla elde edebilir (Izumiya, Takeuchi, 2002).

2.2. Minkowski 3-Uzayında Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 2.2.1. \mathbb{E}_k^n yarı Öklidiyen uzayında $k = 1$ ve $n \geq 2$ olacak biçimde elde edilen yarı Öklidiyen uzaya **n – boyutlu Minkowski uzayı** (\mathbb{E}_1^n) denir (O’Neill, 1983).

Tanım 2.2.2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}^3$ için **Lorentz iç çarpımı** aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

olmak üzere;

$$g_1: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ için,}$$

$$\begin{aligned} g_1(\vec{u}, \vec{v}) &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3 \end{aligned}$$

biçiminde ya da $g_2: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} g_2(\vec{u}, \vec{v}) &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L \\ &= -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan g_1 ve g_2 fonksiyonları ile birlikte \mathbb{E}^3 uzayına **Minkowski uzayı** denir ve \mathbb{E}_1^3 ile gösterilir (O'Neill, 1983). Bu çalışmamızda g_1 Lorentz iç çarpımını kullanılacak olup g ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.3. $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{E}_1^3$ vektörleri için,

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

ile tanımlanan vektörel çarpıma **Lorentz anlamında vektörel çarpım** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4. $\forall v \in \mathbb{E}_1^n$ için eğer,

- i) $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise v ye spacelike vektör,
- ii) $\langle v, v \rangle < 0$ ise v ye timelike vektör,
- iii) $\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye lightlike (null) vektör

denir (Lopez, 2014).

Tanım 2.2.5. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uzayında bir eğri ve $T(s)$ de hız vektörü olmak üzere,

- i) $g(T(s), T(s)) < 0$ ise $\alpha(s)$ eğrisine timelike eğri,
- ii) $g(T(s), T(s)) > 0$ ise $\alpha(s)$ eğrisine spacelike eğri,
- iii) $g(T(s), T(s)) = 0, T(s) \neq 0$ ise $\alpha(s)$ eğrisine lightlike (null) eğri

şeklinde adlandırılır (Lopez, 2014).

Teorem 2.2.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisinin timelike bir eğri ise

$$T' = \kappa N$$

$$N' = \kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

şeklinde Frenet formülleri ile verilir. κ , α eğrisinin eğriliği ve τ , α eğrisinin burulmasını ifade eder. Ayrıca

$$\kappa = \|T'\|$$

ve

$$\tau = \langle N', B \rangle_L$$

olarak tanımlanır (Lopez, 2014).

Teorem 2.2.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisinin spacelike bir eğri olsun. Bu durumda Frenet formülleri için üç farklı seçenek oluşur.

i) T' vektörü spacelike vektör olursa

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = \tau N$$

Frenet formülleri yukarıdaki şekildedir. α eğrisinin eğriliği

$$\kappa = \|T'\|$$

ve burulması

$$\tau = -\langle N', B \rangle_L$$

biçiminde tanımlanır.

ii) T' vektörü timelike vektör olursa

$$T' = \kappa N$$

$$N' = \kappa T + \tau B$$

$$B' = \tau N$$

Frenet formülleri yukarıdaki şekildedir. α eğrisinin eğriliği

$$\kappa = \|T'\|$$

ve burulması

$$\tau = \langle N', B \rangle_L$$

şeklinde tanımlanır.

iii) T' vektörü null (lightlike) vektör olması durumunda, asli normal vektörü

T ile lineer bağımsızdır ve $N = T'$ ile tanımlanır. B lightlike vektörü, $\langle N, B \rangle = 1$ ve T vektörüne dik olacak şekilde teklikle belirlenir. Bu vektöre α eğrisinin s noktasındaki binormal vektörü denir.

$$T' = N$$

$$N' = \tau N$$

$$B' = -T - \tau B$$

Frenet formülleri yukarıdaki şekildedir. τ ifadesi α eğrisinin burulmasını göstermektedir. α eğrisinin eğriliği ise tanımsızdır (Lopez, 2014).

Teorem 2.2.3. : $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisinin null (lightlike) bir eğri olması durumunda Frenet formülleri,

$$T' = N$$

$$N' = \tau T - B$$

$$B' = -\tau N$$

biçimindedir. κ ve τ sırasıyla, eğriliği ve burulmayı göstermektedir (Lopez, 2014).

Tanım 2.2.6. \mathbb{E}_1^n de $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ eğrisinin Hodografi olan $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$ eğer aşağıdaki eşitliği sağlayacak biçimde $\sigma(t)$ polinomu varsa bu eğri **Minkowski Pisagor-Hodograf Eğri** olarak adlandırılır.

$$(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 + \dots + (\gamma'_{n-1})^2 - (\gamma'_n)^2 = \sigma^2(t)$$

Kısaca **MPH-Eğri** olarak gösterilir. (Moon, 1999).

Tanım 2.2.7. Minkowski uzayında normal vektörü timelike olan düzleme spacelike düzlem denir. Bir spacelike düzlemde sadece spacelike vektörler bulunur (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.2.8. Minkowski uzayında, en az bir timelike vektör bulunduran düzlemlere timelike düzlem denir. Bir timelike düzlemin normal vektörü spacelike vektördür ve düzlemde spacelike, timelike ve null (lightlike) vektörler bulunur (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.2.9. Null düzlemler, Minkowski uzayında spacelike ve timelike düzlemler dışında kalan düzlemlerdir. Null düzlemlerde bir tane null vektör bulunup bu vektör düzlemin normal vektörüdür ve aynı zamanda düzlemde yatar. Null düzlemlerde spacelike vektörler de bulunur (Ratcliffe, 1994).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

MINKOWSKI 3-UZAYINDA PH EĞRİLER

Bu bölümde Minkowski uzayında PH-Eğri elde etmek için bir karakterizasyon verilmiş ve örneklendirilmiştir.

Teorem 3.1. E_1^3 de $H^2(a_1, a_2, -a_3) = \{(p_1, p_2, p_3) \in E_1^3 : a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 = 0\}$ düzlemi olsun. Bu düzlemde yatan $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ eğrisinin PH-Eğri olması için aşağıdaki eşitlikler $a_3^2 - a_1^2 - a_2^2 \neq 0$ koşulunu sağlayan $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $u(t)$ ve $v(t)$ polinomları için sağlanmalıdır:

$$\gamma_1'(t) = \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) (u^2(t) - v^2(t)) - \frac{a_1 a_3}{a_2^2} \lambda u(t)v(t) \quad (1)$$

$$\gamma_2'(t) = -\frac{a_1}{a_2} \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) (u^2(t) - v^2(t)) - \frac{a_3}{a_2} \lambda u(t)v(t) \quad (2)$$

$$\gamma_3'(t) = \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) \lambda u(t)v(t) \quad (3)$$

$$\sigma(t) = \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} p(u^2(t) + v^2(t)) \quad (4)$$

Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lambda = \frac{2\left(1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right)}{\sqrt{\left|\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - 1\right|}}$$

dir.

İspat 3-boyutlu Minkowski uzayında $a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 = 0$ düzlemi ve bu düzlemde yatan $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ eğrisi verilsin. E_1^3 de metriği (5) numaralı eşitlikteki gibi alalım.

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \quad (5)$$

γ eğrisi verilen düzlemde yattığından,

$$a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 + a_4 = 0 \quad (6)$$

dir. (6) numaralı denklemin türevi alınırsa,

$$a_1\gamma'_1 + a_2\gamma'_2 + a_3\gamma'_3 = 0 \quad (7)$$

eşitliği elde edilir. γ eğrisinin uzaysal PH-Eğri olması için,

$$(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 - (\gamma'_3)^2 = \sigma^2 \quad (8)$$

koşulu sağlanmalıdır. (7) numaralı eşitlik γ'_3 ile bölünürse,

$$a_1 \frac{\gamma'_1}{\gamma'_3} + a_2 \frac{\gamma'_2}{\gamma'_3} + a_3 = 0 \quad (9)$$

olur ve (8) numaralı eşitlik $(\gamma'_3)^2$ ile bölünürse

$$\left(\frac{\gamma'_1}{\gamma'_3}\right)^2 + \left(\frac{\gamma'_2}{\gamma'_3}\right)^2 - 1 = \left(\frac{\sigma}{\gamma'_3}\right)^2 \quad (10)$$

dir. (9) ve (10) numaralı eşitliklerde,

$$\frac{\gamma'_1}{\gamma'_3} = x_1$$

$$\frac{\gamma'_2}{\gamma'_3} = x_2$$

$$\frac{\sigma}{\gamma'_3} = w$$

değişken değiştirmeleri yapıldığında,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0 \quad (11)$$

ve

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 - 1 = w^2 \quad (12)$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca (11) nolu eşitlikten

$$x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 - \frac{a_3}{a_2} \quad (13)$$

yazılır. (13) numaralı eşitlikte

$$b_1 = -\frac{a_1}{a_2}$$

ve

$$b_2 = -\frac{a_3}{a_2}$$

yazılarak, eşitlik düzenlendiğinde,

$$x_2 = b_1x_1 + b_2 \quad (14)$$

eşitliği elde edilir. (14) numaralı eşitlikte elde ettiğimizi (12) numaralı eşitlikte yerine yazdığımızda,

$$(1 + b_1^2)x_1^2 + 2b_1b_2x_1 + b_2^2 - 1 = w^2$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında,

$$x_1^2 + \frac{2b_1b_2x_1}{1+b_1^2} + \frac{b_2^2-1}{1+b_1^2} = \frac{w^2}{1+b_1^2} \quad (15)$$

elde edilir. (15) numaralı eşitliğin Pisagor denklemine dönüştürülmesi için aşağıdaki işlemler gerçekleştirilir.

$$\begin{aligned} x_1^2 + \frac{2b_1b_2x_1}{1+b_1^2} + \left(\frac{b_1b_2}{1+b_1^2}\right)^2 - \left(\frac{b_1b_2}{1+b_1^2}\right)^2 + \frac{b_2^2-1}{1+b_1^2} &= \frac{w^2}{1+b_1^2} \\ \left(x_1 + \frac{b_1b_2}{1+b_1^2}\right)^2 + \left(\frac{-b_1^2b_2^2 + b_1^2b_2^2 - b_1^2 + b_2^2 - 1}{1+b_1^2}\right) &= \frac{w^2}{1+b_1^2} \\ \left(x_1 + \frac{b_1b_2}{1+b_1^2}\right)^2 + \frac{(b_2^2 - b_1^2 - 1)}{(1+b_1^2)^2} &= \frac{w^2}{1+b_1^2} \end{aligned} \quad (16)$$

(16) numaralı eşitlikte u, v, p, q aralarında asal ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x_1 + \frac{b_1b_2}{1+b_1^2} = \frac{p}{q}(u^2 - v^2), \quad (17)$$

$$\frac{\sqrt{|b_2^2 - b_1^2 - 1|}}{(1+b_1^2)} = \frac{2p}{q}(uv), \quad (18)$$

$$\frac{w}{\sqrt{1+b_1^2}} = \frac{p}{q}(u^2 + v^2), \quad (19)$$

$$\lambda = \frac{2(1+b_1^2)}{\sqrt{|b_2^2 - b_1^2 - 1|}}, \quad (20)$$

$$q = \lambda uv p, \quad (21)$$

ifadeleri elde edilir. (17) numaralı eşitlikte (21) numaralı eşitlik yerine yazıldığında

$$x_1 = \frac{p(u^2 - v^2)}{\lambda uv p} - \frac{b_1 b_2}{1 + b_1^2}$$

elde edilir. $x_1 = \frac{\gamma'_1}{\gamma'_3}$ yerine yazıldığında ve gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} \frac{\gamma'_1}{\gamma'_3} &= \frac{p(u^2 - v^2)}{\lambda uv p} - \frac{b_1 b_2}{1 + b_1^2} \\ &= \frac{u^2 - v^2}{\lambda uv} - \frac{b_1 b_2}{1 + b_1^2} \\ &= \frac{(1 + b_1^2)(u^2 - v^2) - b_1 b_2 \lambda uv}{(1 + b_1^2) \lambda uv} \end{aligned} \quad (22)$$

eşitliği bulunur. (14) numaralı eşitlikte $x_2 = \frac{\gamma'_2}{\gamma'_3}$ ifadesi yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma'_2}{\gamma'_3} &= b_1 \left(\frac{p(u^2 - v^2)}{\lambda uv p} - \frac{b_1 b_2}{1 + b_1^2} \right) + b_2 \\ &= \frac{b_1(u^2 - v^2)}{\lambda uv} - \frac{b_1^2 b_2}{1 + b_1^2} + b_2 \\ &= \frac{b_1(u^2 - v^2)(1 + b_1^2) - b_1^2 b_2 \lambda uv + b_2(1 + b_1^2) \lambda uv}{\lambda uv(1 + b_1^2)} \\ &= \frac{b_1(u^2 - v^2)(1 + b_1^2) + b_2 \lambda uv}{\lambda uv(1 + b_1^2)} \end{aligned} \quad (23)$$

bulunur. Benzer şekilde $w = \frac{\sigma}{\gamma'_3}$ ifadesi (19) numaralı eşitlikte yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
w &= \frac{\sqrt{1 + b_1^2} p(u^2 + v^2)}{q} \\
\frac{\sigma}{\gamma_3'} &= \frac{\sqrt{1 + b_1^2} p(u^2 + v^2)}{\lambda uv p} \\
&= \frac{(1 + b_1^2)^{\frac{3}{2}} (u^2 + v^2)}{(1 + b_1^2) \lambda uv} \tag{24}
\end{aligned}$$

elde edilir. (22), (23) ve (24) numaralı eşitliklerde gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
\gamma_1' &= (1 + b_1^2)(u^2 - v^2) - b_1 b_2 \lambda uv \\
&= \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)(u^2 - v^2) - \frac{a_1 a_3}{a_2^2} \lambda uv \tag{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2' &= b_1(1 + b_1^2)(u^2 - v^2) + b_2 \lambda uv \\
&= -\frac{a_1}{a_2} \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)(u^2 - v^2) - \frac{a_3}{a_2} \lambda uv \tag{26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3' &= (1 + b_1^2) \lambda uv \\
&= \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) \lambda uv \tag{27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma &= (1 + b_1^2)^{\frac{3}{2}} (u^2 + v^2) \\
&= \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} (u^2 + v^2) \tag{28}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Ayrıca $(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 - (\gamma'_3)^2 = \sigma^2$ eşitliği için,

$$\begin{aligned}
(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 - (\gamma'_3)^2 &= \left[(1 + b_1^2)(u^2 - v^2) - b_1 b_2 \lambda u v \right]^2 \\
&\quad + [b_1(1 + b_1^2)(u^2 - v^2) + b_2 \lambda u v]^2 - [(1 + b_1^2)\lambda u v]^2 \\
&= (1 + b_1^2)^2(u^2 - v^2)^2 - 2(1 + b_1^2)b_1 b_2 \lambda u v(u^2 - v^2) \\
&\quad + b_1^2 b_2^2 \lambda^2 u^2 v^2 + (1 + b_1^2)^2 b_1^2 (u^2 - v^2)^2 \\
&\quad + 2(1 + b_1^2)b_1 b_2 \lambda u v(u^2 - v^2) + b_2^2 \lambda^2 u^2 v^2 + b_1^2 b_2^2 \lambda^2 u^2 v^2 \\
&\quad - (1 + b_1^2)^2 \lambda^2 u^2 v^2 \\
&= (1 + b_1^2)^2(u^2 - v^2)^2(1 + b_1^2) + \lambda^2 u^2 v^2 [b_1^2 b_2^2 + b_2^2 - (1 + b_1^2)^2] \\
&= (1 + b_1^2)^3(u^2 - v^2)^2 + \lambda^2 u^2 v^2 (1 + b_1^2) [b_2^2 - (1 + b_1^2)] \\
&= (1 + b_1^2)^3(u^2 - v^2)^2 + \frac{4(1 + b_1^2)^2 u^2 v^2 (1 + b_1^2)(b_2^2 - 1 - b_1^2)}{(b_2^2 - 1 - b_1^2)} \\
&= (1 + b_1^2)^3(u^2 - v^2)^2 + 4(1 + b_1^2)^3 u^2 v^2 \\
&= (1 + b_1^2)^3(u^4 - 2u^2 v^2 + v^4 + 4u^2 v^2) \\
&= (1 + b_1^2)^3(u^4 + 2u^2 v^2 + v^4) \\
&= (1 + b_1^2)^3(u^2 + v^2)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \left[(1 + b_1^2)^{\frac{3}{2}} (u^2 + v^2) \right]^2 \\
&= (1 + b_1^2)^3 (u^2 + v^2)^2
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.1.: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $u = 1 + t^2$ ve $v = 1 - t$

keyfi değerlerini alalım. Bu durumda

$$\lambda = \frac{2 \left(1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right)}{\sqrt{\left|\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - 1\right|}}$$

$$\lambda = 5$$

elde edilir. (25) numaralı eşitlikten,

$$\begin{aligned}\gamma'_1 &= \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)(u^2 - v^2) - \frac{a_1 a_3}{a_2^2} \lambda u v \\ &= 5t^4 + 30t^3 - 25t^2 + 40t - 30\end{aligned}$$

(26) numaralı eşitlikten,

$$\begin{aligned}\gamma'_2 &= -\frac{a_1}{a_2} \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)(u^2 - v^2) - \frac{a_3}{a_2} \lambda u v \\ &= -10t^4 + 15t^3 - 25t^2 - 5t - 15\end{aligned}$$

(27) numaralı eşitlikten,

$$\begin{aligned}\gamma'_3 &= \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) \lambda u v \\ &= -25t^3 + 25t^2 - 25t + 25\end{aligned}$$

elde edilir. $\gamma(t)$ eğrisinin PH olması için gerekli olan,

$$(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 - (\gamma'_3)^2 = \sigma^2 \quad (29)$$

(29) numaralı eşitliği düzenlersek,

$$(5t^4 + 30t^3 - 25t^2 + 40t - 30)^2 + (-10t^4 + 15t^3 - 25t^2 - 5t - 15)^2 - (25t^3 + 25t^2 - 25t + 25)^2 = \sigma^2(t) \quad (30)$$

elde edilir. Buradan gerekli işlemler yapıldığında

$$\sigma^2(t) = \left(5\sqrt{5}(t^4 + 3t^2 - 2t + 2)\right)^2 \quad (31)$$

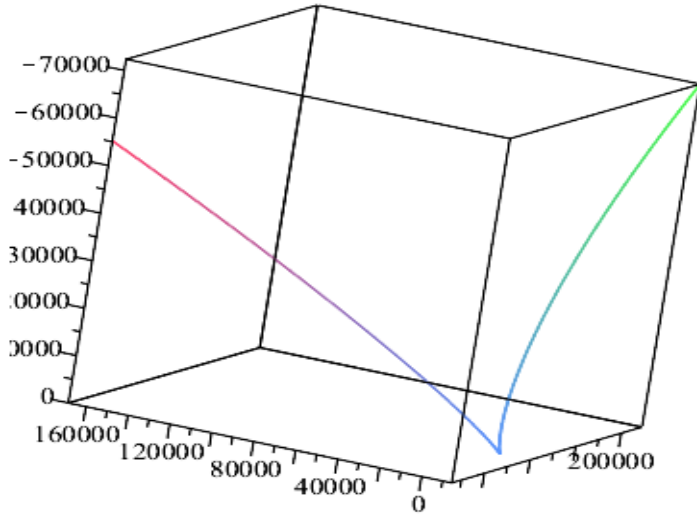
bulunur. Diğer yandan (28) numaralı eşitlikte verilen değerleri yerlerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} (u^2 + v^2) \\ \sigma(t) &= 5\sqrt{5}(t^4 + 3t^2 - 2t + 2) \\ \sigma^2(t) &= \left(5\sqrt{5}(t^4 + 3t^2 - 2t + 2)\right)^2 \end{aligned} \quad (32)$$

elde edilir. (31) ve (32) numaralı eşitliklerden de görüleceği üzere

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \left(t^5 + \frac{15}{2}t^4 - \frac{25}{3}t^3 + 20t^2 - 30t, -2t^5 + \frac{15}{4}t^4 - \frac{25}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 15t, -\frac{25}{4}t^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{25}{3}t^3 - \frac{25}{2}t^2 + 25t\right) \end{aligned} \quad (33)$$

eğrisi MPH-Eğri olur.



Şekil.1 Minkowski Uzayında PH-Eğri Örneği

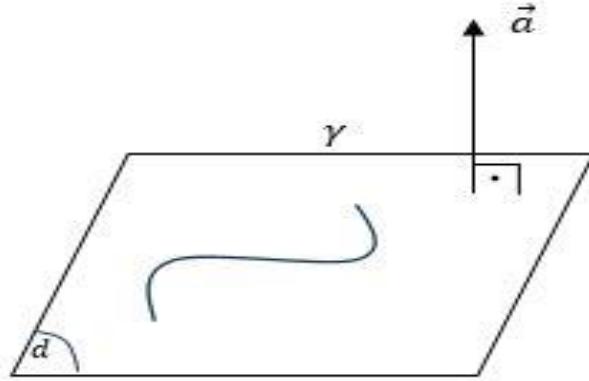
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

MINKOWSKI 3-UZAYINDA PH-HELİS EĞRİ

Bu bölümde 2021 yılında Mollaoğulları vd. tarafından yapılan E^{n+1} Öklid uzayında PH-Helis eğrileri elde etmek için verilen yöntemden yola çıkarak, E_1^3 Minkowski uzayında PH-Helis eğrileri ile Minkowski Uzayında ele alınan eğriler; spacelike, timelike ve null (lightlike) düzlemde yatabileceğinden üç bölümde ayrı ayrı casual karakterine göre incelenmiştir.

4.1. Normal Vektörü Timelike Olan Spacelike Düzlem

Normali timelike \vec{a} vektörü olan d spacelike düzleminde yatan γ spacelike eğri olsun.



Şekil.2 Normal Vektörü Timelike Olan Spacelike Düzlemde Bulunan Eğri

Teorem 4.1.1. E_1^3 Minkowski uzayındaki γ spacelike eğrisi MPH olsun. θ sabit bir sayı \vec{a}, \vec{c} sabit vektörler öyle ki; $\langle \gamma', \vec{a} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = -1$ olmak üzere,

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \left(\tanh\theta \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du \right) \vec{a} + \vec{c} \quad (34)$$

(34) numaralı eşitlik ile ifade edilen $\tilde{\gamma}$ eğrisi helis olur. Üstelik $\tilde{\gamma}$ eğrisi, MPH-Helis eğrisidir.

İspat İlk iddianın ispatı için $\gamma(t)$ eğrisini birim hızlı bir eğri olarak alabiliriz. $\tilde{\gamma}$ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri,

$$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(t) + \tanh\theta \|\gamma'(t)\| \vec{a} \quad (35)$$

$$\tilde{\gamma}''(t) = \kappa_p(t) N(t) \quad (36)$$

$$\tilde{\gamma}^{(3)}(t) = \kappa_p'(t) N(t) + (\kappa_p(t))^2 T(t) \quad (37)$$

olur. $\kappa(t)$ yi bulmak için (35) ve (36) numaralı eşitlikleri kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'(t) \times \tilde{\gamma}''(t) &= (T(t) + \tanh\theta \vec{a}) \times (\kappa_p(t) N(t)) \\ &= \kappa_p(t) (T(t) \times N(t)) + \kappa_p(t) (\tanh\theta (\vec{a} \times N(t))) \\ &= \kappa_p(t) (-B(t) + \tanh\theta T(t)) \end{aligned} \quad (38)$$

ve

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}'(t) \times \tilde{\gamma}''(t)\| &= \sqrt{|g(\kappa_p(t)(-B(t) + \tanh\theta T(t)), \kappa_p(t)(-B(t) + \tanh\theta T(t)))|} \\ &= \sqrt{|(\kappa_p(t))^2 (1 + \tanh^2\theta)|} \\ &= |\kappa_p(t)| \sqrt{|1 + \tanh^2\theta|} \end{aligned} \quad (39)$$

elde edilir. Ayrıca (35) numaralı eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}'(t)\| &= \sqrt{|g(T(t) + \tanh\theta \vec{a}, T(t) + \tanh\theta \vec{a})|} \\ &= \sqrt{|1 - \tanh^2\theta|} \\ &= \operatorname{sech}\theta \end{aligned} \quad (40)$$

bulunur. (39) ve (40) numaralı eşitliklerden

$$\kappa(t) = \frac{\|\tilde{\gamma}'(t) \times \tilde{\gamma}''(t)\|}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\kappa_p(t)|\sqrt{|(1 + \tanh^2\theta)|}}{(\operatorname{sech}\theta)^3} \quad (41)$$

elde edilir. Torsiyonu hesaplamak için (37) ve (38) numaralı eşitliklerden faydalanarak,

$$g\left(\tilde{\gamma}'(t) \times \tilde{\gamma}''(t), \tilde{\gamma}^{(3)}(t)\right) = g\left(\kappa_p(t)(-B(t) + \tanh\theta T(t)), \kappa_p'(t)N(t) + (\kappa_p(t))^2 T(t)\right)$$

$$= (\kappa_p(t))^3 \tanh\theta \quad (42)$$

eşitliği bulunur. (39) ve (42) numaralı eşitliklerden

$$\tau(t) = \frac{g\left(\tilde{\gamma}'(t) \times \tilde{\gamma}''(t), \tilde{\gamma}^{(3)}(t)\right)}{\|\tilde{\gamma}'(t) \times \tilde{\gamma}''(t)\|^2}$$

$$= \frac{(\kappa_p(t))^3 \tanh\theta}{\left(|\kappa_p(t)|\sqrt{|(1 + \tanh^2\theta)|}\right)^2}$$

$$= \frac{(\kappa_p(t)) \tanh\theta}{(1 + \tanh^2\theta)} \quad (43)$$

elde edilir. (41) ve (43) numaralı eşitliklerden

$$\begin{aligned}\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} &= \frac{\frac{(\kappa_p(t)) \tanh\theta}{(1 + \tanh^2\theta)}}{\frac{|\kappa_p(t)|\sqrt{|(1 + \tanh^2\theta)|}}{(\operatorname{sech}\theta)^3}} \\ &= \frac{(\operatorname{sech}\theta)^3 \tanh\theta}{(1 + \tanh^2\theta)^{3/2}}\end{aligned}\quad (44)$$

eşitlik elde edilir. Dolayısıyla θ sabit olduğundan $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)}$ eşitliği de sabit olur. Bu ise $\tilde{\gamma}$ eğrisinin helis olduğunu gösterir.

Şimdi ispatın ikinci kısmında $\tilde{\gamma}(t)$ helis eğrisinin MPH olduğunu gösterelim. Keyfi hızlı bir $\gamma(t)$ eğrisi için, $\tilde{\gamma}(t)$ eğrisinin birinci mertebeden türevi

$$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(t) + \tanh\theta \|\gamma'(t)\| \vec{a} \quad (45)$$

olduğundan, (45) numaralı eşitliği kullanarak

$$\begin{aligned}g(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}'(t)) &= \langle \tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}'(t) \rangle \\ &= \langle \gamma'(t) + \tanh\theta \|\gamma'(t)\| \vec{a}, \gamma'(t) + \tanh\theta \|\gamma'(t)\| \vec{a} \rangle \\ &= \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + 2\tanh\theta \langle \gamma'(t), \vec{a} \rangle + (\tanh\theta)^2 (\|\gamma'(t)\|)^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \\ &= \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + 2\tanh\theta \langle \gamma'(t), \vec{a} \rangle - (\tanh\theta)^2 (\|\gamma'(t)\|)^2\end{aligned}\quad (46)$$

eşitlik elde edilir. Teorem 3.1 de yer alan (8) numaralı eşitlikten faydalanarak gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
g(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}'(t)) &= \sigma^2 - \sigma^2(\tanh\theta)^2 \\
&= \sigma^2(1 - \tanh^2\theta) \\
&= \sigma^2 \operatorname{sech}^2\theta
\end{aligned} \tag{47}$$

bulunur. (47) numaralı eşitlikte σ bir polinom ve θ sabit olduğundan $\tilde{\gamma}(t)$ helis eğrisi MPH-Eğri olma şartını sağlar. Dolayısıyla Minkowski uzayında tanımladığımız $\tilde{\gamma}(t)$ eğrisi PH-Helis eğridir.

Örnek 4.1.1. \mathbb{E}_1^3 de spacelike düzlemin normalini $\vec{a} = (a_1, a_2, -a_3)$ timelike vektör olsun. Ayrıca E_1^3 uzayında $a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4 = 0$ düzlemi ve bu düzlemde yatan $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ eğrisi, $\vec{a} = (2, 2, 3)$ vektörü verilsin.

E_1^3 de metriği,

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$$

şeklinde alınsın. λ sabiti,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2 \left(1 + \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \right)}{\sqrt{\left| \left(\frac{a_3}{a_2} \right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 - 1 \right|}} \\
&= 8
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\gamma_1' &= \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2} \right) (u^2 - v^2) - \frac{a_1 a_3}{a_2} \lambda uv \\
&= 2u^2 - 2v^2 - 12uv
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2' &= -\frac{a_1}{a_2} \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2} \right) (u^2 - v^2) - \frac{a_3}{a_2} \lambda uv \\
&= -2u^2 + 2v^2 - 12uv
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3' &= \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) \lambda uv \\
&= 16uv
\end{aligned} \tag{50}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sigma &= \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} (u^2 + v^2) \\
&= 2\sqrt{2}(u^2 + v^2)
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= 8(u^2 + v^2)^2 \\
&= 8(u^4 + v^4 + 2u^2v^2)
\end{aligned} \tag{52}$$

olur. Diğer yandan verilen γ eğrisinin MPH olması için

$$(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 - (\gamma_3')^2 = \sigma^2 \tag{53}$$

eşitliği sağlanmalıdır. (48), (49), (50) numaralı eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
(2u^2 - 2v^2 - 12uv)^2 + (-2u^2 + 2v^2 - 12uv)^2 - (16uv)^2 &= \sigma^2 \\
4u^4 + 4v^4 + 144u^2v^2 - 8u^2v^2 - 48u^3v^1 + 48u^1v^3 + 4u^4 + 4v^4 \\
+ 144u^2v^2 - 8u^2v^2 + 48u^3v^1 - 48u^1v^3 - 256u^2v^2 &= \sigma^2 \\
8u^4 + 8v^4 + 16u^2v^2 &= \sigma^2 \\
8(u^4 + v^4 + 2u^2v^2) &= \sigma^2 \\
8(u^2 + v^2)^2 &= \sigma^2
\end{aligned} \tag{54}$$

(54) numaralı eşitlik elde edilir. (52) ve (54) numaralı eşitliklerinden görüleceği üzere γ eğrisinin MPH olması için gerekli olan (53) numaralı eşitlik sağlanır.

$\vec{a} = (2,2,3)$ vektörü için $2p_1 + 2p_2 - 3p_3 + a_4 = 0$ düzlem denklemini ve $u = 1 - t$, $v = t$ alalım. (48) numaralı eşitlikten;

$$\begin{aligned}\gamma_1'(t) &= 2u^2(t) - 2v^2(t) + 12u(t)v(t) \\ &= -12t^2 + 8t + 2\end{aligned}\quad (55)$$

(55) numaralı eşitlik elde edilir. (55) numaralı eşitlikten $\gamma_1(t)$ yi hesaplamak için gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned}\int \gamma_1'(t) &= \int (-12t^2 + 8t + 2) dt \\ \gamma_1(t) &= -4t^3 + 4t^2 + 2t + c_1\end{aligned}\quad (56)$$

(56) numaralı eşitlik elde edilir. Aynı şekilde (49) numaralı eşitlikten;

$$\begin{aligned}\gamma_2'(t) &= -2u^2(t) + 2v^2(t) + 12u(t)v(t) \\ &= -12t^2 + 16t - 2\end{aligned}\quad (57)$$

(57) numaralı eşitlik elde edilir ve buradan $\gamma_2(t)$ yi hesaplamak için gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned}\int \gamma_2'(t) &= \int (-12t^2 + 16t - 2) dt \\ \gamma_2(t) &= -4t^3 + 8t^2 - 2t + c_2\end{aligned}\quad (58)$$

(58) numaralı eşitlik elde edilir. Aynı işlemi (50) numaralı eşitlik için de yaptığımızda,

$$\begin{aligned}\gamma_3'(t) &= 16u(t)v(t) \\ &= -16t^2 + 16t\end{aligned}\quad (59)$$

(59) numaralı eşitlik elde edilir ve buradan da $\gamma_3(t)$ yi hesaplamak için gerekli işlemler yapıldığında,

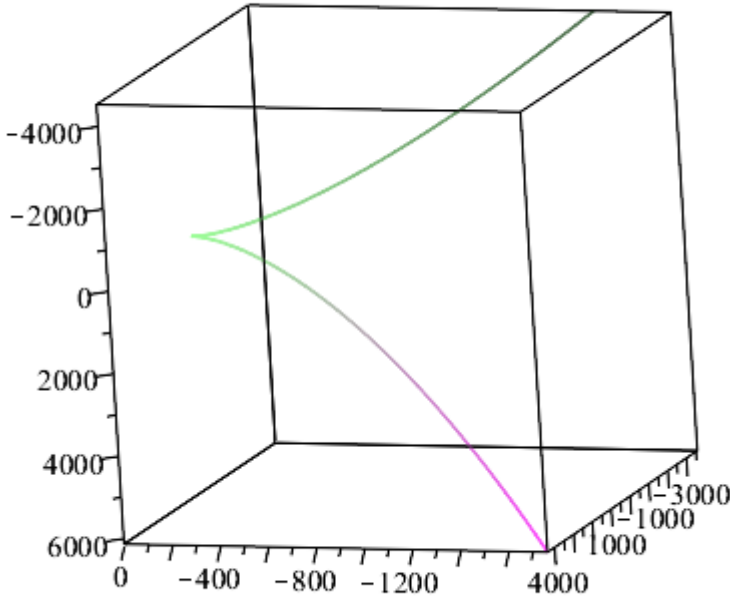
$$\int \gamma_3'(t) = \int (-16t^2 + 16t) dt$$

$$\gamma_3(t) = -\frac{16}{3}t^3 + 8t^2 + c_3 \quad (60)$$

(60) numaralı eşitlik elde edilir. (56) ,(58) ,(60) numaralı eşitliklerden

$$\gamma = \left(-4t^3 + 4t^2 + 2t + c_1, -4t^3 + 8t^2 - 2t + c_2, -\frac{16}{3}t^3 + 8t^2 + c_3 \right)$$

şeklinde γ eğrisi elde edilmiş olur.



Şekil 3. Minkowski Uzanyındaki PH-Eğri Örneği

γ eğrisi aldığımız düzlem üzerinde yattığından,

$$2(-4t^3 + 4t^2 + 2t + c_1) + 2(-4t^3 + 8t^2 - 2t + c_2) - 3\left(-\frac{16}{3}t^3 + 8t^2 + c_3\right) + a_4 = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$-8t^3 + 8t^2 + 4t + 2c_1 - 8t^3 + 16t^2 - 4t + 2c_2 + 16t^3 - 24t^2 - 3c_3 + a_4 = 0$$

$$2c_1 + 2c_2 - 3c_3 + a_4 = 0$$

elde edilir. $\tilde{\gamma}$ eğrisi için sırasıyla $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ ü hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_1 &= \int \left[\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) (u^2 - v^2) - \frac{a_1 a_3}{a_2^2} \lambda uv \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_1}{\sqrt{|a_1^2 + a_2^2 - a_3^2|}} \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)^3 \tanh\theta (u^2 + v^2) \right] dt \\ &= \int [-12t^2 + 8t + 2 + 2.8. \tanh\theta (2t^2 - 2t + 1)] dt \\ &= (32\tanh\theta - 12) \frac{t^3}{3} + (8 - 32\tanh\theta) \frac{t^2}{2} + (2 + 16\tanh\theta)t + c\end{aligned}$$

olur ve $\tanh\theta = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 10t \quad (61)$$

(61) numaralı eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_2 &= \int \left[-\frac{a_1}{a_2} \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) (u^2 - v^2) - \frac{a_3}{a_2} \lambda uv \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_2}{\sqrt{|a_1^2 + a_2^2 - a_3^2|}} \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)^3 \tanh\theta (u^2 + v^2) \right] dt \\ &= \int [-12t^2 + 16t - 2 + 2.8. \tanh\theta (2t^2 - 2t + 1)] dt \\ &= (32\tanh\theta - 12) \frac{t^3}{3} + (16 - 32\tanh\theta) \frac{t^2}{2} + (16\tanh\theta - 2)t + c\end{aligned}$$

olur ve $\tanh\theta = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$\tilde{\gamma}_2 = \frac{4}{3}t^3 + 6t \quad (62)$$

(62) numaralı eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_3 &= \int \left[\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) \lambda uv + \frac{a_3}{\sqrt{|a_1^2 + a_2^2 - a_3^2|}} \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)^3 \tanh\theta (u^2 + v^2) \right] dt \\
&= \int [-16t^2 + 16t + 2.2\sqrt{2} \cdot \tanh\theta (2t^2 - 2t + 1)] dt \\
&= (32\tanh\theta - 16) \frac{t^3}{3} + (16 - 32\tanh\theta) \frac{t^2}{2} + 16\tanh\theta t + c
\end{aligned}$$

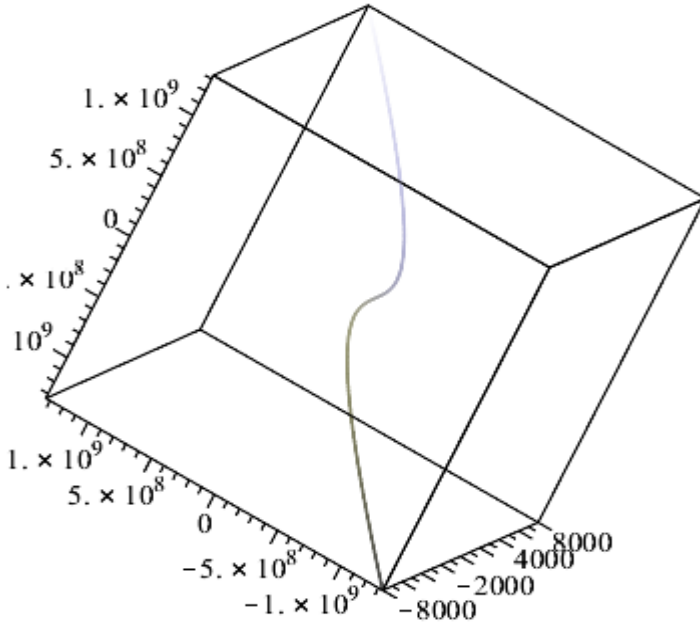
olur ve $\tanh\theta = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$\tilde{\gamma}_3 = 8t \quad (63)$$

elde edilir. (61), (62), (63) numaralı eşitliklerden

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(\frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 10t, \frac{4}{3}t^3 + 6t, 8t \right)$$

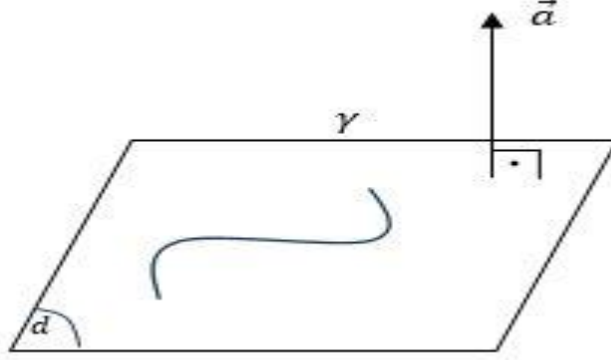
eğrisi elde edilir. $\tilde{\gamma}(t)$ eğrisi için gerekli işlemler yapıldığında $\frac{\tau}{\kappa} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ bulunur ve $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabit olur. Bu ise $\tilde{\gamma}$ eğrisinin bir helis olduğunu gösterir.



Şekil 4. Minkowski Uzayında PH-Helis Eğri Örneği

4.1.2. Null Düzlem

Normali null \vec{a} vektörü normal olan d null düzleminde yatan γ eğri olsun.



Şekil.5 Normal Vektörü Null Olan Null Düzlemde Bulunan Eğri

Teorem 4.1.2.1. \mathbb{E}_1^3 de normal vektörü null olan null düzlemde yatan bir eğriden Teorem 3.1. de verilen karakterizasyon ile PH-Helis eğrisi elde edilemez.

İspat \mathbb{E}_1^3 de \vec{a} null normal vektörüne sahip d null düzlemini inceleyelim.

\vec{a} normal vektörü null olduğu için,

$$\begin{aligned}\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle &= 0 \\ a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 &= 0 \\ a_1^2 + a_2^2 &= a_3^2\end{aligned}\tag{64}$$

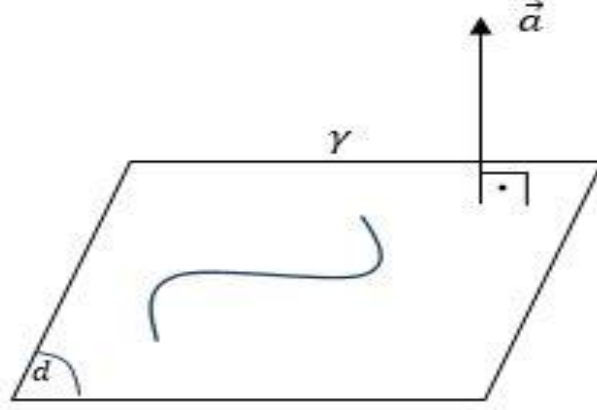
(64) numaralı eşitlik elde edilir. Diğer yandan PH-Eğri karakterizasyonu için (20) numaralı eşitlikten,

$$\lambda = \frac{2(a_2^2 + a_1^2)}{|a_2|\sqrt{|a_3^2 - a_1^2 - a_2^2|}}$$

olur. Buradan $a_3^2 - a_1^2 - a_2^2 \neq 0$ olmalıdır. Bu ise (64) numaralı eşitlikte elde edilen sonuçla çelişir.

4.1.3. Normal Vektörü Spacelike Olan Timelike Düzlemler

Normali spacelike \vec{a} vektörü olan d spacelike düzleminde yatan γ spacelike eğri olsun.



Şekil.6 Normal Vektörü Spacelike Olan Timelike Düzlemde Bulunan Eğri

Timelike düzlemde Tanım 4.2.2. de belirtildiği gibi spacelike, timelike ve null eğriler bulunabileceği için 3 farklı durum vardır.

1. Durum: Timelike düzlemde yatan timelike eğri

Teorem 4.1.3.1. : \mathbb{E}_1^n de timelike MPH eğrisi yoktur (Moon 1999).

İspat \mathbb{E}_1^3 de MPH $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ timelike eğrisini ele alalım. Eğer timelike $\gamma(t)$ eğrisi MPH ise

$$(\gamma_1')^2(t) + (\gamma_2')^2(t) - (\gamma_3')^2(t) = \sigma^2(t)$$

eşitliği sağlanacak şekilde $\sigma(t)$ polinomu vardır ve diğer yandan

$$\begin{aligned} g(\gamma'(t), \gamma'(t)) &= \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \\ &= (\gamma_1')^2(t) + (\gamma_2')^2(t) - (\gamma_3')^2(t) \\ &= \sigma^2(t) \end{aligned}$$

olur. Bu ise timelike olması ile çelişir.

Sonuç 4.1.3.1. \mathbb{E}_1^n de timelike MPH-Eğri olmadığı için \mathbb{E}_1^3 uzayında da timelike MPH-Eğri yoktur. \mathbb{E}_1^3 uzayında timelike MPH-Eğriden MPH-helis eğrisi üretilemez.

2. Durum: Timelike düzlemde yatan null eğri

Null eğriler Tanım 2.2.5. te belirtildiği üzere $T(s) \neq 0$ iken $g(T(s), T(s)) = 0$ koşulunu sağlaması gerektiğinden teğet vektörünün normu sıfır olur. Buradan da birinci eğriliği yani,

$$\kappa(t) = \frac{\|\tilde{\gamma}'(t) \times \tilde{\gamma}''(t)\|}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|^3}$$

hesaplanamaz. Böylece Frenet Çatısına göre Teorem 3.1. de verilen karakterizasyon ile elde edilen eğri helis eğrisi olamaz. Sonuç olarak timelike düzlemde bulunan null eğriden Teorem 3.1. de verilen karakterizasyon ile PH-Helis eğri üretilemez.

3. Durum: Timelike düzlemde yatan spacelike eğri

Teorem 4.1.3.2. \mathbb{E}_1^3 Minkowski uzayındaki timelike düzlemde yatan γ spacelike eğrisinden Teorem 3.1. de verilen karakterizasyon ile PH-Helis eğri üretilemez.

İspat $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ spacelike eğrisi MPH-Eğri olduğundan Teorem 3.1 den (1), (2), (3) ve (4) numaralı eşitliklerini kullanılırsa;

$$\gamma_1'(t) = (1 + b_1^2)(u^2 - v^2) - b_1 b_2 \lambda u v$$

$$\gamma_2'(t) = -b_1(1 + b_1^2)(u^2 - v^2) - b_2 \lambda u v$$

$$\gamma_3'(t) = (1 + b_1^2) \lambda u v$$

$$\sigma(t) = (1 + b_1^2)^{\frac{3}{2}}(u^2 + v^2)$$

ve burada

$$\lambda = \frac{2(1 + b_1^2)}{\sqrt{|b_2^2 - b_1^2 - 1|}}$$

dir.

$$\begin{aligned}
(\gamma'_1)^2 &= (b_1^4 + 2b_1^2 + 1)(u^4 - 2u^2v^2 + v^4) + b_1^2b_2^2\lambda^2u^2v^2 \\
&= (b_1^4 + 2b_1^2 + 1)u^4 + (b_1^4 + 2b_1^2 + 1)v^4 + (-2 - 4b_1^2 - 2b_1^4 + b_1^2b_2^2\lambda^2)u^2v^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma'_2)^2 &= b_1^2(b_1^4 + 2b_1^2 + 1)(u^4 - 2u^2v^2 + v^4) + b_2^2\lambda^2u^2v^2 \\
&= (b_1^6 + 2b_1^4 + b_1^2)u^4 + (b_1^6 + 2b_1^4 + b_1^2)v^4 + (-2b_1^2 - 4b_1^4 - 2b_1^6 + b_2^2\lambda^2)u^2v^2
\end{aligned}$$

$$(\gamma'_3)^2 = (b_1^4 + 2b_1^2 + 1)\lambda^2u^2v^2$$

elde edilir. Buradan γ eğrisi MPH olduğundan

$$(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 - (\gamma'_3)^2 = \sigma^2$$

koşulu sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned}
(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 - (\gamma'_3)^2 &= (b_1^6 + 3b_1^4 + 3b_1^2 + 1)u^4 + (b_1^6 + 3b_1^4 + 3b_1^2 + 1)v^4 \\
&\quad + [-2 - 6b_1^2 - 6b_1^4 - 2b_1^6 + (1 + b_1^2)b_2^2\lambda^2 - (1 + b_1^2)^2\lambda^2]u^2v^2 \\
&= (b_1^6 + 3b_1^4 + 3b_1^2 + 1)u^4 + (b_1^6 + 3b_1^4 + 3b_1^2 + 1)v^4 \\
&\quad [-2(1 + b_1^2)^3 + (1 + b_1^2)b_2^2\lambda^2 - (1 + b_1^2)^2\lambda^2]u^2v^2 \\
&= (1 + b_1^2)^3u^4 + (1 + b_1^2)^3v^4 \\
&\quad + (1 + b_1^2)[-2(1 + b_1^2)^2 + b_2^2\lambda^2 - (1 + b_1^2)\lambda^2]u^2v^2 \\
&= (1 + b_1^2)^3u^4 + (1 + b_1^2)^3v^4 \\
&\quad + (1 + b_1^2)[-2 - 4b_1^2 - 4b_1^4 + b_2^2\lambda^2 - \lambda^2 - b_1^2\lambda^2]u^2v^2 \quad (65)
\end{aligned}$$

(65) eşitliği elde edilir. Teorem 3.1. de yer alan (28) numaralı eşitlikten,

$$\begin{aligned}
\sigma &= (1 + b_1^2)^{\frac{3}{2}}(u^2 + v^2) \\
\sigma^2 &= (1 + b_1^2)^3(u^4 + 2u^2v^2 + v^4) \quad (66)
\end{aligned}$$

(66) eşitliği elde edilir. (65) ve (66) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
(1 + b_1^2)^3(u^4 + 2u^2v^2 + v^4) &= (1 + b_1^2)^3u^4 + (1 + b_1^2)^3v^4 \\
&+ (1 + b_1^2)[-2 - 4b_1^2 - 4b_1^4 + b_2^2\lambda^2 - \lambda^2 - b_1^2\lambda^2]u^2v^2 \\
(1 + b_1^2)^3(2u^2v^2) &= (1 + b_1^2)[-2 - 4b_1^2 - 4b_1^4 + b_2^2\lambda^2 - \lambda^2 - b_1^2\lambda^2] \\
(1 + b_1^2)^2(2u^2v^2) &= [-2 - 4b_1^2 - 4b_1^4 + b_2^2\lambda^2 - \lambda^2 - b_1^2\lambda^2]u^2v^2 \\
(2 + 4b_1^2 + 2b_1^4) &= [-2 - 4b_1^2 - 4b_1^4 + \lambda^2(b_2^2 - 1 - b_1^2)] \\
4 + 8b_1^2 + 4b_1^4 &= \lambda^2(b_2^2 - 1 - b_1^2) \\
4(1 + b_1^2)^2 &= \lambda^2(b_2^2 - (1 + b_1^2))
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
|b_2^2 - (1 + b_1^2)| \Rightarrow \quad b_2^2 = b_1^2 + 1 \quad \text{veya} \quad b_2^2 - 1 - b_1^2 > 0 \\
a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 \quad \quad \quad a_3^2 > a_1^2 + a_2^2
\end{aligned}$$

sonuçları elde edilir. Bu ise γ eğrisinin spacelike olması ile çelişir. Dolayısıyla normal vektörü spacelike olan timelike düzlemde yatan spacelike eğriden Teorem 3.1. de verilen karakterizasyon ile PH-Helis eğrisi üretilemez.

BEŞİNCİ BÖLÜM BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın birinci bölümünde helis eğrisi, PH-Eğri ve PH-Helis eğrisi ile ilgili yapılmış olan çalışmalar incelenmiş ve hakkında gerekli açıklamalar yapılmıştır. İkinci bölümünde Öklid ve Minkowski uzayında yararlanılan temel olan kavramlar açıklanmış olup, bu çalışmaya yardımcı olabilecek teoremler ispatlarıyla birlikte açıklanmıştır. İkinci bölümde yer alan bu kavramlar ve teoremlerden faydalanarak üçüncü bölümde Minkowski 3-uzayında PH-Eğriler açıklanmış ve keyfi parametrelili bir eğriden MPH-Eğri elde etmek için gerekli olan karakterizasyon örneğiyle birlikte verilmiştir. Dördüncü bölümde, helis ve Öklid uzayında helis elde etmek için temel tanım ve teoremler ifade edilerek Minkowski uzayında düzlemlerin casual karakterleri açıklanmıştır. Düzlemin spacelike, timelike ve null (lightlike) olma durumlarına göre Minkowski Uzayında PH-Helis elde etme karakterizasyonu verilmiştir.

Bu bilgiler doğrultusunda elde ettiğimiz sonuçlar şu şekilde sıralanabilir;

- 1- Minkowski uzayında keyfi parametrelili bir eğriden Teorem 3.1. de verilen karakterizasyon ile PH-Eğri elde edilebilir.
- 2- Minkowski uzayında normal vektörü timelike olan spacelike düzlemde MPH-Helis eğri vardır ve Teorem 3.1. de verilen karakterizasyon ile üretilebilir.
- 3- Minkowski uzayında normal vektörü null olan null düzlem üzerinde bulunan herhangi bir eğriden Teorem 3.1. de verilen karakterizasyon ile MPH-Helis eğri üretilemez.
- 4- Minkowski uzayında normal vektörü spacelike olan timelike düzlemde yatan timelike eğriden Teorem 3.1. de verilen karakterizasyon ile MPH-Helis eğri üretilemez.
- 5- Minkowski uzayında normal vektörü spacelike olan timelike düzlemde yatan null eğriden Teorem 3.1. de verilen karakterizasyon ile MPH-Helis eğri üretilemez.
- 6- Minkowski uzayında normal vektörü spacelike olan timelike düzlemde yatan spacelike eğriden Teorem 3.1. de verilen karakterizasyon ile MPH-Helis eğri üretilemez.

KAYNAKÇA

- Camcı, Ç. and İlarıslan, K. (2019). A new method for construction of ph-helical curves in E^3 , *Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, Vol 72, No3, pp. 301-308.
- Dietz, R., Hoschek, J. and Jüttler, B. (1993). An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics. *Comput. Aided Geom. Design*, 10, 211-229.
- Farouki, R. T. and Sakkalis, T. (1990). Pythagorean hodographs. *IBM journal of Research and Development*, 34, 736-752.
- Farouki, R. T. (1992). Pythagorean-hodograph curves in practical use. *Geometry Processing for Design and Manufacturing*, SIAM, 3-33.
- Farouki R. T., Sakkalis T. (1994). Pythagorean-hodograph space curves, *Adv. Comp. Math.*, 2(1), 41–66.
- Farouki R. T., Al-Kandari M., Sakkalis T. (2002). Structural invariance of spatial Pythagorean hodographs, *Comput. Aided Geom. Design*, 19(6), 395–407.
- Farouki R. T., Han C. Y., Manni C., Sestini A. (2004). Characterization and construction of helical polynomial space curves, *J. Comput. Appl. Math.*, 162(2), 365–392.
- Farouki, R. T. (2008). *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*. Springer, Berlin.
- Farouki, R. T., Giannelli C., Sestini A. (2009). Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs I Quaternion and Hopf map representations, *J. Symbolic Comput.*, 44(2), 161–179.
- Farouki R. T., Giannelli C., Sestini A. (2009). Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs II. Enumeration of low-degree curves, *J. Symbolic Comput.*, 44(4), 307–332.
- Hacısalıhoğlu H., (1998). *Diferansiyel Geometri Cilt:1*. Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- Izumiya S., Takeuchi N. (2002). Generic Properties Of Helices and Bertrand Curves. *Journal of Geometry*, 74(1-2), 97-109.

- Kreyszig, E. (1959). *Differential Geometry*. University of Toronto Press.
- Kubota K. K. (1972). Pythagorean triples in unique factorization domains, *Amer. Math. Monthly*, 79, 503–505.
- Lancret, M. A. (1806). Mémoire sur les courbes à double courbure. Mémoires présentés à l'Institut, 1, 416-454.
- Larson, R. (2012). *Elementary Linear Algebra*. The Pennsylvania State University, Boston.
- Lopez, R. (2014). Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. *International Electronic Journal of Geometry*, 7(1), 44-107.
- Mollaoğulları A., Gümüş M., İlarslan K., Camcı Ç. (2021). A New Method to Obtain PH-Helical Curves in E^{n+1} , *Journal Of New Theory*, 37, 45–57.
- Moon, H. P. (1999). Minkowski Pythagorean Hodographs. *Comput. Aided Geom. Design*, 16, 739-753.
- O'Neill, B. (1983). *Semi Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, London.
- Petrović-Torgašev, M. and Nešović, E. (2000). “Some characterizations of Lorentzian spherical spacelike curves with the timelike and null principal normal”, *Mathematica Moravica*, 4, 83-92.
- Ratcliffe, J. G. (1994). *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer-Verlag. New York.
- Sabuncuoğlu, A. (2004). *Diferensiyel Geometri*. Nobel Yayınevi, 1. Baskı.
- Struik, D. J. (1988). *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover Publication, Inc., New York, 2nd edition.

