T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ

TÜREVLER

Selin TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

Not: Tez kapağı yüksek lisans tezlerinde "Turkuaz", doktora tezlerinde "Mavi" dir.

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Selin TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **28/06/2016**

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Neşet AYDIN

ÇANAKKALE

Selin TÜRKMEN tarafından Prof. Dr. Neşet AYDIN yönetiminde hazırlanan ve **28/06/2016** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**Halkalarda Genelleştirilmiş Türevler**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Neşet AYDIN ……………………
Başkan

Prof. Dr. Yakup HACI ……………………
Üye

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK ……………………
Üye

Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI ……………………
Üye

Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI ……………………
Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:………

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Selin TÜRKMEN

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Neşet AYDIN'a, çalışma süresince desteğini benden esirgemeyen Didem K. CAMCI'ya, lisans öğrenimim boyunca benimle ev arkadaşlığı yapan biricik anneannem Sabahat BEKLER'e, hayatımın her aşamasında en büyük destekçim olan annem Melin VURKAÇ ve babam Cemal VURKAÇ'a ve tüm zorlukları benimle birlikte göğüsleyen, varlığıyla güç bulduğum canım eşim Onur Sinan TÜRKMEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca doktora öğrenimim boyunca vermiş olduğu burs ile bana destek olan TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Selin TÜRKMEN

Çanakkale, Haziran 2016

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\emptyset$	Boş küme
$\forall$	Her
(0)	Sıfır kümesi
$\in$	Eleman
$1-1$	Bire-bir
$=$	Eşit
$\Rightarrow$	İse
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$\subset$	Kapsama
$-$	Fark
$\times$	Kartezyen çarpım
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$A\,/\,B$	A grubunun $mod\ B$ ye göre kalan sınıf grubu
$L(R)$	R halkası üzerindeki Lie yapısı
f_A	A ideali üzerindeki Lie yapısı
$\cong$	İzomorf
$\notin$	Eleman değil
$\neq$	Eşit değil
$\not\subset$	Kapsanmaz
$\subsetneq$	Kapsanır ancak eşit değil

ÖZET

HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Selin TÜRKMEN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman : Prof. Dr. Neşet AYDIN
28/06/2016, 65

Bu tez beş bolümden oluşmaktadır. İlk bölümde, çalışılan konular ile ilgili literatür bilgilerine, ikinci bölümde ise tezin anlaşılmasına yardımcı olacak ön bilgilere yer verilmiştir. Tezin ana kısımlarını üçüncü ve dördüncü bölümler oluşturmaktadır. Üçüncü bölüm iki alt başlık altında incelenmiş olup ilk bölümde asal halkada ispatlanan bazı sonuçlar involüsyonlu bir asal halkanın idealleri üzerinde türev ve (α,β)-türev kullanılarak genelleştirilmiştir. İkinci kısımda ise asal halkanın Lie idealleri için bulunan bazı sonuçlar involüsyonlu bir asal halkanın genelleştirilmiş Lie idealleri üzerine genelleştirilmiştir. Dördüncü bölüm de iki kısımdan oluşmaktadır. İlk olarak bir iç türev ile belirlenen genelleştirilmiş iç türevlerin bir Lie halkası kurulmuş ve bu Lie halkanın sağladığı bazı özellikler elde edilmiştir. Sonrasında ise bir yarıasal halkanın genelleştirilmiş iç türevlerinin bir Lie halkasının asal olması durumu incelenmiş ve bazı genelleştirmeler verilmiştir. Son bölüm olan beşinci bölümde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Genelleştirilmiş türev, Lie halka, Involüsyonlu asal halka, Genelleştirilmiş Lie ideal, Yarıasal halka, (α,β)-türev.

ABSTRACT

GENERALIZED DERIVATIONS IN RINGS

Selin TÜRKMEN
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Doctoral Dissertation in Mathematical Science
Advisor : Prof. Dr. Neşet AYDIN
28/06/2016, 65

This study consists of five sections. In the first part, it is made mention of content of dissertation and literature that is relevant with the subject is summarized and in the second part, preliminary informations are given for understanding of the thesis. The main aim of the dissertation occurs third and fourth sections. The third part includes two subsections. In the first, some conclusions proved in prime ring are generalized for ideals of a prime ring with involution by using derivation and (α, β)-derivation. In the second, some conclusions proved on a Lie ideal of a prime ring are generalized for generalized Lie ideals of a ring with involution. The fourth part includes two subsections too. Firstly, a Lie ring of generalized inner derivations determined by a inner derivation is established and some properties provided by this Lie ring are investigated. Secondly, a Lie ring of generalized inner derivations of a semiprime is established and the primeness of this Lie ring under the some conditions is investigated. In the fifth part that is the last section, all obtained conclusions are summarized.

Keywords: Generalized derivation, Lie ring, Ring with involution, Generalized Lie ideal, Semiprime ring, (α, β)-derivation.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Bir asal halka üzerinde türev içeren ve cebirsel ifadeler kullanılarak yapılan literatürdeki ilk çalışma Posner (Posner, 1957) tarafından hazırlanmıştır. Halka üzerinde türev içeren cebirsel koşulların incelenmesi ile bazen halkanın sağladığı genel özellikler, bazen de üzerinde tanımlanan türev hakkında belirleyici sonuçlar elde edilmiştir. Zamanla yapılan çalışmalarda türevin yerini daha genel dönüşümler olan (α, β)-türev, genelleştirmiş türev, genelleştirilmiş (α, β)-türev gibi fonksiyonlara yer verilmiştir. Diğer taraftan da yapısal anlamda genelleştirmelere yönelerek halkanın altkümeleri olan ideal, Lie ideal, genelleştirilmiş Lie ideal gibi kümeler üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Böylece gerek yapısal olarak gerekse fonksiyonel anlamda elde edilen bulgular sayesinde halka üzerinde sağlanan genel özelliklere erişme imkanı doğmuştur.

Her asal halka opposite halkası ile beraber düşünüldüğünde bir involüsyonlu asal halkanın içine gömülebilir ve asal halkanın izomorfik görüntüsü de bir involüsyonlu asal halka olur. Bu sayede her asal halkanın bir involüsyonlu asal halka olduğu söylenebilir. Ancak tersinin mümkün olmadığı örnekler vardır. O halde asal halka üzerinde ele alınan problemler involüsyonlu asal halkalar üzerinde incelenerek daha genel sonuçlara ulaşılabilir. Böylelikle aynı koşullar altında asal halka üzerinde elde edilen sonuçlar, involüsyonlu asal halkalar üzerinde elde edilen sonuçların özel bir durumudur. Çalışmanın ilk bölümünde asal halkalarda bulunan bazı sonuçlar yapısal ve fonksiyonel anlamda involüsyonlu halkalar üzerine genelleştirilmiştir.

Yapılan çalışmalarda halka üzerinde tanımlanan bütün türevlerin kümesinin bir Lie halka ve halkanın bütün iç türevlerinin kümesinin de bir Lie althalkası olduğu görülmüştür. Buradan yola çıkarak, Breśar (Breśar, 1991) tarafından tanımlanan genelleştirilmiş türev tanımı kullanılarak bir halka üzerinde tanımlanan bütün genelleştirilmiş türevlerin kümesinin bir Lie halka ve halkanın bütün genelleştirilmiş iç türevlerinin kümesinin de bir Lie althalkası olduğu ispatlanmıştır. R bir halka ve a sabit bir elemanı olmak üzere her $x \in R$ için $I_a(x) = [a, x]$ olacak biçimde tanımlanan dönüşüm a elemanı ile belirlenen bir iç türevdir. α ve β halka üzerinde tanımlı birer dönüşüm olmak üzere her $x \in R$ için $d_a(x) = [a, x]_{\alpha,\beta} = a\alpha(x) - \beta(x)a$ olacak biçimde tanımlanan dönüşüm ise a elemanı ile belirlenen bir (α, β)-iç türevdir. Çalışmanın son bölümünde (α, β)-komutatör içindeki elemanların yer değiştirmesi sonucunda her $x \in R$ için $h_a(x) = [x, a]_{\alpha,\beta}$ olacak biçimde tanımlanan h_a dönüşümünün bir (α,β)-türev olmadığı ancak bir genelleştirilmiş türev olduğu ve $\alpha(a)$ iç türevi ile belirlendiği gösterilmiştir. Böylelikle halkanın her elemanı için (α,β)-komutatör yardımıyla yukarıda tanımlanan formda bir genelleştirilmiş türev tanımlanabilir. Üstelik halka üzerinde bu şekilde tanımlanan bütün genelleştirilmiş türevlerin kümesi incelendiğinde bir Lie halka olduğu görülmüştür. Böylece daha önce türevlerin Lie halkası veya iç türevlerin Lie halkası üzerinde ele alınan bazı problemlerin bu yapıda incelenmesi olanağı doğmuştur.

BÖLÜM 2
GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1. Boş kümeden farklı bir G kümesi üzerinde

$$+: G \times G \to G$$
$$(a, b) \to a + b$$

işlemi tanımlansın. Buna göre

i. Her $a, b, c \in G$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$

ii. Her $a \in G$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olacak biçimde $0 \in G$ var

iii. Her $a \in G$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olacak biçimde $-a \in G$ var

koşulları sağlanıyorsa G kümesine bir ***grup*** denir.

Üstelik her $a, b \in G$ için $a + b = b + a$ oluyor ise G kümesine bir ***değişmeli grup*** denir.

Gösterim 2.2. $(G, +)$ ikilisi G kümesinin üzerinde tanımlanan " $+$ " işlemi ile bir grup olduğunu gösterecektir. İşlemin önemli olmadığı durumlarda $(G, +)$ ikilisi yerine sadece G gösterimi kullanılabilir.

Tanım 2.3. G bir grup ve $\emptyset \neq \mathrm{A} \subset G$ olsun. Eğer A kümesi, G kümesi üzerinde tanımlı işleme göre kendi başına bir grup oluyorsa A kümesine G grubunun bir ***altgrubu*** denir.

Tanım 2.4. Bir grubun, birimden ve kendinden farklı bir altgrubuna ***öz altgrup*** denir.

Tanım 2.5. $(G, +)$ ve $(S, *)$ iki grup olmak üzere bir $f: G \to S$ fonksiyonu her $x, y \in G$ için $f(x + y) = f(x) * f(y)$ oluyorsa f fonksiyonuna bir ***grup homomorfizması*** denir.

Eğer f grup homomorfizması örten dönüşüm ise ***grup epimorfizması***, $1 - 1$ dönüşüm ise ***grup monomorfizması*** *ve* $1 - 1$, örten dönüşüm ise ***grup izomorfizması*** olarak adlandırılır.

$kerf = \{a \in G \mid f(a) = e_S\}$ olarak tanımlanan kümeye f grup homomorfizmasının ***çekirdeği*** denir.

Teorem 2.6. (*Brauer's Trick*) Herhangi bir grup iki öz altgrubunun birleşimi olarak yazılamaz.

İspat. $(G,*)$ bir grup olmak üzere K ve H öz altgrupları için $G = H \cup K$ olarak yazılsın. Kabul edelim ki $H \subsetneq K$ ve $K \subsetneq H$ olsun. Bu durumda $a \in H - K$ ve $b \in K - H$ olacak biçimde $a, b \in G$ vardır. G grup olduğu için $a * b \in G$ dir. $G = H \cup K$ olduğundan

$a * b \in H$ veya $a * b \in K$ olur. $a * b \in H$ ise H bir grup ve $a \in H$ olduğu için $a^{-1} \in H$ dır. Bu durumda $b = a^{-1} * a * b \in H$ olur. Oysa ki $b \notin H$ idi. Bu nedenle $a * b \in H$ olamaz. O halde $a * b \in K$ dır. Benzer şekilde K bir grup ve $b \in K$ olduğu için $b^{-1} \in K$ dir. Böylece $a = a * b * b^{-1} \in K$ olur. Bu ise $a \notin K$ olması ile çelişir. Çelişkilerin nedeni kabuldür. O halde $K \subset H$ veya $H \subset K$ dır. İlk olarak kabul edelim ki $K \subset H$ olsun. Bu durumda $H \cup K \subset H$ olur. Bu $G \subset H$ demektir. Yani $G = H$ olur. Bu ifade H kümesinin öz altgrup olması ile çelişir. O halde $H \subset K$ dır. Bu durumda da $H \cup K \subset K$ olduğundan $G = K$ olur. Bu ifade de K kümesinin öz altgrup olması ile çelişir. Tüm bu çelişkilerin nedeni başlangıçtaki kabuldür. Böylece $G = H \cup K$ olması durumunda $G = H$ veya $G = K$ dır.

Tanım 2.7. Boş kümeden farklı bir R kümesi üzerinde

$$+: R \times R \to R \qquad \text{ve} \qquad \cdot: R \times R \to R$$
$$(a,b) \to a + b \qquad\qquad (a,b) \to a \cdot b$$

işlemleri tanımlansın. Buna göre

i. $(R, +)$ bir değişmeli grup

ii. Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

iii. Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

koşulları sağlanıyorsa R kümesi üzerinde tanımlanan işlemler ile birlikte $(R, +, \cdot)$ üçlüsüne bir ***halka*** denir.

Üstelik her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ oluyor ise R halkası bir ***değişmeli halka*** dır.

Gösterim 2.8. $(R, +, \cdot)$ üçlüsü R kümesi üzerinde tanımlanan " $+$ " ve " $\cdot$ " işlemleri ile birlikte bir halkayı ifade eder. İşlemin önemli olmadığı durumlarda $(R, +, \cdot)$ yerine sadece R gösterimi kullanılabilir.

Tanım 2.9. R bir halka ve $\emptyset \neq \mathrm{A} \subset \mathrm{R}$ olsun. Eğer A kümesi, R kümesi üzerinde tanımlı işlemlere göre kendi başına bir halka oluyorsa A kümesine R halkasının bir ***althalkası*** denir.

Tanım 2.10. $(R, +, \cdot)$ ve $(S, *, \circ)$ iki halka olmak üzere bir $f: R \to S$ fonksiyonu her $x, y \in R$ için

$$f(x + y) = f(x) * f(y)$$

ve

$$f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$$

eşitliklerini sağlıyorsa f fonksiyonuna bir ***halka homomorfizması*** denir.

Eğer f halka homomorfizması örten dönüşüm ise ***halka epimorfizması***, $1-1$ dönüşüm ise ***halka monomorfizması*** ve $1-1$, örten dönüşüm ise ***halka izomorfizması*** olarak adlandırılır.

Özel olarak, $f: R \to R$ bir halka izomorfizması ise ***halka otomorfizması*** adını alır.

Tanım 2.11. $(R,+,\cdot)$ ve $(S,*,\circ)$ iki halka olmak üzere bir $f: R \to S$ fonksiyonu her $x, y \in R$ için

$$f(x+y) = f(x) * f(y)$$

ve

$$f(x \cdot y) = f(y) \circ f(x)$$

ifadelerini sağlıyorsa f fonksiyonuna bir ***anti-halka homomorfizması*** denir.

Tanım 2.12. R bir halka olmak üzere $x, y \in R$ için $[x,y] = xy - yx$ ifadesine ***komütatör çarpım*** denir ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. $[x,y] = -[y,x] = [y,-x] = [-y,x]$,

ii. $[xy,z] = x[y,z] + [x,z]y$,

iii. $[x,yz] = y[x,z] + [x,y]z$,

iv. $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ (*Jacobi özdeşliği*).

Tanım 2.13. R bir halka ve A, R halkasının boş kümeden farklı bir altkümesi olsun.

$$C_R(A) = \{a \in R \mid xa = ax, \forall x \in A\}$$
$$= \{a \in R \mid [x,a] = 0, \forall x \in A\}$$

kümesine A kümesinin R halkasındaki ***merkezleştiricisi*** denir.

Özel olarak, $C_R(R)$ kümesine R halkasının ***merkezi*** denir ve $\boldsymbol{Z(R)}$ ile gösterilir.

Tanım 2.14. R bir halka, α, $\beta: R \to R$ iki dönüşüm olmak üzere $x, y \in R$ için $[x,y]_{\alpha,\beta} = x\alpha(y) - \beta(y)x$ ifadesine $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$- ***komütatör*** denir.

α, $\beta: R \to R$ iki homomorfizma olmak üzere (α,β)-komütatör aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. $[xy,z]_{\alpha,\beta} = x[y,z]_{\alpha,\beta} + [x,\beta(z)]y = x[y,\alpha(z)] + [x,z]_{\alpha,\beta}y$,

ii. $[x,yz]_{\alpha,\beta} = \beta(y)[x,z]_{\alpha,\beta} + [x,y]_{\alpha,\beta}\alpha(z)$,

iii. $\left[[x,y]_{\alpha,\beta}, z\right]_{\alpha,\beta} = \left[[x,z]_{\alpha,\beta}, y\right]_{\alpha,\beta} + [x,[y,z]]_{\alpha,\beta}$ (*Genelleştirilmiş Jacobi özdeşliği*).

Uyarı 2.15. *Gösterim 2.14* de, α ve β dönüşümleri yerine $1: R \to R$ dönüşümü alınırsa

$$[x,y]_{1,1} = xy - yx = [x,y]$$

olduğu görülür.

Tanım 2.16. R bir halka ve $\alpha,\ \beta: R \to R$ iki dönüşüm olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_{\alpha,\beta} &= \{c \in R \mid c\alpha(x) = \beta(x)c, \quad \forall x \in R\} \\ &= \{c \in R \mid [c,x]_{\alpha,\beta} = 0, \quad \forall x \in R\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan kümeye R halkasının $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$***-merkezi*** denir.

Uyarı 2.17. *Tanım 2.16* da α ve β dönüşümleri yerine $1: R \to R$ birim dönüşüm alınırsa

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_{1,1} &= \{c \in R \mid cx = xc, \quad \forall x \in R\} \\ &= \{c \in R \mid [c,x] = 0, \quad \forall x \in R\} \\ &= \mathrm{Z(R)} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Uyarı 2.18. Bir halkanın merkezi kendisinin althalkasıdır.

Uyarı 2.19. R bir halka, A ve B altgrupları olsun. $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere ab elemanları tarafından üretilen altgrup AB dir.

Tanım 2.20. R bir halka ve I, R halkasının boş kümeden farklı bir toplamsal alt grubu olmak üzere

$$IR = \{\sum_{sonlu} r_i \cdot a_i \mid a_i \in I, r_i \in R\} \subset I$$

oluyorsa I kümesine R halkasının bir ***sağ ideali***,

$$RI = \{\sum_{sonlu} r_i \cdot a_i \mid a_i \in I, r_i \in R\} \subset I$$

oluyorsa I kümesine R halkasının bir ***sol ideali*** denir. I kümesi R halkasının hem sol hem de sağ ideali oluyorsa I kümesine R halkasının bir ***ideali*** denir.

Örnek 2.21. (Shuliang H., 2012, *Örnek 2.1*) $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z}\right\}$ halkası verilsin. Bu durumda $I = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R \mid a \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi R halkasının bir idealidir.

Tanım 2.22. R bir halka ve A ve B, R halkasının idealleri olsun. n bir pozitif tam sayısı olmak üzere

$$AB = \{\sum_{sonlu} a_i b_i \mid a_i \in A,\ b_i \in B\}$$

ve

$$A^n = \{\sum_{sonlu} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_j} \mid a_{i_j} \in A\}$$

dir.

Tanım 2.23. R bir halka ve $P \neq R$ olan bir ideali olsun. A ve B, R halkasının herhangi iki ideali olmak üzere

$$"AB \subseteq P \text{ olduğunda } A \subseteq P \text{ veya } B \subseteq P"$$

oluyorsa P idealine R halkasının bir ***asal ideali*** denir.

Tanım 2.24. (0) ideali asal ideal olan halkaya ***asal halka*** denir.

Örnek 2.25. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tamsayılar halkası bir asal halkadır.

Önerme 2.26. (Mccoy N. H., 1964, *Teorem 4.3*) Bir R halkasının asal olması için gerek ve yeter koşul $a, b \in R$ için $aRb = (0)$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.27. R bir halka ve I bir ideali olsun. Eğer $I^n = (0)$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı varsa I idealine ***nilpotent ideal*** denir.

Tanım 2.28. Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya ***yarıasal halka*** denir.

Önerme 2.29. (Mccoy N. H., 1964, *Teorem 4.12*) Bir R halkasının yarıasal halka olması için gerek ve yeter koşul $a \in R$ olmak üzere $aRa = (0)$ olduğunda $a = 0$ olmasıdır.

Uyarı 2.30. Her asal halka bir yarıasal halkadır. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 2.31. (Breśar M., 2014, *Örnek 2.32*) $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[a, b]$ kapalı aralığındaki sürekli fonksiyonların halkası $(C[a, b], +, \cdot)$ bir yarıasal halkadır ancak bir asal halka değildir.

Tanım 2.32. R bir halka olmak üzere her $a \in R$ için $na = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı varsa bu pozitif tamsayıların en küçüğüne halkanın ***karakteristiği*** denir ve $\boldsymbol{charR = n}$ ile gösterilir.

Tanım 2.33. R bir halka, n pozitif bir tamsayı ve $a \in R$ olmak üzere $na = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa R halkasına ***n-torsion free halka*** denir.

Uyarı 2.34. R bir 2-torsion free halka ise R halkasının karakteristiği ikiden farklıdır. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir.

İspat. R bir 2-torsion free halka olsun. Kabul edelim ki $charR = 2$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $2x = 0$ dır. R bir 2-torsion free halka olduğundan her $x \in R$ için $x = 0$ olur. Bu ise $R = (0)$ demektir. Yani $charR \neq 2$ dir.

Tersine $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ kümesi bilinen toplama ve çarpma işlerine göre bir halkadır. Her $\bar{x} \in \mathbb{Z}_4$ için $4\bar{x} = \bar{0}$ olduğundan $char\, \mathbb{Z}_4 = 4$ dir. Böylelikle $char\, \mathbb{Z}_4 \neq 2$ olur. Öte yandan $2\bar{2} = \bar{0}$ iken $\bar{2} \neq \bar{0}$ olduğundan $\mathbb{Z}_4$, 2-torsion free değildir. Yani $char\, \mathbb{Z}_4 \neq 2$ iken $\mathbb{Z}_4$, 2-torsion free değildir.

Uyarı 2.35. R bir asal halka olmak üzere R halkasının karakteristiği ikiden farklı ise R halkası 2-torsion free bir halkadır.

İspat. R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka olsun. Kabul edelim ki $x \in R$ için $2x = 0$ olsun. Bu durumda her $a, b \in R$ için

$$2(xab) = 0 \Rightarrow xab + xab = 0 \Rightarrow xa(b + b) = 0 \Rightarrow xa(2b) = 0$$

olur. Bu ise her $b \in R$ için $xR(2b) = (0)$ demektir. R halkasının asal olması kullanılarak $x = 0$ veya her $b \in R$ için $2b = 0$ elde edilir. Bu durumda halkanın karakteristiği ikiden farklı olduğu için $x = 0$ olur. Böylece R bir 2-torsion free halkadır.

Sonuç 2.36. R bir asal halka olmak üzere $charR \neq 2$ olması ile 2-torsion free olması aynı anlama gelir.

Tanım 2.37. R bir halka, $d: R \rightarrow R$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$d(x + y) = d(x) + d(y) \qquad \text{(toplamsal dönüşüm)}$$

ve

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

ise d dönüşümüne R üzerinde bir ***türev*** denir.

Örnek 2.38. (Shuliang H., 2010, *Örnek 2.3*) R bir halka ve $S = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in R\right\}$ olsun. S kümesi matrisler halkası üzerinde bilinen işlemler ile bir halkadır. Bu durumda $d: S \rightarrow S$, $\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile tanımlı fonksiyon S kümesi üzerinde bir türevdir.

Özellik 2.39. $a \in R$ olmak üzere $I_a : R \rightarrow R$, her $x \in R$ için $I_a(x) = [a, x]$ olacak biçimde tanımlanan dönüşüm her $x, y \in R$ için

$$I_a(x + y) = [a, x + y] = [a, x] + [a, y] = I_a(x) + I_a(y)$$

ve

$$I_a(xy) = [a, xy] = [a, x]y + x[a, y] = I_a(x)y + xI_a(y)$$

olduğundan I_a bir türevdir.

Tanım 2.40. R bir halka ve $a \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $I_a(x) = [a, x]$ olacak biçimde tanımlanan dönüşüme ***a ile belirlenen iç türev*** denir.

Özellik 2.41. R bir halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Bu durumda $d\big(Z(R)\big) \subset Z(R)$ dir.

İspat. Her $x \in R$, $a \in Z(R)$ için $d([x, a]) = 0$ dır. Bu ifade düzenlendiğinde ise $0 = d([x, a]) = [d(x), a] + [x, d(a)]$ bulunur. Elde edilen son eşitlikte $a \in Z(R)$ olması kullanıldığında her $a \in Z(R)$ için $[R, d(a)] = (0)$ elde edilir. Bu ise her $a \in Z(R)$ için $d(a) \in Z(R)$ demektir.

Tanım 2.42. R bir halka, $\alpha,\ \beta: R \to R$ iki dönüşüm ve $d: R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$d(xy) = d(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$$

oluyorsa d dönüşümüne bir $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$***-türev*** denir.

Uyarı 2.43. Her türev $(1,1)$-türevdir. Ancak her (α, β)-türev bir türev olmayabilir.

Örnek 2.44. (Chang J. C., 1997, *Örnek 2*) R, 2×2 lik matrisler halkası olmak üzere $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. $d: R \to R,\ d(x) = [a, x]b$ ve $\beta: R \to R,\ \beta(x) = b^{-1}xb$ olacak biçimde tanımlansın. Bu durumda d bir $(1, \beta)$-türevdir fakat bir türev değildir.

Not 2.45. R bir halka, $\alpha,\ \beta: R \to R$ iki halka homomorfizması ve $a \in R$ olmak üzere $d_a: R \to R$, her $x \in R$ için $d_a(x) = [a, x]_{\alpha,\beta}$ olacak biçimde tanımlanan dönüşüm her $x, y \in R$ için

$$d_a(x + y) = [a, x + y]_{\alpha,\beta} = [a, x]_{\alpha,\beta} + [a, y]_{\alpha,\beta} = d_a(x) + d_a(y)$$

ve

$$d_a(xy) = [a, xy]_{\alpha,\beta} = [a, x]_{\alpha,\beta}\alpha(y) + \beta(x)[a, y]_{\alpha,\beta} = d_a(x)\alpha(y) + \beta(x)d_a(y)$$

olduğundan d_a bir (α, β)-türevdir.

Tanım 2.46. R bir halka, $\alpha,\ \beta: R \to R$ iki halka homomorfizması ve $a \in R$ iken $d_a: R \to R$, her $x \in R$ için $d_a(x) = [a, x]_{\alpha,\beta}$ olacak biçimde tanımlanan dönüşüme $\boldsymbol{a}$ ***ile belirlenen*** $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$***-iç türev*** denir.

Özellik 2.47. R bir halka, $\alpha,\ \beta: R \to R$ iki halka homomorfizması ve $d: R \to R$ bir (α, β)-türev olmak üzere her $x, y \in R$ için $d([x, y]) = [d(x), y]_{\alpha,\beta} - [d(y), x]_{\alpha,\beta}$ dir.

İspat. Her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} d([x, y]) &= d(xy - yx) = d(xy) - d(yx) \\ &= d(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y) - \big(d(y)\alpha(x) + \beta(y)d(x)\big) \\ &= d(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y) - d(y)\alpha(x) - \beta(y)d(x) \\ &= \big(d(x)\alpha(y) - \beta(y)d(x)\big) - \big(d(y)\alpha(x) - \beta(x)d(y)\big) \\ &= [d(x), y]_{\alpha,\beta} - [d(y), x]_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

sağlanır.

Tanım 2.48. R bir halka ve $f: R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)y + xd(y)$$

olacak biçimde bir $d: R \to R$ türevi var ise f dönüşümüne d türevi ile belirlenen bir ***genelleştirilmiş türev*** denir.

Tanım 2.49. R bir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere $f_{a,b} : R \to R$, her $x \in R$ için $f_{a,b}\,(x) = ax + xb$ olacak biçimde tanımlanan $f_{a,b}$ dönüşümüne a ve b ile belirlenen bir ***genelleştirilmiş iç türev*** denir.

Gösterim 2.50. (f, d) ikilisi d türevi ile belirlenen f genelleştirilmiş türevini ifade eder.

Uyarı 2.51. Her türev kendisi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türevdir. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 2.52. (Khan M. R. ve Hasnain M. M., 2013, *Örnek 5*) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $R = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi matrisler halkası üzerinde bilinen işlemler ile bir halkadır. $f,\ d\colon R \to R$, $f\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a+b & 0 \end{bmatrix}$ ve $d\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ olarak tanımlansın. Bu durumda f dönüşümü d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türevdir ancak bir türev değildir.

Tanım 2.53. $(L, +)$ bir değişmeli grup olmak üzere

$$[\,,]\colon L \times L \to L$$
$$(a, b) \to [a, b]$$

olacak biçimde tanımlanan dönüşüm her $a, b, c \in L$ için

i. $[a, a] = 0$

ii. $[a, b + c] = [a, b] + [a, c]$ ve

$[a + b, c] = [a, c] + [b, c]$

iii. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (*Jacobi özdeşliği*)

koşulları sağlanıyorsa L değişmeli grubuna üzerinde tanımlanan $[\,,]$ işlemi ile birlikte bir ***Lie halka*** denir.

$(L, +, [\,,])$ ikilisi ile L kümesinin üzerinde tanımlanan “ $+$ ” ve “$[\,,]$” işlemleri ile birlikte bir Lie halka olduğu gösterilecektir.

İşlemin önemli olmadığı durumlarda $(L, +, [\,,])$ yerine L gösterimi kullanılacaktır.

Uyarı 2.54. R bir halka olmak üzere her $r, s \in R$ için $[r, s] = rs - sr$ olacak biçimde tanımlanan işlem ile bir Lie halkadır.

$(L(R), +, [\,,])$ gösterimi ile $(R, +,\cdot)$ halkası üzerindeki Lie yapısı ifade edilir.

İşlemin önemli olmadığı durumlarda $(L(R), +, [\,,])$ yerine $L(R)$ gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 2.55. $(K, *, \langle, \rangle)$ ve $(L, +, [,])$ iki Lie halka olmak üzere bir $f\colon K \to L$ fonksiyonu her $x, y \in R$ için

$$f(x * y) = f(x) + f(y)$$

ve

$$f(\langle x, y\rangle) = [f(x), f(y)]$$

eşitliklerini sağlıyorsa f fonksiyonuna bir ***Lie homomorfizması*** denir.

Eğer f Lie homomorfizması örten dönüşüm ise ***Lie epimorfizması***, $1-1$ dönüşüm ise ***Lie monomorfizma*** ve $1-1$, örten dönüşüm ise ***Lie izomorfizması*** olarak adlandırılır.

Uyarı 2.56. R bir halka, A ve B altgrupları olsun. Buna göre $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere $[a, b]$ elemanları tarafından üretilen altgrup $[A, B]$ dir.

Tanım 2.57. R bir halka ve U, R halkasının boş kümeden farklı bir toplamsal altgrubu olmak üzere

$$[U, R] = \{\sum_{sonlu} [u_i, r_i] \mid u_i \in U, r_i \in R\} \subset U$$

oluyorsa U kümesine R halkasının bir ***Lie ideali*** denir.

Uyarı 2.58. Her ideal bir Lie idealdir. Ancak her Lie ideal bir ideal olmayabilir.

Örnek 2.59. (Ali A. ve Kumar D., 2007, *Remark 2.1*) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$ halkası verilsin. $U = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} \in \mathrm{R} \mid x, y \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi R halkasının bir Lie idealidir ancak bir ideali değildir.

Tanım 2.60. L bir Lie halka ve P bir Lie ideali olsun. A ve B, L Lie halkasının sıfırdan farklı Lie idealleri olmak üzere

"$[A, B] \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$"

oluyorsa P idealine L Lie halkasının bir ***asal Lie ideali*** denir.

Tanım 2.61. L bir Lie halka ve P bir Lie ideali olsun. A, L Lie halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideal olmak üzere

"$[A, A] \subseteq P$ iken $A \subseteq P$"

oluyorsa P idealine L Lie halkasının bir ***yarıasal Lie ideali*** denir.

Tanım 2.62. L bir Lie halka ve A ve B Lie idealleri olsun.

"$[A, B] = (0)$ iken $A = (0)$ veya $B = (0)$”

oluyorsa L Lie halkasına bir ***asal Lie halkası*** denir.

Tanım 2.63. L bir Lie halka ve A bir Lie ideali olsun. Eğer

"$[A, A] = (0)$ iken $A = (0)$"

oluyorsa L Lie halkasına bir ***yarıasal Lie halkası*** denir.

Uyarı 2.64. R bir halka, A ve B altgrupları ve $\alpha,\ \beta: R \to R$ iki dönüşüm olsun. $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere $[a, b]_{\alpha,\beta}$ elemanları tarafından üretilen altgrup $[A, B]_{\alpha,\beta}$ dir.

Tanım 2.65. R bir halka, $\alpha, \beta: R \to R$ iki dönüşüm ve U, R halkasının boş kümeden farklı bir toplamsal altgrubu olmak üzere

$$[U,R]_{\alpha,\beta} = \{\sum_{sonlu} [u_i, r_i]_{\alpha,\beta} \mid u_i \in U, r_i \in R\} \subset U$$

ise U kümesine R halkasının bir ***(α, β)-sağ-Lie ideali,***

$$[R,U]_{\alpha,\beta} = \{\sum_{sonlu} [r_i, u_i]_{\alpha,\beta} \mid u_i \in U, r_i \in R\} \subset U$$

ise U kümesine R halkasının bir ***(α, β)-sol-Lie ideali*** denir.

U, R halkasının hem (α, β)-sol-Lie ideali hem de (α, β)-sağ-Lie ideali oluyorsa U kümesine R halkasının bir ***(α, β)-Lie ideali*** denir.

Uyarı 2.66. Her Lie ideal bir (1,1)-Lie idealdir. Ancak her (α, β)-Lie ideal bir Lie ideal olmayabilir.

Örnek 2.67. (Aydın N. ve Kandamar H., 1994) $R = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}\right\}$ halkası verilsin. $\alpha, \beta: R \to R$, $\alpha\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\beta\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlansın. $U = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{R} \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi R halkasının bir (α, β)-Lie idealidir ancak bir Lie ideali değildir.

Tanım 2.68. R bir halka ve $\sigma: R \to R$ bir anti-halka homomorfizma olsun. Her $x \in R$ için $\sigma(\sigma(x)) = x$ ise σ dönüşümüne R halkası üzerinde bir ***involüsyon*** denir.

Tanım 2.69. Üzerinde involüsyon tanımlı olan halkaya ***involüsyonlu halka*** denir.

Gösterim 2.70. R bir halka ve σ halka üzerinde bir involüsyon olsun. σ-halka gösterimi ile R halkasının üzerinde tanımlı σ involüsyonu ile birlikte bir involüsyonlu halka olduğu ifade edilmektedir.

Örnek 2.71. (Khan M. R. ve Hasnain M. M., 2013, *Örnek 1*) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi matrisler halkası üzerinde tanımlı bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. $\sigma: R \to R$, $\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan σ dönüşümü bir involüsyondur. Böylece R bir σ-halkadır.

Tanım 2.72. R bir halka ve $\sigma: R \to R$ bir involüsyon olsun.

$$S = \{x \in R \mid \sigma(x) = x\}$$

kümesi R halkasının ***simetrik elemanlarının***,

$$K = \{x \in R \mid \sigma(x) = -x\}$$

kümesi R halkasının ***anti-simetrik elemanlarının*** kümesidir.

$$S_\sigma(R) = \{x \in R \mid \sigma(x) = \pm x\}$$

kümesi R halkasının ***simetrik ve anti-simetrik elemanlarının kümesi*** olarak adlandırılır.

Tanım 2.73. R bir halka, $\sigma,$ R halkası üzerinde bir involüsyon olsun. $x, y \in R$ için $xRy = xR\sigma(y) = (0)$ veya $xRy = \sigma(x)Ry = (0)$ olduğunda $x = 0$ veya $y = 0$ oluyorsa R halkasına ***σ-asal halka*** denir.

Uyarı 2.74. Her asal halka bir involüsyonlu asal halkadır. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 2.75. (Oukhtite L., 2010) R bir asal halka ve R^0, R halkasının ters halkası (opposite ring) olsun. Bu durumda

$$\sigma: R \times R^0 \to R \times R^0,$$
$$\sigma(x, y) \to (y, x)$$

olacak biçimde tanımlanan dönüşüm $R \times R^0$ halkası üzerinde bir involüsyondur. Üstelik $R \times R^0$ bir σ-asal halkadır ancak bir asal halka değildir.

İspat. $(R, +, \cdot)$ bir asal halka olsun.

$$\circ: R \times R \to R$$
$$(a, b) \to a \circ b = b \cdot a$$

olarak tanımlansın. Bu işlem ile $(R, +, \circ)$ bir halkadır. Bu halkaya ters halka (opposite ring) adı verilir ve R^0 ile gösterilir.

$S = R \times R^0$ olmak üzere her $(a, b),$ $(c, d) \in S$ için

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, d \circ b)$$

işlemleri ile birlikte $(S, \oplus, \odot)$ bir halkadır.

$$\sigma: S \to S$$
$$(x, y) \to (y, x)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm S halkası üzerinde bir involüsyondur. O halde S halkası involüsyonlu bir halkadır. $(a, b),$ $(c, d) \in S$ için

$(a, b)S(c, d) = (a, b)S\sigma((c, d)) = ((0,0))$ iken $(a, b) = (0,0)$ veya $(c, d) = (0,0)$ olduğundan S bir σ-asal halkadır. Ancak $x \neq 0$ iken $(0, x)S(x, 0) = ((0,0))$ olduğundan S bir asal halka değildir.

$$f: R \to S$$
$$r \to (r, 0)$$

olarak tanımlanan dönüşümün birebir halka homomorfizması olduğu açıktır. O halde $R \cong f(R) \subset S$ dir.

Ayrıca $x, y \in f(R)$ için

$$xf(R)y = xf(R)\sigma(y) = (0)$$

iken $x = 0$ veya $y = 0$ bulunur. Yani $f(R)$ bir σ-asal halkadır. O halde R asal halkası izomorfizma farkı ile bir σ-asal halkadır.

Tanım 2.76. R bir halka, σ, R halkası üzerinde bir involüsyon ve I, R halkasının bir ideali olmak üzere her $x \in I$ için $\sigma(x) \in I$ ise I idealine R halkasının bir ***σ-ideali*** denir.

Örnek 2.77. (Khan M. R. ve Hasnain M. M., 2013, *Örnek 1*) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi matrisler halkası üzerinde bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu durumda $\sigma: R \to R$, $\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan dönüşüm bir involüsyondur. Böylece $I = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi R halkasının bir σ-idealidir.

Tanım 2.78. R bir halka, σ halka üzerinde bir involüsyon ve U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere $\sigma(U) \subset U$ ise U Lie idealine R halkasının bir ***σ-Lie ideali*** denir.

Uyarı 2.79. Her σ-ideal bir σ-Lie idealdir ancak tersi her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 2.80. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \mathrm{c} \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$ halkası verilsin. Bu durumda $\sigma: R \to R$, $\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan dönüşüm bir involüsyondur. $U = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} \in \mathrm{R} \mid x, y \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi R halkasının bir σ-Lie idealidir ancak bir σ-ideali değildir.

BÖLÜM 3

İNVOLÜSYONLU HALKALAR ÜZERİNE

3.1. İnvolüsyonlu Halkaların İdealleri Üzerinde (α,β)-Türevler

Posner (1957) yaptığı çalışmada R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, d_1, d_2 halka üzerinde tanımlı iki türev olmak üzere iki türevin bileşkesi yine bir türev ise en az birinin sıfır olması gerektiğini ispatlamıştır. Kaya (1988) yaptığı çalışmada R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, I halkanın sıfırdan farklı bir ideali, σ, τ halka üzerinde iki otomorfizm, d_1 halka üzerinde sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, d_2 sıfırdan farklı bir türev olmak üzere $d_1 d_2(I) \subset C_{\sigma,\tau}$ ve $d_2(I) \subset I$ ise halka değişmelidir sonucuna ulaşmıştır. Herstein (1979) yaptığı çalışmada R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a \in R$ olmak üzere $[a,d(R)] = (0)$ iken $a \in Z(R)$ olduğunu göstermiştir. Aydın ve Kaya (1992) yaptıkları çalışmada R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, I, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali, σ, τ halka üzerinde iki otomorfizm, d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve $a \in R$ olmak üzere şu sonuçlara ulaşmışlardır: (i) $d(I) \subset Z(R)$ ise R bir değişmeli halkadır. (ii) $[d(R),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z(R)$ dir.

Bu bölümde yukarıda ele alınan problemler σ-asal bir halkanın σ-idealleri üzerinde türev ve (α,β)-türev kullanılarak genelleştirilmiştir.

Bu bölüm boyunca σ, R halkası üzerinde bir involüsyon olmak üzere R bir σ-asal halka, $Z(R)$ halkanın merkezi, I halkanın sıfırdan farklı bir σ-ideali ve α, $\beta: R \to R$ iki otomorfizma olarak alınacaktır.

Lemma 3.1.1. (Oukhtite ve Salhi, 2007, *Teorem 2.2*) R bir σ-asal halka ve $a,b \in R$ olmak üzere $aIb = aI\sigma(b) = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Lemma 3.1.2. (Oukhtite ve Salhi, 2006, *Lemma 4*) R karakteristiği ikiden farklı bir σ-asal halka ve d, R halkasının bir türevi iken $d\sigma = \pm\sigma d$ olmak üzere $d^2(I) = (0)$ ise $d = 0$ dır.

Lemma 3.1.3 (Oukhtite ve Salhi, 2006, *Lemma 6*) R karakteristiği ikiden farklı bir σ-asal halka, I sıfırdan farklı bir σ-ideali ve d sıfırdan farklı σ ile değişmeli olan bir türevi olsun. Eğer $a \in I \cap S_\sigma(R)$ ve $[d(I),a] \subset Z(R)$ ise $a \in Z(R)$ dir.

Lemma 3.1.4. $a \in R$ olmak üzere $Ia = (0)$ (veya $aI = (0)$) ise $a = 0$ dır.

İspat. I, R halkasının bir ideali olduğundan $IRa \subset Ia = (0)$ olması kullanılarak $IRa = (0)$ elde edilir. I halkanın bir σ-ideali olduğundan $\sigma(I)Ra = (0)$ da sağlanır.

Böylelikle

$$IRa = \sigma(I)Ra = (0)$$

dır. R bir σ-asal halka ve I halkanın sıfırdan farklı bir σ-ideali olduğundan $a = 0$ olur.

Kabul edelim ki $aI = (0)$ olsun. Bu durumda $aRI \subset aI = (0)$ olduğu görülür. Böylece $aRI = (0)$ olur. I bir σ-asal halka olduğundan $aR\sigma(I) = (0)$ da sağlanır. O halde

$$aRI = aR\sigma(I) = (0)$$

dır. R halkasının σ-asallığı kullanılarak $a = 0$ olduğu bulunur.

Lemma 3.1.5. $a, b \in R$ olmak üzere

i. $b, ab \in C_{\alpha,\beta}$ ve $a \in S_\sigma(R)$ (veya $b \in S_\sigma(R)$) ise $a \in Z(R)$ veya $b = 0$ dır.

ii. $a, ab \in C_{\alpha,\beta}$ ve $a \in S_\sigma(R)$ (veya $b \in S_\sigma(R)$) ise $a = 0$ veya $b \in Z(R)$ dir.

İspat. $(\boldsymbol{i})$ $ab \in C_{\alpha,\beta}$ olduğundan her $r \in R$ için $[ab, r]_{\alpha,\beta} = 0$ dır. (α, β)-komütatör özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde her $r \in R$ için

$$0 = [ab, r]_{\alpha,\beta} = a[b, r]_{\alpha,\beta} + [a, \beta(r)]b$$

olduğu bulunur. $b \in C_{\alpha,\beta}$ olduğundan her $r \in R$ için $[a, \beta(r)]b = 0$ olur. Keyfi bir $s \in R$ için son eşitlik sağdan $\alpha(s)$ ile çarpılır ve elde edilen ifade $b \in C_{\alpha,\beta}$ olması kullanılarak düzenlenirse her $r, s \in R$ için $[a, \beta(r)]\beta(s)b = 0$ olduğu bulunur. Bu ise her $r \in R$ için

$$[a, \beta(r)]\beta(R)b = (0)$$

olması demektir. β örten bir dönüşüm olduğundan

$$[a, R]Rb = (0)$$

dır.

$a \in S_\sigma(R)$ ise $[a, R]Rb = \sigma([a, R])Rb = (0)$ olur. R halkasının σ-asal olması kullanılarak $a \in Z(R)$ veya $b = 0$ olduğu görülür.

$b \in S_\sigma(R)$ ise $[a, R]Rb = [a, R]R\sigma(b) = (0)$ olur. R halkasının σ-asal olması kullanılarak $a \in Z(R)$ veya $b = 0$ olduğu bulunur.

$(\boldsymbol{ii})$ $ab \in C_{\alpha,\beta}$ olduğundan her $r \in R$ için $[ab, r]_{\alpha,\beta} = 0$ dır. Bu eşitlik (α, β)-komütatör özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde her $r \in R$ için

$$0 = [ab, r]_{\alpha,\beta} = a[b, \alpha(r)] + [a, r]_{\alpha,\beta}b$$

olduğu görülür. $a \in C_{\alpha,\beta}$ olması kullanıldığında da her $r \in R$ için $a[b, \alpha(r)] = 0$ elde edilir. Keyfi bir $s \in R$ için son eşitlik soldan $\beta(s)$ ile çarpılır ve elde edilen ifade $a \in C_{\alpha,\beta}$ olması kullanılarak düzenlenirse her $r, s \in R$ için $a\alpha(s)[b, \alpha(r)] = 0$ olur. Yani her $r \in R$ için

$$a\alpha(R)[b, \alpha(r)] = (0)$$

dır. α örten bir dönüşüm olduğundan

$$aR[b,R] = (0)$$

olur. Elde edilen eşitlikten sonrası (i) şıkkının ispatına benzer olarak yapılır.

Lemma 3.1.6. $h: R \to R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. Bu durumda $h(I) \subset Z(R)$ ise R halkası değişmelidir.

İspat. Her $x, y \in I,\ r \in R$ için $[r, h(xy)] = 0$ eşitliği hipotez ve komütatör çarpım özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} 0 &= [r, h(xy)] = [r, h(x)y + xh(y)] = [r, h(x)y] + [r, xh(y)] \\ &= h(x)[r,y] + [r,h(x)]y + x[r,h(y)] + [r,x]h(y) = h(x)[r,y] + [r,x]h(y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise her $x, y \in I,\ r \in R$ için

$$h(x)[r,y] + [r,x]h(y) = 0$$

olması demektir. Son eşitlikte r yerine x yazıldığında her $x, y \in I$ için

$$h(x)[x,y] = 0$$

elde edilir. Elde edilen ifadede y yerine $z \in I$ olmak üzere zy yazılırsa

$$0 = h(x)[x,zy] = h(x)z[x,y] + h(x)[x,z]y = h(x)z[x,y]$$

olduğu bulunur. Bu ise her $x, y \in I$ için

$$h(x)I[x,y] = (0) \tag{3.1}$$

olması demektir. Kabul edelim ki $x \in I \cap S_\sigma(R)$ olsun. (3.1) ifadesinde y yerine $\sigma(y)$ yazılır ve elde edilen eşitlik $x \in S_\sigma(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $y \in I$ için $h(x)I\sigma([x,y]) = (0)$ olur. Elde edilen bu ifade (3.1) eşitliği ile birlikte düşünülürse

$$h(x)I[x,y] = h(x)I\sigma([x,y]) = (0)$$

olduğu görülür. *Lemma 3.1.1* uygulanarak

$$h(x) = 0 \text{ veya } [x,I] = (0)$$

sonucuna ulaşılır. $h(x) \neq 0$ ise $[x,I] = (0)$ dır. I, R halkasının bir ideali olduğundan $[x,RI] \subset [x,I] = (0)$ dır. Bu ise $[x,RI] = (0)$ olması demektir. Böylece $[x,R]I = (0)$ olur. *Lemma 3.1.4* uygulanarak $x \in Z(R)$ olduğu bulunur. Böylece

$$h(x) = 0 \text{ veya } x \in Z(R), \quad \forall x \in I \cap S_\sigma(R)$$

olduğu görülür.

Keyfi bir $y \in I$ alalım. Bu durumda $y - \sigma(y) \in I \cap S_\sigma(R)$ olduğundan

$$h\big(y - \sigma(y)\big) = 0 \text{ veya } y - \sigma(y) \in Z(R), \quad \forall y \in I \tag{3.2}$$

sağlanır. $A=\{y\in I \mid h(y-\sigma(y))=0\}$ ve $B=\{y\in I \mid y-\sigma(y)\in Z(R)\}$ kümelerini tanımlayalım. Açıktır ki A ve B kümeleri I idealinin altgruplarıdır. Öte yandan (3.2) ifadesi sayesinde $I=A\cup B$ olarak yazılır. Böylece Brauer's Trick uygulanarak $I=A$ veya $I=B$ olduğu görülür. Kabul edelim ki $I=A$ olsun. Bu durumda her $y\in I$ için $h(y)=h(\sigma(y))$ dir. (3.1) ifadesinde x yerine $\sigma(x)$, y yerine $\sigma(y)$ yazılır ve elde edilen ifade her $x\in I$ için $h(x)=h(\sigma(x))$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$(0)=h(\sigma(x))I[\sigma(x),\sigma(y)]=h(x)I\sigma([x,y])$$

elde edilir. O halde her $x,y\in I$ için

$$h(x)I[x,y]=h(x)I\sigma([x,y])=(0)$$

dır. *Lemma 3.1.1* uygulanarak her $x\in I$ için $h(x)=0$ veya $[x,I]=(0)$ olduğu bulunur. Yukarıda gösterildiği gibi $[x,I]=(0)$ olması durumunda $x\in Z(R)$ dir. Böylece $I=A$ iken her $x\in I$ için

$$h(x)=0 \text{ veya } x\in Z(R)$$

olur. Şimdi de $I=B$ olsun. Bu durumda her $y\in I$ için $y-\sigma(y)\in Z(R)$ dir. Bu ise her $r\in R,\ y\in I$ için $[r,y]=[r,\sigma(y)]$ olması demektir. (3.1) ifadesinde y yerine $\sigma(y)$ yazılır ve elde edilen ifade her $r\in R,\ x\in I$ için $[x,r]=[\sigma(x),r]$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$(0)=h(x)I[x,\sigma(y)]=h(x)I[\sigma(x),\sigma(y)]=h(x)I\sigma([x,y])$$

bulunur. O halde her $x,y\in I$ için

$$h(x)I[x,y]=h(x)I\sigma([x,y])=(0)$$

dır. *Lemma 3.1.1* uygulanarak her $x\in I$ için

$$h(x)=0 \text{ veya } x\in Z(R)$$

olduğu bulunur. Böylece $I=A$ da olsa $I=B$ de olsa aynı sonuca varılır.

Yani

$$h(x)=0 \text{ veya } x\in Z(R), \quad \forall x\in I \tag{3.3}$$

dır. Şimdi de $K=\{x\in I \mid h(x)=0\}$ ve $L=\{y\in I \mid x\in Z(R)\}$ kümelerini tanımlayalım. Açıktır ki K ve L kümeleri I idealinin altgruplarıdır ve (3.3) ifadesi sayesinde $I=K\cup L$ olarak yazılır. Brauer's Trick uygulandığında $I=K$ veya $I=L$ olur. $I=K$ ise $h(I)=(0)$ dır. I, R halkasının bir ideali olduğundan $h(IR)\subset h(I)=(0)$ sağlanır. Elde edilen son ifade türev özellikleri ve $h(I)=(0)$ olması kullanılarak düzenlendiğinde her $x\in I,\ r\in R$ için $0=h(x)r+xh(r)=xh(r)$ olduğu bulunur. Yani

$$Ih(R) = (0)$$

dır. *Lemma 3.1.4* uygulandığında $h = 0$ bulunur. Ancak h sıfırdan farklı bir türev olduğundan $I = K$ olamaz. O halde $I = L$ dir. Bu ise $I \subset Z(R)$ demektir. Bu durumda her $r, s \in R,\ x \in I$ için $[r, sx] = 0$ olur. Bu ifade $I \subset Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse $0 = [r, sx] = s[r, x] + [r, s]x = [r, s]x$ bulunur. Bu ise her $r, s \in R$ için

$$[r, s]I = (0)$$

olması demektir. *Lemma 3.1.4* uygulanarak her $r, s \in R$ için $[r, s] = 0$ olduğu görülür. Bu ise R halkası değişmeli demektir.

Lemma 3.1.7. $d: R \to R$ bir (α, β)-türev ve $a \in R$ iken $ad(I) = \sigma(a)d(I) = (0)$ ve β ile σ değişmeli (veya $d(I)a = d(I)\sigma(a) = (0)$ ve α ile σ değişmeli) ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

İspat. Her $x \in I,\ r \in R$ için $ad(xr) = \sigma(a)d(xr) = 0$ dır. Bu ifade (α, β)-türev özellikleri ve hipotez uygulanarak düzenlenirse

$$0 = ad(xr) = ad(x)\alpha(r) + a\beta(x)d(r) = a\beta(x)d(r)$$

bulunur. Yani her $r \in R$ için

$$a\beta(I)d(r) = (0)$$

dır. Benzer olarak

$$0 = \sigma(a)d(xr) = \sigma(a)d(x)\alpha(r) + \sigma(a)\beta(x)d(r) = \sigma(a)\beta(x)d(r)$$

olduğundan her $r \in R$ için

$$\sigma(a)\beta(I)d(r) = (0)$$

olur. Böylece her $r \in R$ için

$$a\beta(I)d(r) = \sigma(a)\beta(I)d(r) = (0)$$

dır. Üstelik β ile σ değişmeli olduğundan $\beta(I),\ R$ halkasının sıfırdan farklı bir σ-idealidir. Böylece *Lemma 3.1.1* uygulanarak $a = 0$ veya $d = 0$ olduğu görülür.

$d(I)a = d(I)\sigma(a) = (0)$ ve α ile σ değişmeli olsun. Bu durumda her $x \in I$ ve $r \in R$ için $d(rx)a = d(rx)\sigma(a) = 0$ dır. Bu ifade (α, β)-türev özellikleri ve hipotez uygulanarak düzenlenirse her $x \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = d(rx)a = d(r)\alpha(x)a + \beta(r)d(x)a = d(r)\alpha(x)a$$

ve

$$0 = d(rx)\sigma(a) = d(r)\alpha(x)\sigma(a) + \beta(r)d(x)\sigma(a) = d(r)\alpha(x)\sigma(a)$$

bulunur. Yani her $r \in R$ için

$$d(r)\alpha(I)a = d(r)\alpha(I)\sigma(a) = ((0)$$

olur. α ile σ değişmeli olduğundan $\alpha(I)$, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-idealidir.

Böylece *Lemma 3.1.1* uygulanarak

$$a = 0 \text{ veya } d = 0$$

olduğu görülür.

Lemma 3.1.8. d, R halkasının bir (α,β)-türevi olmak üzere $d(I) = (0)$ ve α ile σ değişmeli (veya β ile σ değişmeli) ise $d = 0$ dır.

İspat. Kabul edelim ki α ile σ değişmeli olsun. (α,β)-türev özellikleri kullanılarak her $x \in I$ ve $r \in R$ için $0 = d(rx) = d(r)\alpha(x) + \beta(r)d(x) = d(r)\alpha(x)$ bulunur. Bu ise her $r \in R$ için

$$d(r)\alpha(I) = (0)$$

olması demektir. α ile σ değişmeli iken $\alpha(I)$, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-ideali olduğundan *Lemma 3.1.4* uygulanarak $d = 0$ olduğu görülür.

Kabul edelim ki β ile σ değişmeli olsun. (α,β)-türev özellikleri kullanılarak her $x \in I$, $r \in R$ için $0 = d(xr) = d(x)\alpha(r) + \beta(x)d(r) = \beta(x)d(r)$ olduğu bulunur. Bu ise her $r \in R$ için

$$\beta(I)d(r) = (0)$$

olması demektir. β ile σ değişmeli iken $\beta(I)$, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-idealidir. O halde *Lemma 3.1.4* uygulanarak $d = 0$ olduğu bulunur.

Teorem 3.1.9. R karakteristiği ikiden farklı olan bir σ-asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir (α,β)-türevi ve β ile σ değişmeli olmak üzere $d(I) \subset C_{\alpha,\beta}$ ise R değişmelidir.

İspat. I, R halkasının bir ideali olduğundan, hipotezden, her $x \in I$ için $d(x^2) \in C_{\alpha,\beta}$ olur. Öte yandan $d(x) \in C_{\alpha,\beta}$ olduğundan $d(x)\alpha(x) = \beta(x)d(x)$ dır. $d(x^2) \in C_{\alpha,\beta}$ ifadesi (α,β)-türev özellikleri ve $d(x)\alpha(x) = \beta(x)d(x)$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$d(x^2) = d(x)\alpha(x) + \beta(x)d(x) = \beta(x)d(x) + \beta(x)d(x) = 2\beta(x)d(x) \in C_{\alpha,\beta}$$

olduğu bulunur. Halkanın karakteristiği ikiden farklı olduğundan her $x \in I$ için $\beta(x)d(x) \in C_{\alpha,\beta}$ dır. Bu durumda her $r \in R$ için $[\beta(x)d(x), r]_{\alpha,\beta} = 0$ olur. Elde edilen eşitlik $d(x) \in C_{\alpha,\beta}$ olması ve (α,β)-komütatör özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde

$$0 = [\beta(x)d(x), r]_{\alpha,\beta} = \beta(x)[d(x), r]_{\alpha,\beta} + \beta([x,r])d(x) = \beta([x,r])d(x)$$

bulunur. Bu ise her $x \in I$, $r \in R$ için $\beta([x,r])d(x) = 0$ olması demektir. Keyfi bir $s \in R$ için son ifade sağdan $\alpha(s)$ ile çarpılır ve elde edilen ifade $d(x) \in C_{\alpha,\beta}$ olması kullanılarak düzenlenirse her $x \in I$ ve $r, s \in R$ için

$$\beta([x,r])\beta(s)d(x) = 0$$

elde edilir. Yani her $x \in I$ ve $r \in R$ için

$$\beta([x,r])\beta(R)d(x) = (0)$$

dır. β bir örten dönüşüm olduğundan

$$\beta([x,r])Rd(x) = (0), \quad \forall x \in I,\ r \in R \tag{3.4}$$

olur.

Kabul edelim ki $x \in I \cap S_\sigma(R)$ olsun. (3.4) nolu eşitlikte r yerine $\sigma(r)$ yazılır ve elde edilen eşitlik β ile σ nın değişmeli olması kullanılarak düzenlenirse her $r \in R$ için $\sigma\big(\beta([x,r])\big)Rd(x) = (0)$ bulunur. Elde edilen bu ifade (3.4) eşitliği ile birlikte düşünüldüğünde

$$\beta([x,r])Rd(x) = \sigma\big(\beta([x,r])\big)Rd(x) = (0), \quad \forall r \in R,\ x \in I \cap S_\sigma(R)$$

olduğu görülür. Halkanın σ-asallığı kullanılarak

$$x \in Z(R) \text{ veya } d(x) = 0, \quad \forall x \in I \cap S_\sigma(R)$$

sonucuna varılır.

Keyfi bir $y \in I$ alalım. Bu durumda $y - \sigma(y) \in I \cap S_\sigma(R)$ olduğundan

$$d\big(y - \sigma(y)\big) = 0 \text{ veya } y - \sigma(y) \in Z(R), \quad \forall y \in I \tag{3.5}$$

sağlanır. $A = \{y \in I \mid d\big(y - \sigma(y)\big) = 0\ \}$ ve $B = \{y \in I \mid y - \sigma(y) \in Z(R)\}$ olsun. A ve B kümelerinin I idealinin birer altgrubu olduğu ve $I = A \cup B$ olarak yazıldığı açıktır. Böylece Brauer's Trick den $I = A$ veya $I = B$ dir. İlk olarak $I = A$ olsun. Bu durumda her $y \in I$ için $d(y) = d(\sigma(y))$ dir. (3.4) nolu eşitlikte x yerine $\sigma(x),\ r$ yerine $\sigma(r)$ yazılır ve elde edilen ifade β ile σ nın değişmeli ve her $x \in I$ için $d(x) = d(\sigma(x))$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$(0) = \beta([\sigma(x),\sigma(r)])Rd(\sigma(x)) = \beta\big(\sigma([x,r])\big)Rd(x) = \sigma\big(\beta([x,r])\big)Rd(x)$$

bulunur. Yani her $x \in I,\ r \in R$ için

$$\sigma\big(\beta([x,r])\big)Rd(x) = (0)$$

dır. Son ifade (3.4) ile beraber düşünüldüğünde

$$\beta([x,r])Rd(x) = \sigma\big(\beta([x,r])\big)Rd(x) = (0)$$

olur. R halkasının σ-asallığı kullanılarak her $x \in I$ için $\beta([x,r]) = 0$ veya $d(x) = 0$ elde edilir. β bir otomorfizma olduğundan her $x \in I$ için $x \in Z(R)$ veya $d(x) = 0$ olur. Yani

$I = A$ iken her $x \in I$ için

$$x \in Z(R) \text{ veya } d(x) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi de $I = B$ olsun. Bu durumda her $y \in I$ için $y - \sigma(y) \in Z(R)$ dir. Yani her $r \in R$, $y \in I$ için $[r, y] = [r, \sigma(y)]$ sağlanır. (3.4) nolu eşitlikte r yerine $\sigma(r)$ yazılıp elde edilen ifade β ile σ nın değişmeli olması ve $[r, x] = [r, \sigma(x)]$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}(0) &= \beta([x, \sigma(r)])Rd(x) = \beta([\sigma(x), \sigma(r)])Rd(x)\\ &= \beta\big(\sigma([x, r])\big)Rd(x) = \sigma\big(\beta([x, r])\big)Rd(x)\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise her $r \in R$, $x \in I$ için $\sigma\big(\beta([x, r])\big)Rd(x) = (0)$ olması demektir. Son ifade (3.4) ifadesi ile beraber düşünüldüğünde

$$\beta([x, r])Rd(x) = \sigma\big(\beta([x, r])\big)Rd(x) = (0)$$

olur. Halkanın σ-asallığı kullanılarak her $x \in I$ için $\beta([x, r]) = 0$ veya $d(x) = 0$ elde edilir. β bir otomorfizma olduğundan her $x \in I$ için

$$x \in Z(R) \text{ veya } d(x) = 0$$

dır. Böylece $I = A$ da olsa $I = B$ de olsa aynı sonuca varılır. Yani

$$d(x) = 0 \text{ veya } x \in Z(R), \quad \forall x \in I \tag{3.6}$$

dır. $K = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ ve $L = \{y \in I \mid x \in Z(R)\}$ kümelerini tanımlayalım. Açıktır ki K ve L kümeleri I idealinin altgruplarıdır ve (3.6) ifadesinden $I = K \cup L$ dir. Brauer's Trick uygulanarak $I = K$ veya $I = L$ olduğu görülür. $I = K$ ise $d(I) = (0)$ olur. Üstelik β ile σ değişmeli olduğundan *Lemma 3.1.8* uygulanarak $d = 0$ bulunur. Ancak d sıfırdan farklı bir (α, β)-türev olduğundan $I = L$ dir. Bu ise $I \subset Z(R)$ demektir. *Lemma 3.1.6* nın ispatının son kısmında olduğu gibi R halkasının değişmeli olduğu bulunur.

Lemma 3.1.10. R karakteristiği ikiden farklı olan bir σ-asal halka, β ile σ değişmeli, d, R halkasının bir (α, β)-türevi ve h, R halkasının $h\sigma = \pm\sigma h$ olan bir türevi olmak üzere $dh(I) = (0)$ ve $h(I) \subset I$ ise $d = 0$ veya $h = 0$ dır.

İspat. Keyfi $x, y \in I$ için $dh(xy) = 0$ dır. Bu eşitlik türev ve (α, β)-türev tanımları kullanılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}0 &= dh(xy) = d\big(h(xy)\big) = d\big(h(x)y + xh(y)\big) = d(h(x)y) + d\big(xh(y)\big)\\ &= \big(dh(x)\big)\alpha(y) + \beta\big(h(x)\big)d(y) + d(x)\alpha\big(h(y)\big) + \beta(x)\big(dh(y)\big)\\ &= \beta\big(h(x)\big)d(y) + d(x)\alpha\big(h(y)\big)\end{aligned}$$

bulunur. Yani her $x, y \in I$ için

$$\beta\big(h(x)\big)d(y) + d(x)\alpha\big(h(y)\big) = 0$$

dır. $h(I) \subset I$ olduğundan son ifadede x yerine $h(x)$ yazılır ve elde edilen ifade hipotez kullanılarak düzenlenirse

$$0 = \beta\big(h^2(x)\big)d(y) + \big(dh(x)\big)\alpha\big(h(y)\big) = \beta\big(h^2(x)\big)d(y)$$

bulunur. Bu ise her $x, y \in I$ için

$$\beta\big(h^2(x)\big)d(y) = 0$$

olması demektir. Son ifadede x yerine $\sigma(x)$ yazılıp elde edilen ifade $h\sigma = \pm\sigma h$ ve β ile σ nın değişmeli olması kullanılarak düzenlenirse her $x, y \in I$ için

$$\sigma\Big(\beta\big(h^2(x)\big)\Big)d(y) = 0$$

olduğu görülür. Yani her $x \in I$ için

$$\beta\big(h^2(x)\big)d(I) = \sigma\Big(\beta\big(h^2(x)\big)\Big)d(I) = (0)$$

dır. β ile σ değişmeli olduğundan *Lemma 3.1.7* uygulanarak $\beta\big(h^2(I)\big) = (0)$ veya $d = 0$ olduğu bulunur. $d \neq 0$ iken $\beta\big(h^2(I)\big) = (0)$ dır. β $1-1$ ve örten bir dönüşüm olduğundan $h^2(I) = (0)$ olur. *Lemma 3.1.2* uygulanarak $h = 0$ olduğu bulunur. Böylece $d = 0$ veya $h = 0$ dır.

Lemma 3.1.11. R karakteristiği ikiden farklı olan bir σ-asal halka, β ile σ değişmeli, d, R halkasının sıfırdan farklı bir (α,β)-türevi olmak üzere $a \in I \cap S_\sigma(R)$ ve $[d(I), a]_{\alpha,\beta} = (0)$ ise $a \in Z(R)$ dir.

İspat. Keyfi $x, y \in I$ için $[d([x,y]), a]_{\alpha,\beta} = 0$ dır. d bir (α,β)-türev olduğundan her $x, y \in I$ için $d([x,y]) = [d(x), y]_{\alpha,\beta} - [d(y), x]_{\alpha,\beta}$ sağlanır. (α,β)-komütatör özellikleri uygulanarak

$$\begin{aligned}\big[[d(y),x]_{\alpha,\beta}, a\big]_{\alpha,\beta} &= \big[[d(x),y]_{\alpha,\beta} - d([x,y]), a\big]_{\alpha,\beta} \\ &= \big[[d(x),y]_{\alpha,\beta}, a\big]_{\alpha,\beta} - [d([x,y]), a]_{\alpha,\beta} = \big[[d(x),y]_{\alpha,\beta}, a\big]_{\alpha,\beta}\end{aligned}$$

bulunur. Yani her $x, y \in I$ için

$$\big[[d(y),x]_{\alpha,\beta}, a\big]_{\alpha,\beta} = \big[[d(x),y]_{\alpha,\beta}, a\big]_{\alpha,\beta}$$

dır. Bu eşitliğe *genelleştirilmiş Jacobi özdeşliği* uygulanarak

$$\big[[d(x),y]_{\alpha,\beta}, a\big]_{\alpha,\beta} = \big[[d(x),a]_{\alpha,\beta}, y\big]_{\alpha,\beta} + \big[d(x), [y,a]\big]_{\alpha,\beta}$$

elde edilir. Elde edilen eşitlik $[d(x), a]_{\alpha,\beta} = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde her $x, y \in I$ için

$$\left[[d(y),x]_{\alpha,\beta},a\right]_{\alpha,\beta}=\left[d(x),[y,a]\right]_{\alpha,\beta}$$

bulunur. x yerine a yazılır ve elde edilen ifade hipotez kullanılarak düzenlenirse her $y\in I$ için

$$\left[d(a),[y,a]\right]_{\alpha,\beta}=0$$

olur. $f_{d(a)}:R\to R$, her $r\in R$ için $f_{d(a)}(r)=[d(a),r]_{\alpha,\beta}$ olacak biçimde tanımlanan $d(a)$ ile belirlenen bir (α,β)-iç türev ve $g_a:R\to R$, her $r\in R$ için $g_a(r)=[r,a]$ olacak biçimde tanımlanan a ile belirlenen bir iç türev olsun. $\left[d(a),[y,a]\right]_{\alpha,\beta}=0$ eşitliği $f_{d(a)}$ ve g_a fonksiyonları kullanılarak düzenlenirse $\left(f_{d(a)}g_a\right)(I)=(0)$ olur. $a\in I\cap S_\sigma(R)$ olduğu için $g_a\sigma=\pm\sigma g_a$ ve $g_a(I)\subset I$ sağlanır. Böylece *Lemma 3.1.10* uygulanarak

$$d(a)\in C_{\alpha,\beta} \text{ veya } a\in Z(R)$$

olduğu bulunur. Kabul edelim ki $a\notin Z(R)$ olsun. Bu durumda $d(a)\in C_{\alpha,\beta}$ dır. Her $x\in I$ için $d([x,a])=[d(x),a]_{\alpha,\beta}-[d(a),x]_{\alpha,\beta}$ olması kullanılarak

$$d([x,a])=[d(x),a]_{\alpha,\beta}$$

elde edilir. $[d(x),a]_{\alpha,\beta}=0$ olduğundan her $x\in I$ için $d([x,a])=0$ sonucuna ulaşılır. Yani

$$d([I,a])=(0) \tag{3.7}$$

olur. Öte yandan her $x,y\in I$ için $[d(xy),a]_{\alpha,\beta}=0$ ifadesi (α,β)-türev, (α,β)-komütatör özellikleri ve hipotez kullanılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}0&=[d(xy),a]_{\alpha,\beta}=[d(x)\alpha(y)+\beta(x)d(y),a]_{\alpha,\beta}\\&=[d(x)\alpha(y),a]_{\alpha,\beta}+[\beta(x)d(y),a]_{\alpha,\beta}\\&=[d(x),a]_{\alpha,\beta}\alpha(y)+d(x)\alpha([y,a])+\beta([x,a])d(y)+\beta(x)[d(y),a]_{\alpha,\beta}\\&=d(x)\alpha([y,a])+\beta([x,a])d(y)\end{aligned}$$

bulunur. Yani her $x,y\in I$ için

$$d(x)\alpha([y,a])+\beta([x,a])d(y)=0$$

dır. Son eşitlikte x yerine $[x,a]$ yazılır ve elde edilen ifade (3.7) kullanılarak düzenlenirse

$$0=d([x,a])\alpha([y,a])+\beta\left(\left[[x,a],a\right]\right)d(y)=\beta\left(\left[[x,a],a\right]\right)d(y)$$

elde edilir. Bu ise

$$\beta\left(\left[[x,a],a\right]\right)d(I)=(0),\quad \forall x\in I$$

olması demektir. Son eşitlikte x yerine $\sigma(x)$ yazılıp elde edilen ifade $a\in S_\sigma(R)$ ve β ile σ

nın değişmeli olması kullanılarak düzenlenirse

$$\sigma(\ \beta([[x,a],a]\ ))d(I) = (0), \quad \forall x \in I$$

bulunur. Son iki eşitlik birlikte düşünüldüğünde

$$\beta\big([[x,a],a]\big)d(I) = \sigma(\ \beta([[x,a],a]\ ))d(I) = (0), \quad \forall x \in I$$

olur. β, σ ile değişmeli bir otomorfizma olduğundan *Lemma 3.1.7* uygulanarak her $x \in I$ için

$$\beta\big([[x,a],a]\big) = 0 \text{ veya } d = 0$$

elde edilir. d sıfırdan farklı bir türev olduğundan her $x \in I$ için $\beta\big([[x,a],a]\big) = 0$ bulunur. β $1-1$ bir dönüşüm olduğundan her $x \in I$ için

$$\big[[x,a],a\big] = 0$$

dır. Bu durumda $g_a{}^2(I) = (0)$ dır. Böylece *Lemma 3.1.10* uygulanarak $a \in Z(R)$ olduğu bulunur. Oysa ki $a \notin Z(R)$ idi. Çelişkinin nedeni kabuldür. O halde $a \in Z(R)$ dir.

Teorem 3.1.12. R karakteristiği ikiden farklı olan bir σ-asal halka, α ve β, σ ile değişmeli, d, R halkasının sıfırdan farklı bir (α,β)-türevi olmak üzere $a \in I \cap S_\sigma(R)$ ve $[d(I),a]_{\alpha,\beta} \subset C_{\alpha,\beta}$ ise $a \in Z(R)$ dir.

İspat. Hipotezden $[d(a^2),a]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$ dır. Bu ifade (α,β)-türev ve (α,β)-komütatör özellikleri uygulanarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}[d(a^2),a]_{\alpha,\beta} &= [d(a)\alpha(a) + \beta(a)a, a]_{\alpha,\beta} \\ &= [d(a)\alpha(a),a]_{\alpha,\beta} + [\beta(a)d(a),a]_{\alpha,\beta} \\ &= [d(a),a]_{\alpha,\beta}\alpha(a) + d(a)\alpha([a,a]) + \beta(a)[d(a),a]_{\alpha,\beta} + \\ &\quad \beta([a,a])d(a) = [d(a),a]_{\alpha,\beta}\alpha(a) + \beta(a)[d(a),a]_{\alpha,\beta}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$[d(a),a]_{\alpha,\beta}\alpha(a) + \ \beta(a)[d(a),a]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$$

olur. Öte yandan $[d(a),a]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$ olduğundan $\big[[d(a),a]_{\alpha,\beta},a\big]_{\alpha,\beta} = 0$ dır. Bu ise

$$[d(a),a]_{\alpha,\beta}\alpha(a) = \ \beta(a)[d(a),a]_{\alpha,\beta}$$

olması demektir. Böylece

$$[d(a),a]_{\alpha,\beta}\alpha(a) + \beta(a)[d(a),a]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$$

ve

$$[d(a),a]_{\alpha,\beta}\alpha(a) = \ \beta(a)[d(a),a]_{\alpha,\beta}$$

olması birlikte kullanıldığında $2\beta(a)[d(a),a]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$ elde edilir. Halkanın karakteristiği ikiden farklı olduğundan

$$\beta(a)[d(a),a]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$$

olur. $a \in I \cap S_\sigma(R)$ ve β ile σ değişmeli olduğundan $\beta(a) \in S_\sigma(R)$ dir. $\beta(a)[d(a),a]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$, $[d(a),a]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$ ve $\beta(a) \in S_\sigma(R)$ olması beraber düşünüldüğünde *Lemma 3.1.5* (i) uygulanarak

$$a \in Z(R) \text{ veya } [d(a),a]_{\alpha,\beta} = 0$$

olduğu bulunur.

Kabul edelim ki $a \notin Z(R)$ olsun. Bu durumda $[d(a),a]_{\alpha,\beta} = 0$ dır. Öte yandan hipotez kullanılırsa her $x \in I$ için $[d([a,x]),a]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$ olur. Son ifade *Özellik 2.47* ve (α,β)-komütatör özellikleri uygulanarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}[d([a,x]),a]_{\alpha,\beta} &= \left[[d(a),x]_{\alpha,\beta} - [d(x),a]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} \\ &= \left[[d(a),x]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} - \left[[d(x),a]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\left[[d(a),x]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} - \left[[d(x),a]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}, \quad \forall x \in I$$

dir. $[d(x),a]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$ olduğundan $\left[[d(x),a]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} = 0$ olur. O halde

$$\left[[d(a),x]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}, \quad \forall x \in I$$

elde edilir. Son ifadede x yerine ax yazılıp elde edilen ifade $[d(a),a]_{\alpha,\beta} = 0$ olması ve (α,β)-komütatör özellikleri uygulanarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}\left[[d(a),ax]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} &= \left[\beta(a)[d(a),x]_{\alpha,\beta} + [d(a),a]_{\alpha,\beta}\alpha(x), a\right]_{\alpha,\beta} \\ &= \left[\beta(a)[d(a),x]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} + \left[[d(a),a]_{\alpha,\beta}\alpha(x), a\right]_{\alpha,\beta} \\ &= \left[\beta(a)[d(a),x]_{\alpha,}, a\right]_{\alpha,\beta} \\ &= \beta(a)\left[[d(a),x]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} + \beta([a,a])[d(a),x]_{\alpha,\beta} \\ &= \beta(a)\left[[d(a),x]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta}\end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$\beta(a)\left[[d(a),x]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}, \quad \forall x \in I$$

dır. $a \in I \cap S_\sigma(R)$ ve β ile σ değişmeli olduğundan $\beta(a) \in S_\sigma(R)$ dir. $\beta(a)\left[[d(a),x]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$, $\left[[d(a),x]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$ ve $\beta(a) \in S_\sigma(R)$ olması beraber düşünüldüğünde *Lemma 3.1.5* (i) uygulanarak $a \in Z(R)$ veya her $x \in I$ için $\left[[d(a),x]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} = 0$ olduğu bulunur. Bu eşitlik *genelleştirilmiş Jacobi özdeşliği* uygulanarak düzenlendiğinde

$$0 = \left[[d(a),x]_{\alpha,\beta}, a\right]_{\alpha,\beta} = \left[[d(a),a]_{\alpha,\beta}, x\right]_{\alpha,\beta} + \left[d(a),[x,a]\right]_{\alpha,\beta} = \left[d(a),[x,a]\right]_{\alpha,\beta}$$

bulunur. $[d(a),a]_{\alpha,\beta}=0$ olması kullanıldığında ise $\left[d(a),[x,a]\right]_{\alpha,\beta}=0$ olduğu görülür. Böylece

$$\left[d(a),[x,a]\right]_{\alpha,\beta}=0, \quad \forall x\in I$$

olur. $f_{d(a)}\colon R\to R$, her $r\in R$ için $f_{d(a)}(r)=[d(a),r]_{\alpha,\beta}$ olacak biçimde tanımlanan $d(a)$ ile belirlenen bir (α,β)-iç türev ve $g_a\colon R\to R$, her $r\in R$ için $g_a(r)=[r,a]$ olacak biçimde tanımlanan a ile belirlenen bir iç türev olsun. $\left[d(a),[x,a]\right]_{\alpha,\beta}=0$ eşitliği $f_{d(a)}$, g_a fonksiyonları kullanılarak düzenlendiğinde $\left(f_{d(a)}g_a\right)(I)=(0)$ olduğu görülür. $a\in I\cap S_\sigma(R)$ olduğu için $g_a\sigma=\pm\sigma g_a$ ve $g_a(I)\subset I$ sağlanır. Böylece *Lemma 3.1.10* uygulanarak

$$d(a)\in C_{\alpha,\beta} \tag{3.8}$$

olduğu bulunur. Her $x\in I$ için $[d(ax),a]_{\alpha,\beta}\in C_{\alpha,\beta}$ olduğundan (α,β)-türev, (α,β)-komütatör özellikleri ve $[d(a),a]_{\alpha,\beta}=0$ olması kullanılarak

$$\begin{aligned}
[d(ax),a]_{\alpha,\beta} &= [d(a)\alpha(x)+\beta(a)d(x),a]_{\alpha,\beta}\\
&= [d(a)\alpha(x),a]_{\alpha,\beta}+[\beta(a)d(x),a]_{\alpha,\beta}\\
&= [d(a),a]_{\alpha,\beta}\alpha(x)+d(a)\alpha([x,a])\\
&\quad +\beta([a,a])d(x)+\beta(a)[d(x),a]_{\alpha,\beta}\\
&= d(a)\alpha([x,a])+\beta(a)[d(x),a]_{\alpha,\beta}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece her $x\in I$ için

$$d(a)\alpha([x,a])+\beta(a)[d(x),a]_{\alpha,\beta}\in C_{\alpha,\beta} \tag{3.9}$$

olur. Bu durumda $\left[d(a)\alpha([x,a])+\beta(a)[d(x),a]_{\alpha,\beta},a\right]_{\alpha,\beta}=0$ dır. Bu ifade $[d(a),a]_{\alpha,\beta}=0$ olması ve (α,β)-komütatör özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
0 &= \left[d(a)\alpha([x,a])+\beta(a)[d(x),a]_{\alpha,\beta},a\right]_{\alpha,\beta}\\
&= [d(a)\alpha([x,a]),a]_{\alpha,\beta}+\left[\beta(a)[d(x),a]_{\alpha,\beta},a\right]_{\alpha,\beta}\\
&= [d(a),a]_{\alpha,\beta}\alpha([x,a])+d(a)\alpha\left([[x,a],a]\right)+\beta(a)\left[[d(x),a]_{\alpha,\beta},a\right]_{\alpha,\beta}\\
&\quad +\beta([a,a])[d(x),a]_{\alpha,\beta}\\
&= d(a)\alpha\left([[x,a],a]\right)+\beta(a)\left[[d(x),a]_{\alpha,\beta},a\right]_{\alpha,\beta}
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Yani

$$d(a)\alpha\big([[x,a],a]\big)+\beta(a)\big[[d(x),a]_{\alpha,\beta},a\big]_{\alpha,\beta}=0,\quad \forall x\in I$$

olur. $[d(x),a]_{\alpha,\beta}\in C_{\alpha,\beta}$ olduğundan $\big[[d(x),a]_{\alpha,\beta},a\big]_{\alpha,\beta}=0$ dır. Yukarıdaki eşitlik $\big[[d(x),a]_{\alpha,\beta},a\big]_{\alpha,\beta}=0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$d(a)\alpha\big([[x,a],a]\big)=0,\quad \forall x\in I$$

elde edilir. Bu durumda keyfi bir $s\in R$ için $d(a)\alpha\big([[x,a],a]\big)=0$ eşitliği soldan $\beta(s)$ ile çarpılır ve elde edilen eşitlik (3.8) ifadesi kullanılarak düzenlenirse her $x\in I,\ s\in R$ için $d(a)\alpha(s)\alpha\big([[x,a],a]\big)=0$ olduğu görülür. Bu ise

$$d(a)\alpha(R)\alpha\big([[x,a],a]\big)=(0),\quad \forall x\in I$$

olması demektir. α bir örten dönüşüm olduğundan

$$d(a)R\alpha\big([[x,a],a]\big)=(0),\quad \forall x\in I$$

dır. Bu eşitlikte x yerine $\sigma(x)$ yazılır ve elde edilen ifade α ile σ nın değişmeli olması kullanılarak düzenlenirse

$$d(a)R\sigma(\alpha([[x,a],a]))=(0),\quad \forall x\in I$$

bulunur. Yani

$$d(a)R\alpha\big([[x,a],a]\big)=d(a)R\sigma(\alpha([[x,a],a]))=(0),\quad \forall x\in I$$

olur. Böylece R halkasının σ-asallığından

$$d(a)=0 \text{ veya } \alpha\big([[x,a],a]\big)=0,\quad \forall x\in I$$

dır. Eğer $d(a)\neq 0$ ise $\alpha\big([[x,a],a]\big)=0$ dır. α bir $1-1$ dönüşüm olduğundan $\big[[x,a],a\big]=0$ olur. Bu ise ${g_a}^2(I)=(0)$ olması demektir. $a\in I\cap S_\sigma(R)$ olduğu için $g_a\sigma=\pm\sigma g_a$ ve $g_a(I)\subset I$ sağlanır. Böylece *Lemma 3.1.10* uygulanarak $a\in Z(R)$ olduğu bulunur. $a\notin Z(R)$ kabulü altında devam edildiğinden çelişki elde edilir. O halde

$$d(a)=0$$

dır. (3.9) ifadesi $d(a)=0$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$\beta(a)[d(x),a]_{\alpha,\beta}\in C_{\alpha,\beta},\quad \forall x\in I$$

olduğu görülür. $a\in I\cap S_\sigma(R)$ ve β ile σ değişmeli olduğundan $\beta(a)\in S_\sigma(R)$ dir. $\beta(a)[d(x),a]_{\alpha,\beta}\in C_{\alpha,\beta}$, $[d(x),a]_{\alpha,\beta}\in C_{\alpha,\beta}$ ve $\beta(a)\in S_\sigma(R)$ olması beraber düşünüldüğünde *Lemma 3.1.5* (i) uygulanarak

$$[d(I),a]_{\alpha,\beta}=(0)$$

elde edilir. *Lemma 3.1.11* uygulandığında $a\in Z(R)$ olduğu bulunur. Oysa ki $a\notin Z(R)$ idi. Çelişkinin nedeni kabuldür. O halde $a\in Z(R)$ dir.

Teorem 3.1.13. R karakteristiği ikiden farklı olan bir σ-asal halka, β ile σ değişmeli, d, R halkasının bir (α,β)-türevi ve h, R halkasının σ ile değişmeli olan bir türevi olmak üzere $dh(I) \subset C_{\alpha,\beta}$ ve $h(I) \subset I$ ise R halkası değişmelidir.

İspat. Keyfi $x,y \in I$ için $dh([x,y]) \in C_{\alpha,\beta}$ dır. Bu ifade türev ve (α,β)-türev özellikleri, *Özellik 2.47* ve hipotez kullanılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} dh([x,y]) &= d([h(x),y] + [x,h(y)]) \\ &= d([h(x),y]) + d([x,h(y)]) \\ &= [dh(x),y]_{\alpha,\beta} - [d(y),h(x)]_{\alpha,\beta} \\ &\qquad + [d(x),h(y)]_{\alpha,\beta} - [dh(y),x]_{\alpha,\beta} \\ &= [d(x),h(y)]_{\alpha,\beta} - [d(y),h(x)]_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise

$$[d(x),h(y)]_{\alpha,\beta} - [d(y),h(x)]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}, \quad \forall x,y \in I$$

olması demektir. $h(I) \subset I$ olduğundan son ifadede y yerine $h(y)$ yazılır ve elde edilen ifade hipotez yardımıyla düzenlenirse

$$[d(I),h^2(y)]_{\alpha,\beta} \subset C_{\alpha,\beta}, \quad \forall y \in I$$

bulunur.

Öte yandan $h(I) \subset I$ ve h ile σ değişmeli olduğundan $h^2(I) \subset I \cap S_\sigma(R)$ dir. Böylece *Teorem 3.1.12* uygulanarak $h^2(I) \subset Z(R)$ olduğu görülür. Bu durumda

$$h^2([x,y]) \in Z(R), \quad \forall x,y \in I$$

olur. Bu ifade türev özellikleri, komütatör çarpım özellikleri ve $h^2(I) \subset Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} h^2([x,y]) &= h\big(h([x,y])\big) = h([h(x),y] + [x,h(y)]) \\ &= h([h(x),y]) + h([x,h(y)]) \\ &= [h^2(x),y] + [h(x),h(y)] + [h(x),h(y)] + [x,h^2(y)] \\ &= 2[h(x),h(y)] \end{aligned}$$

bulunur. Yani her $x,y \in I$ için

$$2[h(x),h(y)] \in Z(R)$$

dir. Halkanın karakteristiği ikiden farklı olduğu için

$$[h(x),h(y)] \in Z(R), \quad \forall x,y \in I$$

olur. $h(I) \subset I$ ve h ile σ değişmeli olduğundan $h(I) \subset I \cap S_\sigma(R)$ dir. *Lemma 3.1.3* uygulanarak $h(I) \subset Z(R)$ bulunur. *Lemma 3.1.6* uygulanarak R halkasının değişmeli olduğu görülür.

3.2. Involüsyonlu Halkaların Genelleştirilmiş Lie İdealleri Üzerine

R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve $U \not\subset Z(R)$ olan R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olmak üzere Bergen ve ark. (1981) yaptıkları çalışmada şu sonuçlara ulaşmıştır: (i) $[M,R] \subset U$ ancak $[M,R] \not\subset Z(R)$ olan R halkasının sıfırdan farklı bir M ideali vardır, (ii) $a,b \in R$ olmak üzere $aUb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır. Aydın ve Kandamar (1994) yaptıkları çalışmada yukarıdaki sonuçları $U \not\subset Z(R)$ ve $U \not\subset C_{\alpha,\beta}$ olan R halkasının sıfırdan farklı bir (α,β)-Lie ideali için genelleştirmişlerdir. Oukhtite ve Salhi (2008) yaptıkları çalışmada Bergen ve ark. (1981) tarafından yukarıda ispatlanan sonuçları σ-asal bir halkanın $Z(R)$ tarafından kapsanmayan sıfırdan farklı bir σ-Lie ideali üzerinde şu şekilde genelleştirmişlerdir: (i) $[M,R] \subset U$ ancak $[M,R] \not\subset Z(R)$ olan R halkasının sıfırdan farklı bir M σ-ideali vardır, (ii) $a,b \in R$ olmak üzere $aUb = \sigma(a)Ub = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Bu bölümde önce σ-(α,β)-Lie ideal tanımlanmış sonrasında Aydın ve Kandamar (1994) tarafından yukarıda ele alınan problemler σ-asal bir halkanın $Z(R)$ ve $C_{\alpha,\beta}$ tarafından kapsanmayan sıfırdan farklı bir σ-(α,β)-Lie ideali için genelleştirilmiştir.

Bu bölüm boyunca R bir halka, σ halka üzerinde bir involüsyon, $Z(R)$ halkanın merkezi, $\alpha,\ \beta: R \to R$ iki otomorfizma olarak alınacaktır.

Tanım 3.2.1. R bir halka, $\sigma,\ R$ halkası üzerinde bir involüsyon ve $\alpha,\ \beta: R \to R$ iki dönüşüm olsun. $U,\ R$ halkasının bir (α,β)-sağ-Lie ideali ve her $u \in U$ için $\sigma(u) \in U$ ise U kümesine R halkasının bir ***σ-(α,β)-sağ-Lie ideali,*** $U,\ R$ halkasının bir (α,β)-sol-Lie ideali ve her $u \in U$ için $\sigma(u) \in U$ ise U kümesine R halkasının bir ***σ-(α,β)-sol-Lie ideali*** denir. $U,\ R$ halkasının hem σ-(α,β)-sol-Lie ideali hem de σ-(α,β)-sağ-Lie ideali oluyorsa U kümesine R halkasının bir ***σ-(α,β)-Lie ideali*** denir.

Her σ-Lie ideal bir σ-(1,1)-Lie idealdir ancak tersi her zaman doğru olmayabilir. Bunu aşağıdaki örnek üzerinde görelim:

Örnek 3.2.2. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi matrisler halkası üzerinde tanımlı bilinen işlemler ile bir halkadır. Bu halka üzerinde tanımlanan $\sigma: R \to R$, $\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ dönüşüm bir involüsyondur. Böylece R bir involüsyonlu halkadır. $\alpha,\ \beta: R \to R$, $\alpha\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\beta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ tanımlı dönüşümler olmak üzere $U = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi R halkasının bir σ-(α,β)-Lie idealidir ancak bir σ-Lie ideali değildir.

Lemma 3.2.3. (Aydın, 1999, *Lemma 5*) R bir halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir (α,β)-sol Lie ideali olmak üzere $T(U)=\{c\in R \mid [R,c]_{\alpha,\beta}\subset U\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i. $T(U)$, R halkasının bir althalkasıdır.

ii. Eğer U, R halkasının (α,β)-sağ Lie ideali de oluyorsa $[R,T(U)]_{\alpha,\beta}\subset U$ ve $U\subset T(U)$ koşulunu sağlayan halkanın en büyük Lie ideali $T(U)$ dır.

Lemma 3.2.4. (Aydın ve Kandamar, 1994, *Lemma 4*) R bir halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir (α,β)-sol Lie ideali ise $R\left[\left[T(U),\alpha\big(T(U)\big)\right]\right]\subset T(U)$ ve $\left[\left[T(U),\beta\big(T(U)\big)\right]\right]R\subset T(U)$ dır.

Lemma 3.2.5. U, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-(α,β)-sol Lie ideali, β ile σ değişmeli (veya α ile σ değişmeli) olmak üzere $U\subset C_{\alpha,\beta}$ ise $U\subset Z(R)$ dir.

İspat. U bir σ-(α,β)-sol Lie ideal olduğundan keyfi $u\in U$ ve $r\in R$ için $[r\alpha(u),u]_{\alpha,\beta}\in U$ dır. Bu ifade (α,β)-komütatör özellikleri uygulanarak düzenlendiğinde

$$[r\alpha(u),u]_{\alpha,\beta}=[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha(u)+r\alpha([u,u])=[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha(u)$$

olduğu görülür. Böylece her $u\in U$, $r\in R$ için $[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha(u)\in U$ olur. O halde $U\subset C_{\alpha,\beta}$ olduğundan her $s\in R$ için $\left[[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha(u),s\right]_{\alpha,\beta}=0$ sağlanır. Bu ifade (α,β)-komütatör özellikleri uygulanarak düzenlendiğinde

$$0=\left[[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha(u),s\right]_{\alpha,\beta}=\left[[r,u]_{\alpha,\beta},s\right]_{\alpha,\beta}\alpha(u)+[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha([u,s])$$

olduğu görülür. Yani

$$\left[[r,u]_{\alpha,\beta},s\right]_{\alpha,\beta}\alpha(u)+[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha([u,s])=0$$

olur. $[r,u]_{\alpha,\beta}\in U$ ve $U\subset C_{\alpha,\beta}$ olması kullanılarak

$$[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha([u,s])=0,\quad \forall r,s\in R,u\in U$$

olduğu bulunur. $k\in R$ olmak üzere r yerine $\beta(r)k$ yazılır ve elde edilen ifade (α,β)-komütatör özellikleri uygulanarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}0&=[\beta(r)k\,,u]_{\alpha,\beta}\alpha([u,s])=\beta(r)[k\,,u]_{\alpha,\beta}\alpha([u,s])+\beta([r,u])k\alpha([u,s])\\&=\beta([r,u])k\alpha([u,s])\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\beta([r,u])R\alpha([u,s])=(0),\quad \forall\, r,s\in R,u\in U \tag{3.10}$$

olur. Kabul edelim ki $u \in U \cap S_\sigma(R)$ olsun. (3.10) ifadesinde r yerine $\sigma(r)$ yazılır ve elde edilen ifade β ile σ nın değişmeli olması kullanılarak düzenlenirse

$$(0) = \beta([\sigma(r), u])R\alpha([u, s]) = \beta(\sigma([r, u]))R\alpha([u, s]) = \sigma(\beta([r, u]))R\alpha([u, s])$$

bulunur. Böylece her $r, s \in R$ için

$$\sigma\big(\beta([r, u])\big)R\alpha([u, s]) = (0)$$

dır. Son ifade (3.10) ile birlikte düşünülürse

$$\beta([r, u])R\alpha([u, s]) = \sigma(\beta([r, u]))R\alpha([u, s]) = (0), \qquad \forall\, r, s \in R$$

olur. R halkasının σ-asallığı ve α, β dönüşümlerinin birer otomorfizma olması kullanıldığında her $u \in U \cap S_\sigma(R)$ için $u \in Z(R)$ olduğu bulunur. Bu ise

$$U \cap S_\sigma(R) \subset Z(R)$$

olması demektir.

Keyfi bir $u \in U$ alalım. Bu durumda $u - \sigma(u) \in U \cap S_\sigma(R)$ dir. $U \cap S_\sigma(R) \subset Z(R)$ olması kullanılarak her $u \in U$ için $u - \sigma(u) \in Z(R)$ olduğu görülür. Bu ise her $r \in R$ için $[r, u] = [r, \sigma(u)]$ olması demektir. (3.10) ifadesinde r yerine $\sigma(r)$ yazılıp elde edilen ifade her $r \in R$ için $[r, u] = [r, \sigma(u)]$ ve β ile σ nın değişmeli olması kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}(0) &= \beta([r, u])R\alpha([u, s]) = \beta([\sigma(r), u])R\alpha([u, s]) = \beta([\sigma(r), \sigma(u)])R\alpha([u, s]) \\ &= \beta(\sigma([r, u]))R\alpha([u, s]) = \sigma(\beta([r, u]))R\alpha([u, s])\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\beta([r, u])R\alpha([u, s]) = \sigma(\beta([r, u]))R\alpha([u, s]) = (0), \quad \forall r, s \in R,\ u \in U$$

elde edilir. β ve α birer otomorfizma olduğundan R halkasının σ-asallığı kullanılarak her $u \in U$ için $u \in Z(R)$ olduğu görülür. Bu ise $U \subset Z(R)$ demektir.

Lemma 3.2.6. U, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-(α, β)-sol Lie ideali, β ile σ değişmeli ve $a \in R$ olmak üzere $Ua = (0)$ ise $a = 0$ veya $U \subset Z(R)$ dir.

İspat. U bir σ-(α, β)-sol Lie ideal olduğundan her $r \in R,\ u \in U$ için $[r, u]_{\alpha,\beta}a = 0$ dır. Bu eşitlikte $s \in R$ olmak üzere r yerine rs yazılıp elde edilen ifade $[r, u]_{\alpha,\beta}a = 0$ olması ve (α, β)-komütatör özellikleri uygulanarak düzenlenirse

$$0 = [rs, u]_{\alpha,\beta}a = r[s, u]_{\alpha,\beta}a + [r, \beta(u)]sa = [r, \beta(u)]sa$$

bulunur. Bu ise

$$[r, \beta(u)]Ra = (0), \quad \forall r \in R,\ u \in U$$

olması demektir. Son eşitlikte r yerine $\sigma(r)$, u yerine $\sigma(u)$ yazılır ve elde edilen ifade β ile σ nın değişmeli olması kullanılarak düzenlenirse

$$(0) = \big[\sigma(r), \beta\big(\sigma(u)\big)\big]Ra = \big[\sigma(r), \sigma\big(\beta(u)\big)\big]Ra = \sigma([r, \beta(u)])Ra$$

bulunur. Yani

$$[r,\beta(u)]Ra=\sigma([r,\beta(u)])Ra=(0),\quad \forall r\in R,\ u\in U$$

olur. Böylece halkanın σ-asallığı kullanılarak $a=0$ veya $[R,\beta(U)]=(0)$ olduğu bulunur. β bir otomorfizma olduğundan $a\neq 0$ iken $U\subset Z(R)$ dir.

Lemma 3.2.7. U, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-(α,β)-sol Lie ideali, β ile σ değişmeli ve $a\in S_{\sigma}(R)$ olmak üzere $[U,a]=(0)$ ise $[\alpha(U),a]=(0)$ dır.

İspat. U bir σ-(α,β)-sol Lie ideal olduğundan keyfi $u\in U$ ve $r\in R$ için $[r\alpha(u),u]_{\alpha,\beta}=[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha(u)\in U$ dır. Bu durumda hipotez uygulanarak

$$\left[[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha(u),a\right]=0$$

olduğu görülür. Bu eşitlik (α,β)-komütatör özellikleri ve $\left[[r,u]_{\alpha,\beta},a\right]=0$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$0=\left[[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha(u),a\right]=\left[[r,u]_{\alpha,\beta},a\right]\alpha(u)+[r,u]_{\alpha,\beta}[\alpha(u),a]=[r,u]_{\alpha,\beta}[\alpha(u),a]$$

bulunur. Bu ise

$$[r,u]_{\alpha,\beta}[\alpha(u),a]=0,\quad \forall u\in U,\ r\in R$$

olması demektir. Yukarıdaki eşitlikte $s\in R$ olmak üzere r yerine $\beta(s)r$ yazılır ve elde edilen ifade (α,β)-komütatör özellikleri uygulanarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}0&=[\beta(s)r\,,u]_{\alpha,\beta}[\alpha(u),a]=\beta(s)[r\,,u]_{\alpha,\beta}[\alpha(u),a]+\beta([s,u])r[\alpha(u),a]\\&=\beta([s,u])r[\alpha(u),a]\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\beta([s,u])R[\alpha(u),a]=(0),\quad \forall u\in U,\ s\in R \tag{3.11}$$

bulunur. Kabul edelim ki $u\in U\cap S_{\sigma}(R)$ olsun. (3.11) ifadesinde s yerine $\sigma(s)$ yazılır ve elde edilen ifade β ile σ nın değişmeli olması kullanılarak düzenlenirse

$$(0)=\beta([\sigma(s),u])R[\alpha(u),a]=\beta(\sigma([s,u]))R[\alpha(u),a]=\sigma(\beta([s,u]))R[\alpha(u),a]$$

olur. Yani

$$\sigma\big(\beta([s,u])\big)R[\alpha(u),a]=(0)$$

dır. Son eşitlik (3.11) ifadesi ile birlikte düşünülürse

$$\beta([s,u])R[\alpha(u),a]=\sigma(\beta([s,u]))R[\alpha(u),a]=(0),\quad \forall u\in U,\ s\in R$$

olur. Halkanın σ-asallığı kullanıldığında her $s\in R$ için $\beta([s,u])=0$ veya $[\alpha(u),a]=0$ olduğu görülür. β bir otomorfizma olduğundan $u\in Z(R)$ veya $[\alpha(u),a]=0$ dır. Bu ise her iki durumda da $[\alpha(u),a]=0$ olması demektir. Yani

$$[\alpha(u), a] = 0, \quad \forall u \in U \cap S_\sigma(R)$$

elde edilir. Keyfi bir $u \in U$ için $u - \sigma(u) \in U \cap S_\sigma(R)$ dir. Böylece $\left[\alpha\big(u - \sigma(u)\big), a\right] = 0$ olur. Yani her $u \in U$ için $[\alpha(u), a] = \left[\alpha\big(\sigma(u)\big), a\right]$ dır. (3.11) ifadesinde s yerine $\sigma(s)$, u yerine $\sigma(u)$ yazılır ve elde edilen ifade β ile σ nın değişmeli olması kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}(0) &= \beta([\sigma(s), \sigma(u)])R\left[\alpha\big(\sigma(u)\big), a\right] = \beta\big(\sigma([s,u])\big)R[\alpha(u), a] \\ &= \sigma(\beta([s,u]))R[\alpha(u), a]\end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$\sigma(\beta([s,u]))R[\alpha(u), a] = (0), \quad \forall u \in U,\ s \in R$$

dır. Son eşitlik (3.11) ifadesi ile birlikte düşünüldüğünde

$$\beta([s,u])R[\alpha(u), a] = \sigma(\beta([s,u]))R[\alpha(u), a] = (0), \quad \forall u \in U,\ s \in R$$

olur. R halkasının σ-asallığı kullanılarak her $u \in U$ için

$$\beta([s,u]) = 0 \text{ veya } [\alpha(u), a] = 0$$

olduğu görülür. β bir otomorfizma olduğundan her $u \in U$ için

$$u \in Z(R) \text{ veya } [\alpha(u), a] = 0$$

olur. Böylece her iki durumda da her $u \in U$ için $[\alpha(u), a] = 0$ sağlanır. Yani

$$[\alpha(U), a] = (0)$$

dır.

Teorem 3.2.8. R karakteristiği ikiden farklı bir σ-asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-(α, β)-Lie ideali, β ile σ değişmeli olmak üzere $a \in S_\sigma(R)$ ve $[U, a] = (0)$ ise $a \in Z(R)$ veya $U \subset Z(R)$ dir.

İspat. U bir σ-(α, β)-Lie ideal olduğundan *Lemma 3.2.3* uygulanarak

$$T(U) = \left\{c \in R \mid [R, c]_{\alpha,\beta} \subset U\right\}$$

kümesinin R halkasının bir Lie ideali ve $U \subset T(U)$ olduğu bulunur. $T(U)$ bir Lie ideal olduğundan

$$[R, U] \subset [R, T(U)] \subset T(U)$$

sağlanır. Son ifade ve $T(U)$ kümesinin tanımı beraber düşünüldüğünde

$$\big[R, [R, U]\big]_{\alpha,\beta} \subset [R, T(U)]_{\alpha,\beta} \subset U$$

olduğu görülür. Böylece hipotez uygulanarak $\left[\big[R, [R, U]\big]_{\alpha,\beta}, a\right] = (0)$ bulunur. Bu durumda keyfi $r, s \in R$ ve $u \in U$ için $\left[\big[r, [s, u]\big]_{\alpha,\beta}, a\right] = 0$ dır. Son eşitlikte r yerine ra yazılıp elde edilen ifade komütatör çarpım özellikleri ve $\left[\big[r, [s, u]\big]_{\alpha,\beta}, a\right] = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$0 = \left[[ra,[s,u]]_{\alpha,\beta}, a\right] = \left[[r,[s,u]]_{\alpha,\beta}a + r[a,\alpha([s,u])], a\right]$$

$$= \left[[r,[s,u]]_{\alpha,\beta}a, a\right] + [r[a,\alpha([s,u])], a]$$

$$= [r,[s,u]]_{\alpha,\beta}[a,a] + \left[[r,[s,u]]_{\alpha,\beta}, a\right]a$$

$$+r\left[[a,\alpha([s,u])], a\right] + [r,a][a,\alpha([s,u])]$$

$$= r\left[[a,\alpha([s,u])], a\right] + [r,a][a,\alpha([s,u])]$$

bulunur. Yani

$$r\left[[a,\alpha([s,u])], a\right] + [r,a][a,\alpha([s,u])] = 0, \quad \forall r,s \in R,\ u \in U$$

olur. Bu ifadede $m \in R$ olmak üzere r yerine rm yazılıp elde edilen ifade komütatör çarpım özellikleri ve son elde edilen eşitlik yardımıyla düzenlenirse

$$0 = rm\left[[a,\alpha([s,u])], a\right] + [rm,a][a,\alpha([s,u])]$$

$$= rm\left[[a,\alpha([s,u])], a\right] + r[m,a][a,\alpha([s,u])] + [r,a]m[a,\alpha([s,u])]$$

$$= r\left(m\left[[a,\alpha([s,u])], a\right] + [m,a][a,\alpha([s,u])]\right) + [r,a]m[a,\alpha([s,u])]$$

$$= [r,a]m[a,\alpha([s,u])]$$

bulunur. Bu ise

$$[r,a]R[a,\alpha([s,u])] = (0), \quad \forall r,s \in R,\ u \in U$$

olması demektir. r yerine $\sigma(r)$ yazılır ve elde edilen ifade $a \in S_\sigma(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$\sigma([r,a])R[a,\alpha([s,u])] = (0), \quad \forall r,s \in R,\ u \in U$$

bulunur. Son iki eşitlik beraber düşünülürse

$$[r,a]R[a,\alpha([s,u])] = \sigma([r,a])R[a,\alpha([s,u])] = (0), \quad \forall r,s \in R,\ u \in U$$

olduğu görülür. R halkasının σ-asal olması kullanılarak her $s \in R,\ u \in U$ için

$$a \in Z(R) \text{ veya } [a,\alpha([s,u])] = 0$$

elde edilir. Böylece her $s \in R,\ u \in U$ için $[a,\alpha([s,u])] = 0$ olur. α bir homomorfizma olduğundan her $s \in R,\ u \in U$ için

$$0 = [a,\alpha([s,u])] = \left[a,[\alpha(s),\alpha(u)]\right]$$

olur. Yani her $u \in U$ için

$$\left[a,[\alpha(R),\alpha(u)]\right] = (0)$$

dır. α bir örten dönüşüm olduğundan

$$\left[[R,\alpha(u)], a\right] = (0), \forall u \in U$$

olduğu görülür. Son ifade *Jacobi özdeşliği* uygulanarak düzenlendiğinde her $r \in R$ için

$$0 = \big[[r,\alpha(u)],a\big] = \big[[r,a],\alpha(u)\big] + \big[r,[\alpha(u),a]\big]$$

sağlanır. Yani her $r \in R,\ u \in U$ için

$$\big[[r,a],\alpha(u)\big] + \big[r,[\alpha(u),a]\big] = 0$$

dır. Öte yandan $[U,a] = (0)$ olduğundan *Lemma 3.2.7* uygulanarak $[\alpha(U),a] = (0)$ olduğu bulunur. $\big[[r,a],\alpha(u)\big] + \big[r,[\alpha(u),a]\big] = 0$ eşitliği $[\alpha(u),a] = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde her $r \in R,\ u \in U$ için $\big[[r,a],\alpha(u)\big] = 0$ elde edilir. Böylece her $u \in U$ için

$$\big[[R,a],\alpha(u)\big] = (0)$$

dır. Her $r \in R$ için $I_a(r) = [r,a]$ olarak tanımlanan dönüşüm a ile belirlenen bir iç türev olmak üzere $\big[[R,a],\alpha(u)\big] = (0)$ eşitliği yeniden düzenlendiğinde her $u \in U$ için

$$\big(I_{\alpha(u)}I_a\big)(R) = (0)$$

olduğu görülür. $a \in S_\sigma(R)$ iken $I_a\sigma = \pm\sigma I_a$ olduğundan *Lemma 3.1.10* uygulanarak

$$a \in Z(R) \text{ veya } \alpha(u) \in Z(R), \quad \forall u \in U$$

olduğu görülür. α bir otomorfizma olduğundan

$$a \in Z(R) \text{ veya } U \subset Z(R)$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 3.2.9. R karakteristiği ikiden farklı bir σ-asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-(α,β)-Lie ideali ve β ile σ değişmeli olmak üzere $U \subset S_\sigma(R)$ ve $[U,U] = (0)$ ise $U \subset Z(R)$ dir.

Teorem 3.2.10. R karakteristiği ikiden farklı bir σ-asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-(α,β)-Lie ideali, β ile σ değişmeli olmak üzere $a \in S_\sigma(R)$ ve $[U,a]_{\alpha,\beta} = (0)$ ise $a \in Z(R)$ veya $U \subset Z(R)$ dir.

İspat. U bir σ-(α,β)-Lie ideal olduğundan her $r \in R,\ u \in U$ için $\big[[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha(u),a\big]_{\alpha,\beta} = 0$ olur. Elde edilen eşitlik (α,β)-komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$0 = \big[[r,u]_{\alpha,\beta},a\big]_{\alpha,\beta}\alpha(u) + [r,u]_{\alpha,\beta}\alpha([u,a])$$

bulunur. $[r,u]_{\alpha,\beta} \in U$ için $\big[[r,u]_{\alpha,\beta},a\big]_{\alpha,\beta} = 0$ olduğundan

$$[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha([u,a]) = 0, \quad \forall r \in R,\ u \in U$$

elde edilir. $s \in R$ olmak üzere r yerine $\beta(s)r$ yazılıp elde edilen ifade (α,β)-komütatör özellikleri ve $[r,u]_{\alpha,\beta}\alpha([u,a]) = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$0 = [\beta(s)r\ ,u]_{\alpha,\beta}\alpha([u,a]) = \beta(s)[r\ ,u]_{\alpha,\beta}\alpha([u,a]) + \beta([s,u])r\alpha([u,a])$$

$= \beta([s,u])r\alpha([u,a])$

bulunur. Yani

$$\beta([s,u])R\alpha([u,a]) = (0), \qquad \forall s \in R,\ u \in U \tag{3.12}$$

olur. Kabul edelim ki $u \in U \cap S_\sigma(R)$ olsun. (3.12) eşitliğinde s yerine $\sigma(s)$ yazılır ve elde edilen ifadede β ile σ nın değişmeli olması kullanılırsa

$$(0) = \beta([\sigma(s),u])R\alpha([u,a]) = \beta\big(\sigma([s,u])\big)R\alpha([u,a]) = \sigma\big(\beta([s,u])\big)R\alpha([u,a])$$

bulunur. Yani

$$\beta([s,u])R\alpha([u,a]) = \sigma\big(\beta([s,u])\big)R\alpha([u,a]) = (0), \forall s \in R, u \in U \cap S_\sigma(R)$$

elde edilir. R halkasının σ-asallığı ve α, β dönüşümlerinin birer otomorfizma olması kullanılarak her $u \in U \cap S_\sigma(R)$ için $u \in Z(R)$ veya $[u,a] = 0$ olduğu görülür. Böylece

$$[u,a] = 0, \qquad \forall u \in U \cap S_\sigma(R)$$

olur.

Keyfi bir $u \in U$ alalım. Bu durumda $u - \sigma(u) \in U \cap S_\sigma(R)$ dır. $[u - \sigma(u), a] = 0$ olur. Yani $[u,a] = [\sigma(u),a]$ dır. (3.12) ifadesinde s yerine $\sigma(s)$, u yerine $\sigma(u)$ yazılır ve elde edilen ifade β ile σ nın değişmeli olması kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}(0) &= \beta([\sigma(s),\sigma(u)])R\alpha([\sigma(u),a]) = \beta\big(\sigma([s,u])\big)R\alpha([\sigma(u),a]) \\ &= \beta\big(\sigma([s,u])\big)R\alpha([u,a]) = \sigma\big(\beta([s,u])\big)R\alpha([u,a])\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\sigma\big(\beta([s,u])\big)R\alpha([u,a]) = (0), \qquad \forall s \in R,\ u \in U$$

olur. Son eşitlik (3.12) ifadesi ile birlikte düşünülürse

$$\beta([s,u])R\alpha([u,a]) = \sigma\big(\beta([s,u])\big)R\alpha([u,a]) = (0), \qquad \forall s \in R,\ u \in U$$

olduğu görülür. Halkanın σ-asallığı kullanılarak her $s \in R$, $u \in U$ için $\beta([s,u]) = 0$ veya $\alpha([u,a]) = 0$ elde edilir. α, β birer otomorfizma olduğundan her $u \in U$ için

$$u \in Z(R) \text{ veya } [u,a] = 0$$

olur. Bu ise $[U,a] = (0)$ olması demektir. *Teorem 3.2.8* uygulanarak

$$a \in Z(R) \text{ veya } U \subset Z(R)$$

olduğu bulunur.

Sonuç 3.2.11. R karakteristiği ikiden farklı bir σ-asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-(α,β)-Lie ideali, β ile σ değişmeli olmak üzere $U \subset S_\sigma(R)$ ve $[U,U]_{\alpha,\beta} = (0)$ ise $U \subset Z(R)$ dir.

Teorem 3.2.12. R karakteristiği ikiden farklı bir σ-asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-(α,β)-Lie ideali, β ile σ değişmeli olmak üzere $a \in S_\sigma(R)$ ve $[U,a]_{\alpha,\beta} \subset C_{\alpha,\beta}$ ise $a \in Z(R)$ veya $U \subset Z(R)$ dir.

İspat. Her $r \in R,\ u \in U$ için $\left[[u,a]_{\alpha,\beta},r\right]_{\alpha,\beta} = 0$ olur. Bu eşitlik *genelleştirilmiş Jacobi özdeşliği* uygulanarak düzenlenirse her $r \in R,\ u \in U$ için

$$0 = \left[[u,a]_{\alpha,\beta},r\right]_{\alpha,\beta} = \left[[u,r]_{\alpha,\beta},a\right]_{\alpha,\beta} + \left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta}$$

olduğu bulunur. $[u,r]_{\alpha,\beta} \in U$ olduğundan, hipotezden, $\left[[u,r]_{\alpha,\beta},a\right]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$ dır. $C_{\alpha,\beta}$ kümesi toplama işlemine kapalı olduğundan

$$\left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}, \qquad \forall r \in R,\ u \in U$$

elde edilir. Bu durumda her $s \in R$ için $\left[\left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta},s\right]_{\alpha,\beta} = 0$ olur. Elde edilen eşitlikte r yerine ra yazılıp elde edilen ifade (α,β)-komütatör özellikleri ve $\left[\left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta},s\right]_{\alpha,\beta} = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\left[u,[a,ra]\right]_{\alpha,\beta},s\right]_{\alpha,\beta} = \left[[u,r[a,a]+[a,r]a]_{\alpha,\beta},s\right]_{\alpha,\beta} \\
&= \left[[u,[a,r]a]_{\alpha,\beta},s\right]_{\alpha,\beta} = \left[\beta([a,r])[u,a]_{\alpha,\beta} + \left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta}\alpha(a),s\right]_{\alpha,\beta} \\
&= \left[\beta([a,r])[u,a]_{\alpha,\beta},s\right]_{\alpha,\beta} + \left[\left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta}\alpha(a),s\right]_{\alpha,\beta} \\
&= \beta([a,r])\left[[u,a]_{\alpha,\beta},s\right]_{\alpha,\beta} + \beta\left(\left[[a,r],s\right]\right)[u,a]_{\alpha,\beta} \\
&\quad + \left[\left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta},s\right]_{\alpha,\beta}\alpha(a) + \left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta}\alpha([a,s])
\end{aligned}$$

bulunur. Yani her $r,s \in R,\ u \in U$ için

$$\begin{aligned}
&\beta([a,r])\left[[u,a]_{\alpha,\beta},s\right]_{\alpha,\beta} + \beta\left(\left[[a,r],s\right]\right)[u,a]_{\alpha,\beta} \\
&\quad + \left[\left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta},s\right]_{\alpha,\beta}\alpha(a) + \left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta}\alpha([a,s]) = 0
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade $[u,a]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$ ve $\left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$ olması kullanılarak yeniden düzenlendiğinde

$$\beta\left(\left[[a,r],s\right]\right)[u,a]_{\alpha,\beta} + \left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta}\alpha([a,s]) = 0, \qquad \forall r,s \in R,\ u \in U$$

olduğu görülür. Son eşitlikte s yerine a yazılır ve elde edilen ifade (α,β)-komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$0 = \beta\left(\left[[a,r],a\right]\right)[u,a]_{\alpha,\beta} + \left[u,[a,r]\right]_{\alpha,\beta}\alpha([a,a]) = \beta\left(\left[[a,r],a\right]\right)[u,a]_{\alpha,\beta}$$

bulunur. Yani

$$\beta\big([[a,r],a]\big)[u,a]_{\alpha,\beta}=0, \qquad \forall r\in R,\ u\in U$$

olur. Yukarıdaki eşitlik $s\in R$ olmak üzere $\alpha(s)$ ile sağdan çarpılır ve elde edilen ifade $[u,a]_{\alpha,\beta}\in C_{\alpha,\beta}$ olması kullanılarak yeniden düzenlenirse her $r,s\in R,\ u\in U$ için $\beta\big([[a,r],a]\big)\beta(s)[u,a]_{\alpha,\beta}=0$ olur.

Yani her $r\in R,\ u\in U$ için

$$\beta\big([[a,r],a]\big)\beta(R)[u,a]_{\alpha,\beta}=(0)$$

bulunur. β örten bir dönüşüm olduğundan

$$\beta\big([[a,r],a]\big)R[u,a]_{\alpha,\beta}=(0), \qquad \forall r\in R,\ u\in U$$

elde edilir. Son eşitlikte r yerine $\sigma(r)$ yazılıp elde edilen ifade $a\in S_\sigma(R)$ ve β ile σ nın değişmeli olması kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}(0)&=\beta\big([[a,r],a]\big)R[u,a]_{\alpha,\beta}=\beta\big([[a,\sigma(r)],a]\big)R[u,a]_{\alpha,\beta}\\&=\sigma\Big(\beta\big([[a,r],a]\big)\Big)R[u,a]_{\alpha,\beta}\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise

$$\beta\big([[a,r],a]\big)R[u,a]_{\alpha,\beta}=\sigma\Big(\beta\big([[a,r],a]\big)\Big)R[u,a]_{\alpha,\beta}=(0), \qquad \forall r\in R,\ u\in U$$

olması demektir. Böylelikle R halkasının σ-asallığı kullanılarak her $r\in R,\ u\in U$ için

$$\beta\big([[a,r],a]\big)=0 \text{ veya } [u,a]_{\alpha,\beta}=0$$

olduğu görülür. β bir otomorfizma olduğundan

$$\big[[a,R],a\big]=(0) \text{ veya } [U,a]_{\alpha,\beta}=(0)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki $[U,a]_{\alpha,\beta}\neq(0)$ olsun. Bu durumda $\big[[a,R],a\big]=(0)$ dır. Her $r\in R$ için $I_a(r)=[r,a]$ olarak tanımlanan a ile belirlenen bir iç türev olmak üzere ${I_a}^2(R)=(0)$ olur. $a\in S_\sigma(R)$ iken $I_a\sigma=\pm\sigma I_a$ olduğundan *Lemma 3.1.10* uygulanarak $a\in Z(R)$ olduğu bulunur. Böylece

$$a\in Z(R) \text{ veya } [U,a]_{\alpha,\beta}=(0)$$

dır. $[U,a]_{\alpha,\beta}=(0)$ olması durumunda *Teorem 3.2.10* uygulanarak

$$a\in Z(R) \text{ veya } U\subset Z(R)$$

olduğu bulunur.

Sonuç 3.2.13. R karakteristiği ikiden farklı bir σ-asal halka, U sıfırdan farklı bir σ-(α,β)-Lie ideali, β ile σ değişmeli olmak üzere $U\subset S_\sigma(R)$ ve $[U,U]_{\alpha,\beta}\subset C_{\alpha,\beta}$ ise $U\subset Z(R)$ dir.

Teorem 3.2.14. R karakteristiği ikiden farklı bir σ-asal halka, U sıfırdan farklı bir σ-(α,β)-Lie ideali, β ile σ değişmeli olmak üzere $U \not\subset Z(R)$ ve $U \not\subset C_{\alpha,\beta}$ ise $[R,M]_{\alpha,\beta} \subset U$ fakat $[R,M]_{\alpha,\beta} \not\subset C_{\alpha,\beta}$ olan R halkasının sıfırdan farklı bir M σ-ideali vardır.

İspat. U, R halkasının bir σ-(α,β)-Lie ideali olduğundan *Lemma 3.2.3* den $T(U)$ kümesinin $U \subset T(U)$ olan R halkasının hem althalkası hem de Lie idealidir. Öte yandan *Lemma 3.2.4* den $\big[[T(U),\beta(T(U))]\big]R \subset T(U)$ dır. Böylelikle

$$[U,\beta(U)]R \subset \big[[T(U),\beta(T(U))]\big]R \subset T(U)$$

olur. Yani

$$[U,\beta(U)]R \subset T(U)$$

dır. $T(U)$, R halkasının Lie ideali olduğundan

$$[R,[U,\beta(U)]R] \subset [R,T(U)] \subset T(U)$$

sağlanır. Bu durumda her $r,s \in R$, $u,v \in U$ için

$$[s,[u,\beta(v)]r] = [u,\beta(v)][s,r] + \big[s,[u,\beta(v)]\big]r \in T(U)$$

olur. $[U,\beta(U)]R \subset T(U)$ olduğundan $[u,\beta(v)][s,r] \in [U,\beta(U)]R \subset T(U)$ bulunur. $T(U)$ kümesi toplama işlemine kapalı olduğundan $[u,\beta(v)][s,r] + \big[s,[u,\beta(v)]\big]r \in T(U)$ ve $[u,\beta(v)][s,r] \in T(U)$ olması birlikte düşünüldüğünde

$$\big[s,[u,\beta(v)]\big]r \in T(U), \quad \forall\, r,s \in R, u,v \in U$$

olduğu bulunur. Bu ifade komütatör çarpım özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde

$$\big[s,[u,\beta(v)]\big]r = s[u,\beta(v)]r - [u,\beta(v)]sr$$

olur. Yani her $r,s \in R$, $u,v \in U$ için

$$s[u,\beta(v)]r - [u,\beta(v)]sr \in T(U)$$

elde edilir. $[u,\beta(v)]sr \in [U,\beta(U)]R \subset T(U)$ sağlandığından ve $T(U)$, R halkasının toplamsal bir altgrubu olduğundan her $s \in R$, $u,v \in U$ için

$$s[u,\beta(v)]r \in T(U)$$

olur. Bu ise

$$R[U,\beta(U)]R \subset T(U) \tag{3.13}$$

olması demektir.

$M = R[U,\beta(U)]R$ olsun. Açıktır ki M, R halkasının bir idealidir. Kabul edelim ki $M = (0)$ olsun. Bu durumda $R[U,\beta(U)]R = (0)$ dır. R halkası kendisinin bir σ-ideali olduğundan *Lemma 3.1.4* art arda uygulanarak

$$[U,\beta(U)]=(0)$$

olduğu bulunur. Üstelik $[U,\beta(U)\cap S_\sigma(R)]\subset[U,\beta(U)]=(0)$ olur. Bu ise

$$[U,\beta(U)\cap S_\sigma(R)]=(0)$$

demektir. $\beta(U)\cap S_\sigma(R)\subset S_\sigma(R)$ ve $U\not\subset Z(R)$ olduğu için *Teorem 3.2.8* uygulanarak

$$\beta(U)\cap S_\sigma(R)\subset Z(R)$$

olduğu bulunur. Keyfi bir $u\in U$ alalım. Bu durumda $u-\sigma(u)$ ve $u+\sigma(u)\in U\cap S_\sigma(R)$ dir. β ile σ değişmeli olduğundan $\beta\big(u-\sigma(u)\big),\ \beta\big(u+\sigma(u)\big)\in S_\sigma(R)$ olur. Üstelik $\beta\big(u-\sigma(u)\big),\ \beta\big(u+\sigma(u)\big)\in\beta(U)$ dır. Yani

$$\beta\big(u-\sigma(u)\big),\ \beta\big(u+\sigma(u)\big)\in\beta(U)\cap S_\sigma(R)$$

olur. $\beta(U)\cap S_\sigma(R)\subset Z(R)$ olması kullanıldığında ise

$$\beta\big(u-\sigma(u)\big),\ \beta\big(u+\sigma(u)\big)\in Z(R)$$

olduğu görülür. $Z(R),\ R$ halkasının bir althalkası olduğundan toplama işlemine kapalıdır. Böylece

$$\beta\big(u-\sigma(u)\big)+\beta\big(u+\sigma(u)\big)=2\beta(u)\in Z(R)$$

olur. Bu durumda halkanın karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılarak her $u\in U$ için $\beta(u)\in Z(R)$ olduğu bulunur. Böylece β bir otomorfizma olduğundan her $u\in U$ için $u\in Z(R)$ olur. Bu ise $U\not\subset Z(R)$ olması ile çelişir. O halde $M\neq(0)$ dır. Üstelik β ile σ değişmeli olduğundan

$$\sigma(M)=\sigma(R[U,\beta(U)]R\ )=R[U,\beta(U)]R=M$$

dir. Böylece $M,\ R$ halkasının sıfırdan farklı bir σ-ideali olur. (3.13) ifadesine geri dönüldüğünde $(0)\neq M=R[U,\beta(U)]R\subset T(U)$ olduğu görülür. $M\subset T(U)$ olması ve $T(U)$ kümesinin tanımı kullanılarak $[R,M]_{\alpha,\beta}\subset[R,T(U)]_{\alpha,\beta}\subset U$ olduğu bulunur. Böylece $(0)\neq M\subset T(U)$ olan R halkasının sıfırdan farklı bir σ-idealidir ve

$$[R,M]_{\alpha,\beta}\subset U$$

sağlanır.

Kabul edelim ki $[R,M]_{\alpha,\beta}\subset C_{\alpha,\beta}$ olsun. $I_r(m)=[r,m]_{\alpha,\beta}$ olarak tanımlanan r ile belirlenen bir (α,β)-iç türev olmak üzere $[R,M]_{\alpha,\beta}\subset C_{\alpha,\beta}$ ifadesi yeniden düzenlenirse $I_r(M)\subset C_{\alpha,\beta}$ olduğu bulunur. *Teorem 3.1.9* uygulandığında çelişki elde edilir. O halde $[R,M]_{\alpha,\beta}\not\subset C_{\alpha,\beta}$ dır.

Teorem 3.2.15. R karakteristiği ikiden farklı bir σ-asal halka, U sıfırdan farklı bir σ-(α,β)-Lie ideali, β ile σ değişmeli ve $a,\ b\in R$ olmak üzere $U\not\subset Z(R)$ ve $U\not\subset C_{\alpha,\beta}$ iken $aUb=\sigma(a)Ub=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ dır.

İspat. $U \not\subset Z(R)$ ve $U \not\subset C_{\alpha,\beta}$ olan bir σ-(α,β)-Lie ideal olduğundan *Teorem 3.2.14* uygulanırsa $[R,M]_{\alpha,\beta} \subset U$ fakat $[R,M]_{\alpha,\beta} \not\subset C_{\alpha,\beta}$ olan R halkasının sıfırdan farklı bir M σ-ideali vardır. $[R,M]_{\alpha,\beta} \subset U$ ve $aUb = \sigma(a)Ub = (0)$ olması kullanılarak $a[R,M]_{\alpha,\beta}b \subset aUb = (0)$ ve $\sigma(a)[R,M]_{\alpha,\beta}b \subset \sigma(a)Ub = (0)$ olduğu görülür. Yani

$$a[R,M]_{\alpha,\beta}b = \sigma(a)[R,M]_{\alpha,\beta}b = (0) \tag{3.14}$$

olur. Bu durumda keyfi bir $m \in M$ ve $u \in U$ için $[\sigma(a)u,m]_{\alpha,\beta} \in [R,M]_{\alpha,\beta} \subset U$ olduğundan $a[\sigma(a)u,m]_{\alpha,\beta}b = 0$ bulunur. Bu eşitlik (α,β)-komütatör özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde

$$0 = a[\sigma(a)u,m]_{\alpha,\beta}b = a\sigma(a)[u,m]_{\alpha,\beta}b + a[\sigma(a),\beta(m)]ub$$

elde edilir. Yani her $m \in M$, $u \in U$ için $a\sigma(a)[u,m]_{\alpha,\beta}b + a[\sigma(a),\beta(m)]ub = 0$ olur. $[u,m]_{\alpha,\beta} \in [R,M]_{\alpha,\beta} \subset U$ olduğundan (3.14) ifadesi kullanılarak $\sigma(a)[u,m]_{\alpha,\beta}b = 0$ bulunur. $a\sigma(a)[u,m]_{\alpha,\beta}b + a[\sigma(a),\beta(m)]ub = 0$ ifadesi $\sigma(a)[u,m]_{\alpha,\beta}b = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde $a[\sigma(a),\beta(m)]ub = 0$ olur. Bu eşitlik komütatör çarpım özellikleri uygulanarak düzenlendiğinde

$$0 = a[\sigma(a),\beta(m)]ub = a\sigma(a)\beta(m)ub - a\beta(m)\sigma(a)ub$$

olduğu görülür. Elde edilen ifade, hipotezden, $\sigma(a)ub = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$a\sigma(a)\beta(M)ub = (0), \quad \forall u \in U$$

bulunur. Üstelik $\sigma\big(a\sigma(a)\big) = \sigma\big(\sigma(a)\big)\sigma(a) = a\sigma(a)$ olduğundan

$$a\sigma(a)\beta(M)ub = \sigma\big(a\sigma(a)\big)\beta(M)ub = (0), \quad \forall u \in U$$

sağlanır. M, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-ideali ve β ile σ değişmeli olduğundan $\beta(M)$, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-idealidir. Böylelikle *Lemma 3.1.1* uygulanarak $a\sigma(a) = 0$ veya her $u \in U$ için $ub = 0$ olduğu bulunur. Yani

$$a\sigma(a) = 0 \text{ veya } Ub = (0)$$

dır. $Ub = (0)$ olması durumunda *Lemma 3.2.6* uygulanarak $b = 0$ olduğu bulunur. Böylece

$$a\sigma(a) = 0 \text{ veya } b = 0$$

elde edilir. Kabul edelim ki $b \neq 0$ olsun. Bu durumda $a\sigma(a) = 0$ dır. Her $n,m \in M$ için $[\sigma(a)n,m]_{\alpha,\beta} \in [R,M]_{\alpha,\beta}$ ve $[R,M]_{\alpha,\beta} \subset U$ olduğundan $[\sigma(a)n,m]_{\alpha,\beta} \in U$ olur. Hipotez uygulanarak $a[\sigma(a)n,m]_{\alpha,\beta}b = 0$ olduğu görülür. Bu eşitlik (α,β)-komütatör özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde

$$0 = a[\sigma(a)n, m]_{\alpha,\beta} b = a\sigma(a)n\alpha(m)b - a\beta(m)\sigma(a)nb$$

bulunur. Yani her $n, m \in M$ için

$$a\sigma(a)n\alpha(m)b - a\beta(m)\sigma(a)nb = 0$$

dır. $a\sigma(a) = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde ise her $n, m \in M$ için $a\beta(m)\sigma(a)nb = 0$ olduğu görülür. Yani

$$a\beta(M)\sigma(a)Mb = (0)$$

dır. $\beta(M)$, R halkasının bir σ-ideali olduğundan

$$\sigma\big(a\beta(M)\sigma(a)\big) = \sigma\big(\sigma(a)\big)\sigma\big(\beta(M)\big)\sigma(a) = a\beta(M)\sigma(a)$$

sağlanır. Böylelikle

$$a\beta(M)\sigma(a)Mb = \sigma\big(a\beta(M)\sigma(a)\big)Mb = (0)$$

olur. M, R halkasının bir σ-ideali olduğundan *Lemma 3.1.1* uygulanarak $b \neq 0$ iken

$$a\beta(M)\sigma(a) = (0) \tag{3.15}$$

elde edilir. Öte yandan her $u \in U$, $m \in M$ için $[au, m]_{\alpha,\beta}$, $[u, m]_{\alpha,\beta} \in [R, M]_{\alpha,\beta}$ ve $[R, M]_{\alpha,\beta} \subset U$ olduğundan $[au, m]_{\alpha,\beta}$, $[u, m]_{\alpha,\beta} \in U$ dır. Böylece her $u \in U$, $m \in M$ için $a[au, m]_{\alpha,\beta} b = 0$ olur. Bu eşitlik (α, β)-komütatör özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$0 = a[au, m]_{\alpha,\beta} b = aa[u, m]_{\alpha,\beta} b + a[a, \beta(m)]ub$$

bulunur. Yani her $u \in U$, $m \in M$ için

$$aa[u, m]_{\alpha,\beta} b + a[a, \beta(m)]ub = 0$$

dır. $[u, m]_{\alpha,\beta} \in U$ olduğundan $a[u, m]_{\alpha,\beta} b = 0$ olur. $aa[u, m]_{\alpha,\beta} b + a[a, \beta(m)]ub = 0$ eşitliği $a[u, m]_{\alpha,\beta} b = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde her $u \in U$, $m \in M$ için

$$a[a, \beta(m)]ub = 0$$

elde edilir. Bu ifade komütatör çarpım özellikleri uygulanarak düzenlenirse

$$0 = a[a, \beta(m)]ub = aa\beta(m)ub - a\beta(m)aub$$

bulunur. Elde edilen eşitlik $aUb = (0)$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$a^2\beta(M)ub = (0), \quad \forall u \in U$$

elde edilir.

Benzer olarak her $u \in U$, $m \in M$ için $[\sigma(a)u, m]_{\alpha,\beta}$, $[u, m]_{\alpha,\beta} \in [R, M]_{\alpha,\beta}$ ve $[R, M]_{\alpha,\beta} \subset U$ olduğundan $[\sigma(a)u, m]_{\alpha,\beta}, [u, m]_{\alpha,\beta} \in U$ olur. Her $u \in U$, $m \in M$ için $\sigma(a)[\sigma(a)u, m]_{\alpha,\beta} b = 0$ olduğu görülür. Bu eşitlik (α, β)-komütatör özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde

$$0 = \sigma(a)[\sigma(a)u, m]_{\alpha,\beta}b = \sigma(a)\sigma(a)[u, m]_{\alpha,\beta}b + \sigma(a)[\sigma(a), \beta(m)]ub$$

olduğu bulunur. Yani her $u \in U,\ m \in M$ için

$$\sigma(a)\sigma(a)[u, m]_{\alpha,\beta}b + \sigma(a)[\sigma(a), \beta(m)]ub = 0$$

dır. Öte yandan $[u, m]_{\alpha,\beta} \in U$ olduğundan $\sigma(a)[u, m]_{\alpha,\beta}b = 0$ olur. Bu durumda $\sigma(a)\sigma(a)[u, m]_{\alpha,\beta}b + \sigma(a)[\sigma(a), \beta(m)]ub = 0$ eşitliği düzenlendiğinde

$$\sigma(a)[\sigma(a), \beta(m)]ub = 0, \qquad \forall u \in U,\ m \in M$$

elde edilir. Bu ifade komütatör çarpım özellikleri uygulanarak düzenlendiğinde

$$0 = \sigma(a)[\sigma(a), \beta(m)]ub = \sigma(a)\sigma(a)\beta(m)ub - \sigma(a)\beta(m)\sigma(a)ub$$

bulunur. Elde edilen eşitlik $\sigma(a)Ub = (0)$ olması kullanılarak düzenlendiğinde ise

$$\sigma(a)^2\beta(M)ub = (0), \qquad \forall u \in U$$

bulunur. Böylece

$$a^2\beta(M)ub = \sigma(a^2)\beta(M)ub = (0), \qquad \forall u \in U$$

olur. Üstelik M sıfırdan farklı bir σ-ideal ve β ile σ değişmeli olduğundan $\beta(M)$, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-idealidir. Böylece *Lemma 3.1.1* uygulanarak $a^2 = 0$ veya her $u \in U$ için $ub = 0$ olduğu bulunur. Bu ise

$$a^2 = 0 \text{ veya } Ub = (0)$$

olması demektir. $Ub = (0)$ olması durumunda *Lemma 3.2.6* uygulanarak $b = 0$ veya $U \subset Z(R)$ olduğu bulunur. $b \neq 0$ ve $U \not\subset Z(R)$ olduğundan $Ub = (0)$ olamaz. O halde

$$a^2 = 0$$

dır. Keyfi $n, m \in M$ için $[an, m]_{\alpha,\beta} \in [R, M]_{\alpha,\beta}$ ve $[R, M]_{\alpha,\beta} \subset U$ olduğundan $[an, m]_{\alpha,\beta} \in U$ olur. Bu durumda $a[an, m]_{\alpha,\beta}b = 0$ dır. Son eşitlik (α, β)-komütatör özellikleri uygulanarak ve $a^2 = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$0 = a[an, m]_{\alpha,\beta}b = a^2n\alpha(m)b - a\beta(m)anb = a\beta(m)anb$$

bulunur. Böylece

$$a\beta(M)aMb = (0)$$

elde edilir. Benzer olarak her $n, m \in M$ için $[\sigma(a)n, m]_{\alpha,\beta} \in [R, M]_{\alpha,\beta} \subset U$ olduğundan $[\sigma(a)n, m]_{\alpha,\beta} \in U$ dır. Böylece $\sigma(a)[an, m]_{\alpha,\beta}b = 0$ bulunur. Bu eşitlik de (α, β)-komütatör özellikleri uygulanarak ve $a^2 = 0$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$\sigma(a)\beta(M)\sigma(a)Mb = (0)$$

elde edilir. $\beta(M)$, R halkasının bir σ-ideali olduğundan

$$\sigma(a\beta(M)a) = \sigma(a)\sigma\big(\beta(M)\big)\sigma(a) = \sigma(a)\beta(M)\sigma(a)$$

sağlanır. Yani $\sigma(a\beta(M)a) = \sigma(a)\beta(M)\sigma(a)$ olur. Böylece $\sigma(a)\beta(M)\sigma(a)Mb = (0)$ ifadesi yeniden düzenlenirse

$$(0) = \sigma(a)\beta(M)\sigma(a)Mb = \sigma(a\beta(M)a)Mb$$

olduğu görülür. Bu ise

$$\sigma(a\beta(M)a)Mb = (0)$$

olması demektir. Böylelikle

$$a\beta(M)aMb = \sigma(a\beta(M)a)Mb = (0)$$

olur. M, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-ideali olduğundan *Lemma 3.1.1* uygulanarak $b \neq 0$ iken $a\beta(M)a = (0)$ olduğu bulunur. Son eşitlik (3.15) ifadesi ile beraber düşünüldüğünde

$$a\beta(M)a = a\beta(M)\sigma(a) = (0)$$

olduğu görülür. $\beta(M)$, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-ideali olduğundan *Lemma 3.1.1* uygulanarak $a = 0$ olduğu bulunur. Böylece $b \neq 0$ iken $a = 0$ dır.

BÖLÜM 4

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER ÜZERİNE

4.1. İç Türev ile Belirlenen Genelleştirilmiş Türevlerin Bir Lie Halkası

Bir R halkası üzerinde tanımlı bütün türevlerin kümesi $D(R)$ olmak üzere her $d, h \in D(R)$ için $[d, h] = dh - hd$ olarak tanımlanan işlem ile $D(R)$ bir Lie halkadır. Sabit bir $a \in R$ için $i_a: R \to R$, $i_a(x) = [a, x]$ olacak şekilde tanımlanan a elemanı ile belirli bütün iç türevlerin kümesi $I(R)$ olmak üzere her $i_a, i_b \in I(R)$ için $[i_a, i_b] = i_{[a,b]}$ çarpımı ile $I(R)$ kümesi de $D(R)$ Lie halkasının bir Lie althalkasıdır.

R halkası üzerindeki Lie yapısı $L(R)$ olmak üzere Jacobson (1937) yaptığı çalışmada $\theta: L(R) \to I(R)$ iken her $r \in R$ için $\theta(r) = i_r$ olacak biçimde tanımlanan dönüşümün bir Lie epimorfizma ve çekirdeğinin halkanın merkezi $Z(R)$ olduğunu göstermiştir. Üstelik $Z(R)$, $L(R)$ Lie halkasının bir Lie ideali olduğundan $L(R)/Z(R) \cong I(R)$ olduğunu ispatlamıştır.

Ali ve Chaudhry (2011), Breśar (1991) tarafından tanımlanan genelleştirilmiş türev tanımını kullanarak R halkası üzerinde tanımlı bütün genelleştirilmiş türevlerin kümesini $Gder(R)$ ile göstermiş ve her $f_1, f_2 \in Gder(R)$ için $[f_1, f_2] = f_1 f_2 - f_2 f_1$ olarak tanımlanan işlem ile $Gder(R)$ kümesinin bir Lie halka olduğunu ispatlamıştır. Benzer olarak bütün genelleştirilmiş iç türevlerin kümesinin de $Gder(R)$ Lie halkasının bir Lie althalkası olduğunu göstermişlerdir.

Bu bölümde Jacobson (1937), Ali ve Chaudhry (2011) tarafından yapılan çalışmalardan esinlenerek $Gder(R)$ Lie halkasının bir Lie althalkası üzerinde bulunan bazı sonuçlar verilmiştir.

Bu bölüm boyunca R bir halka ve $\alpha, \beta: R \to R$ halka homomorfizmaları olarak alınacaktır.

Lemma 4.1.1. (Jacobson, 1937, *Teorem 3*) $\theta: L(R) \to I(R)$, $r \in R$ için $\theta(r) = i_r$ olacak biçimde tanımlanan dönüşüm bir Lie epimorfizmadır ve çekirdeği $Z(R)$ dir. Böylece $Z(R)$, $L(R)$ Lie halkasının bir Lie ideali olduğundan $L(R) \,/\, Z(R) \cong I(R)$ dir.

Lemma 4.1.2. (Jordan ve Jordan, 1978, *Lemma 4*) R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ise $Z(R)$, $L(R)$ Lie halkasının bir asal Lie idealidir. Böylece $I(R)$ bir asal Lie halkasıdır.

Lemma 4.1.3. (Jordan ve Jordan, 1978, *Lemma 6*) R bir 2-torsion free yarıasal halka ise $Z(R)$, $L(R)$ Lie halkasının bir yarıasal Lie idealidir. Böylece $I(R)$ bir yarıasal Lie halkasıdır.

Lemma 4.1.4. $a \in R$ olmak üzere $f_a: R \to R,\ x \in R$ için $f_a(x) = [x, a]_{\alpha,\beta}$ olarak tanımlanan dönüşüm $i_{-\alpha(a)}$ iç türevi ile belirli bir genelleştirilmiş türevdir.

İspat. Keyfi $x, y \in R$ için $f_a(x+y) = [x+y, a]_{\alpha,\beta}$ ifadesi (α, β)-komütatör özellikleri uygulanarak düzenlenirse

$$f_a(x+y) = [x+y, a]_{\alpha,\beta} = [x, a]_{\alpha,\beta} + [y, a]_{\alpha,\beta} = f_a(x) + f_a(y)$$

olur. Yani her $x, y \in R$ için

$$f_a(x+y) = f_a(x) + f_a(y)$$

dır. Keyfi $x, y \in R$ için $f_a(xy) = [xy, a]_{\alpha,\beta}$ ifadesi (α, β)-komütatör özellikleri uygulanarak düzenlenirse $i_{-\alpha(a)}: R \to R,\ x \in R$ için $i_{-\alpha(a)}(x) = [-\alpha(a), x]$ olacak biçimde tanımlı bir iç türev olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} f_a(xy) = [xy, a]_{\alpha,\beta} &= [x, a]_{\alpha,\beta}y + x[y, \alpha(a)] \\ &= [x, a]_{\alpha,\beta}y + x[-\alpha(a), y] \\ &= f_a(x)y + xi_{-\alpha(a)}(y) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise her $x, y \in R$ için

$$f_a(xy) = f_a(x)y + xi_{-\alpha(a)}(y)$$

olması demektir. O halde f_a, $i_{-\alpha(a)}$ iç türevi ile belirli bir genelleştirilmiş türevdir.

Lemma 4.1.5. R halkasında

$$N_{\alpha,\beta} = \{a \in R \mid [r, a]_{\alpha,\beta} = 0, \qquad \forall\, r \in R\}$$

olarak tanımlanan küme hem althalka hem de Lie idealdir.

Üstelik R bir yarıasal halka ise

$$N_{\alpha,\beta} = \{a \in R \mid \alpha(a) = \beta(a) \in Z(R)\}$$

dir.

İspat. $a, b \in N_{\alpha,\beta}$ alalım. Keyfi bir $r \in R$ için $[r, a-b]_{\alpha,\beta}$ ve $[r, ab]_{\alpha,\beta}$ ifadeleri (α, β)-komütatör özellikleri ve $a, b \in N_{\alpha,\beta}$ olması uygulanarak düzenlenirse

$$[r, a-b]_{\alpha,\beta} = [r, a]_{\alpha,\beta} - [r, b]_{\alpha,\beta} = 0 - 0 = 0$$

ve

$$[r, ab]_{\alpha,\beta} = [r, a]_{\alpha,\beta}\alpha(b) + \beta(a)[r, b]_{\alpha,\beta} = 0 - 0 = 0$$

olduğu görülür. Yani her $r \in R$ için $[r, a-b]_{\alpha,\beta} = 0$ ve $[r, ab]_{\alpha,\beta} = 0$ olur. Bu ise $a - b,\ ab \in N_{\alpha,\beta}$ olması demektir. Böylece $N_{\alpha,\beta}$ kümesi R halkasının bir althalkası olur.

Üstelik $r, s \in R$ ve $a \in N_{\alpha,\beta}$ için $\big[r, [s, a]\big]_{\alpha,\beta}$ ifadesi *genelleştirilmiş Jacobi özdeşliği* ve $a \in N_{\alpha,\beta}$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$\big[r, [s, a]\big]_{\alpha,\beta} = \big[[r, s]_{\alpha,\beta}, a\big]_{\alpha,\beta} - \big[[r, a]_{\alpha,\beta}, s\big]_{\alpha,\beta} = 0$$

bulunur. Bu durumda her $r, s \in R$ ve $a \in N_{\alpha,\beta}$ için $\big[r, [s, a]\big]_{\alpha,\beta} = 0$ dır. Böylece her $s \in R$, $a \in N_{\alpha,\beta}$ için $[s, a] \in N_{\alpha,\beta}$ elde edilir. Bu ise $N_{\alpha,\beta}$ kümesi R halkasının bir Lie ideali demektir.

Kabul edelim ki R bir yarıasal halka olsun. Her $r, s \in R$, $a \in N_{\alpha,\beta}$ için $[rs, a]_{\alpha,\beta} = 0$ olduğundan bu ifade (α, β)-komütatör özellikleri uygulanarak düzenlenirse

$$0 = [rs, a]_{\alpha,\beta} = [r, a]_{\alpha,\beta} s + r[s, \alpha(a)] = r[s, \alpha(a)]$$

bulunur. Yani her $r, s \in R$ ve $a \in N_{\alpha,\beta}$ için

$$r[s, \alpha(a)] = 0$$

dır. Bu ise $a \in N_{\alpha,\beta}$ için $R[R, \alpha(a)] = (0)$ olması demektir. Bu durumda R bir yarıasal halka olduğundan $\alpha(a) \in Z(R)$ olur.

Üstelik $a \in N_{\alpha,\beta}$ olduğundan her $r \in R$ için $[r, a]_{\alpha,\beta} = 0$ sağlanır. Bu ifade $\alpha(a) \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$\big(\alpha(a) - \beta(a)\big)R = (0)$$

olduğu görülür. R bir yarıasal halka olduğundan $\alpha(a) = \beta(a) \in Z(R)$ dir.

Not 4.1.6. Sabit bir $a \in R$ ve keyfi bir $x \in R$ için

$$f_a(x) = [x, a]_{\alpha,\beta} = x\alpha(a) - \beta(a)x$$
$$= x\alpha(a) + \big(-\beta(a)\big)x$$

ifadesi sağlanır. Bu ifade $u = \alpha(a)$ ve $v = -\beta(a)$ olmak üzere düzenlenirse

$$f_a(x) = xu + vx$$

genelleştirilmiş iç türevi elde edilir. Bu şekilde tanımlanan genelleştirilmiş iç türevlerin kümesini f_R ile gösterecek olursak

$$f_R = \{f_a : R \to R \mid f_a(x) = [x, a]_{\alpha,\beta}, a \in R\}$$

olur. (α, β)-komütatör özellikleri kullanılarak her $f_a, f_b \in f_R$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}(f_a - f_b)(r) &= f_a(r) - f_b(r) = [r, a]_{\alpha,\beta} - [r, b]_{\alpha,\beta} \\ &= r\alpha(a) - \beta(a)r - (r\alpha(b) - \beta(b)r) \\ &= r\alpha(a) - \beta(a)r - r\alpha(b) + \beta(b)r \\ &= r\alpha(a) - r\alpha(b) - (\beta(a)r - \beta(b)r) = r\alpha(a - b) - \beta(a - b)r \\ &= [r, a - b]_{\alpha,\beta} = f_{a-b}(r)\end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $f_a, f_b \in f_R$ için

$$f_a - f_b = f_{a-b} \tag{4.1}$$

olur. *Genelleştirilmiş Jacobi özdeşliği* uygulanarak her $f_a, f_b \in f_R$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}([f_a, f_b])(r) &= (f_a f_b - f_b f_a)(r) = f_a\big(f_b(r)\big) - f_b\big(f_a(r)\big) \\ &= f_a\big([r,b]_{\alpha,\beta}\big) - f_b\big([r,a]_{\alpha,\beta}\big) = \big[[r,b]_{\alpha,\beta}, a\big]_{\alpha,\beta} - \big[[r,a]_{\alpha,\beta}, b\big]_{\alpha,\beta} \\ &= \big[r,[b,a]\big]_{\alpha,\beta} = \big(f_{[b,a]}\big)(r)\end{aligned}$$

sağlandığı görülür. Yani her $f_a, f_b \in f_R$ için

$$[f_a, f_b] = f_{[b,a]} \tag{4.2}$$

dir. Böylece her $f_a, f_b \in f_R$ için

$$f_a - f_b = f_{a-b} \in f_R \text{ ve } [f_a, f_b] = f_{[b,a]} \in f_R$$

olur.

Lemma 4.1.7. $f_R = \{f_a : R \to R \mid f_a(x) = [x,a]_{\alpha,\beta}, a \in R\}$ kümesi $Gder(R)$ Lie halkasının bir Lie althalkasıdır.

İspat. (4.1) ve (4.2) ifadelerinden her $f_a, f_b \in f_R$ için $f_a - f_b = f_{a-b} \in f_R$ ve $[f_a, f_b] = f_{[b,a]} \in f_R$ olduğu görülür. O halde f_R kümesi $Gder(R)$ Lie halkasının bir Lie althalkasıdır.

Lemma 4.1.8. Sabit bir $a \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

i. $f_{-a} = -f_a$.

ii. $u \in R$ için $l_u : R \to R,\ l_u(x) = ux\ (x \in R)$ olmak üzere

$$f_a = i_{-\alpha(a)} + l_{(\alpha-\beta)(a)}$$

biçimindedir.

iii. $u \in R$ için $r_u : R \to R,\ r_u(x) = xu\ (x \in R)$ olmak üzere

$$f_a = i_{-\beta(a)} + r_{(\alpha-\beta)(a)}$$

biçimindedir.

iv. Eğer $\alpha(a) = \beta(a) \in Z(R)$ ise $f_a = 0$ dır. Tersine, $f_a = 0$ ve R bir yarıasal halka ise $\alpha(a) = \beta(a) \in Z(R)$ dir.

v. A, R halkasının bir Lie ideali ise $f_A = \{f_a \in f_R \mid a \in A\}$ kümesi f_R Lie halkasının hem Lie althalkası hem de Lie idealidir.

İspat.

($\boldsymbol{i}$) Keyfi bir $x \in R$ için

$$f_{-a}(x) = x\alpha(-a) - \beta(-a)x = -x\alpha(a) - \big(-\beta(a)\big)x$$
$$= -\big(x\alpha(a) - \beta(a)\big)x = -[x,a]_{\alpha,\beta}$$
$$= -(f_a(x)\,) = (-f_a)(x)$$

sağlandığından $f_{-a} = -f_a$ dır.

($\boldsymbol{ii}$) Keyfi bir $x \in R$ için

$$f_a(x) = x\alpha(a) - \beta(a)x = x\alpha(a) - \beta(a)x \pm \alpha(a)x$$
$$= (x\alpha(a) - \alpha(a)x) + \alpha(a)x - \beta(a)x$$
$$= [x,\alpha(a)] + \big((\alpha-\beta)(a)\big)x$$

olduğundan her $x \in R$ için

$$f_a(x) = [x,\alpha(a)] + \big((\alpha-\beta)(a)\big)x$$

dir. $u \in R$ için $l_u\colon R \to R,\ l_u(x) = ux\ (x \in R)$ olacak biçiminde tanımlı bir dönüşüm olmak üzere $f_a(x) = [x,\alpha(a)] + \big((\alpha-\beta)(a)\big)x$ ifadesi yeniden düzenlenirse her $x \in R$ için

$$f_a(x) = [-\alpha(a),x] + l_{(\alpha-\beta)(a)}(x) = i_{-\alpha(a)}(x) + l_{(\alpha-\beta)(a)}(x)$$
$$= \big(i_{-\alpha(a)} + l_{(\alpha-\beta)(a)}\big)(x)$$

sağlandığı görülür. Yani $f_a = i_{-\alpha(a)} + l_{(\alpha-\beta)(a)}$ dır.

($\boldsymbol{iii}$) Keyfi bir $x \in R$ için

$$f_a(x) = x\alpha(a) - \beta(a)x = x\alpha(a) - \beta(a)x \pm x\beta(a)$$
$$= (x\beta(a) - \beta(a)x) + x\alpha(a) - x\beta(a)$$
$$= [x,\beta(a)] + x\big((\alpha-\beta)(a)\big)$$

bulunur. Yani her $x \in R$ için

$$f_a(x) = [x,\beta(a)] + x\big((\alpha-\beta)(a)\big)$$

dir. $u \in R$ için $r_u\colon R \to R,\ r_u(x) = xu\ (x \in R)$ olacak biçiminde tanımlı bir dönüşüm olmak üzere $f_a(x) = [x,\beta(a)] + x\big((\alpha-\beta)(a)\big)$ ifadesi yeniden düzenlenirse her $x \in R$ için

$$f_a(x) = [-\beta(a),x] + r_{(\alpha-\beta)(a)}(x) = i_{-\beta(a)}(x) + r_{(\alpha-\beta)(a)}(x)$$
$$= \big(i_{-\beta(a)} + r_{(\alpha-\beta)(a)}\big)(x)$$

sağlandığı görülür. Yani $f_a = i_{-\beta(a)} + r_{(\alpha-\beta)(a)}$ dır.

($\boldsymbol{iv}$) Kabul edelim ki $\alpha(a) = \beta(a) \in Z(R)$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $f_a(x) = x\alpha(a) - \beta(a)x = x\big(\alpha(a) - \beta(a)\big) = 0$ olur. Yani $f_a = 0$ dır.

Tersine, kabul edelim ki R bir yarıasal halka ve $f_a = 0$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $f_a(x) = [x, a]_{\alpha,\beta} = 0$ olur. *Lemma 4.1.5* uygulanarak $a \in N_{\alpha,\beta}$ olduğu bulunur. R bir yarıasal halka ve $a \in N_{\alpha,\beta}$ olduğundan tekrardan *Lemma 4.1.5* uygulanarak

$$\alpha(a) = \beta(a) \in Z(R)$$

sonucuna ulaşılır.

$(\boldsymbol{v})$ Kabul edelim ki A, R halkasının bir Lie ideali olsun. Bu durumda $f_a, f_b \in f_A$ alalım. f_A kümesinin tanımında $a, b \in A$ dır. Bu durumda $a - b$, $[a, b] \in A$ olduğundan (4.1) ve (4.2) ifadeleri kullanılarak $f_a - f_b = f_{a-b} \in f_A$ ve $[f_a, f_b] = f_{[b,a]} \in f_A$ olduğu görülür. Böylece f_A, f_R Lie halkasının bir Lie althalkasıdır.

Üstelik $a \in A$ ve $r \in R$ için $f_a \in f_A$ ve $f_r \in f_R$ alalım. A, R halkasının bir Lie ideali olduğundan $[r, a] \in A$ dır. Böylece $[f_a, f_r] = f_{[r,a]} \in f_A$ olduğundan f_A, f_R Lie halkasının bir Lie idealidir.

Lemma 4.1.9. $l(f_R) = \left\{f_a \in f_R \mid i_{\alpha(a)} = 0\right\}$ kümesi f_R Lie halkasının hem Lie althalkası hem de Lie idealidir. Üstelik

$$l(f_R) = \{f_a \in f_R \mid f_a(xy) = f_a(x)y, \quad \forall x, y \in R\}$$

dir.

İspat. $f_a, f_b \in l(f_R)$ alalım. $l(f_R)$ kümesinin tanımından $i_{\alpha(a)} = 0$ ve $i_{\alpha(b)} = 0$ dır. Bu durumda $i_{\alpha(a-b)} = i_{\alpha(a)} - i_{\alpha(b)} = 0 - 0 = 0$ olur. Bu ise

$$f_{a-b} = f_a - f_b \in l(f_R)$$

demektir. Benzer olarak $i_{\alpha[a,b]} = \left[i_{\alpha(a)}, i_{\alpha(b)}\right] = [0,0] = 0$ olduğundan

$$f_{[a,b]} = [f_a, f_b] \in l(f_R)$$

dir. Böylece $l(f_R)$, f_R Lie halkasının bir Lie althalkasıdır.

$f_a \in l(f_R)$ ve $f_r \in f_R$ alınırsa

$$i_{\alpha[a,r]} = \left[i_{\alpha(a)}, i_{\alpha(r)}\right] = \left[0, i_{\alpha(r)}\right] = 0$$

olduğundan $f_{[a,r]} \in l(f_R)$ bulunur. Bu ise her $f_a \in l(f_R)$, $f_r \in f_R$ için $[f_r, f_a] \in l(f_R)$ olması demektir. Böylece $l(f_R)$, f_R Lie halkasının bir Lie ideali olur.

f_a dönüşümünün $i_{-\alpha(a)}$ iç türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olduğu kullanılırsa her $x, y \in R$ için

$$f_a(xy) = f_a(x)y + x\left(i_{-\alpha(a)}(y)\right) = f_a(x)y + x\left(-i_{\alpha(a)}\right)(y) = f_a(x)y$$

sağlanır. Yani

$$l(f_R) = \{f_a \in f_R \mid f_a(xy) = f_a(x)y, \quad \forall x, y \in R\}$$

dir.

Lemma 4.1.1 aşağıdaki biçimde genelleştirilmiştir:

Teorem 4.1.10. $g: L(R) \to f_R$ ve her $a \in R$ için $g(a) = f_{-a}$ olacak biçimde tanımlanan dönüşüm bir Lie epimorfizmadır ve çekirdeği $N_{\alpha,\beta}$ dır. Böylece $N_{\alpha,\beta}$, $L(R)$ Lie halkasının bir Lie ideali olduğundan $L(R) \,/\, N_{\alpha,\beta} \cong f_R$ dir.

İspat. (4.1) ve (4.2) ifadeleri kullanılarak her $a, b \in R$ için

$$g(a+b) = f_{-(a+b)} = f_{-a+(-b)} = f_{-a} + f_{-b} = g(a) + g(b)$$

ve

$$g([a,b]) = f_{-[a,b]} = f_{[b,a]} = [f_a, f_b] = [-f_a, -f_b] = [f_{-a}, f_{-b}] = [g(a), g(b)]$$

olduğu görülür. Böylece g bir Lie homomorfizmadır. Açıktır ki her $f_r \in f_R$ için

$$g(-r) = f_{-(-r)} = f_r$$

olacak biçimde en az bir $-r \in R$ var olduğundan g bir örten Lie homomorfizmadır. Üstelik

$$\begin{aligned} kerg &= \{a \in R \mid g(a) = f_0\} = \{a \in R \mid f_{-a} = 0\} \\ &= \{a \in R \mid [x,a]_{\alpha,\beta} = 0, \forall x \in R\} \\ &= N_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

olduğundan *I. Lie izomorfizma Teoremi* uygulanarak $L(R) \,/\, N_{\alpha,\beta} \cong f_R$ elde edilir.

Teorem 4.1.11. R bir yarıasal halka ve α, R halkası üzerinde tanımlı bir epimorfizma olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- **i.** $h: f_R \to I(R)$, her $f_a \in f_R$ için $h(f_a) = i_{-\alpha(a)}$ olacak biçimde tanımlanan dönüşüm bir Lie epimorfizmadır ve çekirdeği $l(f_R)$ dır. Böylece $l(f_R)$, f_R Lie halkasının bir Lie ideali olduğundan $f_R \,/\, l(f_R) \cong I(R)$ dir.
- **ii.** $hg = \theta\alpha$ dır.

İspat. $(\boldsymbol{i})$ $f_a, f_b \in f_R$ alalım. Kabul edelim ki $f_a = f_b$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $[x,a]_{\alpha,\beta} = [x,b]_{\alpha,\beta}$ olur. Bu ise her $x \in R$ için $[x, a-b]_{\alpha,\beta} = 0$ olması demektir. *Lemma 4.1.5* uygulanarak $a - b \in N_{\alpha,\beta}$ olduğu görülür. R bir yarıasal halka olduğundan *Lemma 4.1.5* uygulanarak $\alpha(N_{\alpha,\beta}) \subseteq Z(R)$ olduğu görülür. O halde $\alpha(a-b) \in Z(R)$ dir. Böylece her $r \in R$ için $[r, \alpha(a)] = [r, \alpha(b)]$ olur. Yani $i_{-\alpha(a)} = i_{-\alpha(b)}$ dir. Bu durumda $h(f_a) = h(f_b)$ olur. Böylece h dönüşümü iyi tanımlıdır. Her $f_a, f_b \in f_R$ için

$$h(f_a + f_b) = h(f_{a+b}) = i_{-\alpha(a+b)} = i_{-\alpha(a)-\alpha(b)} = i_{-\alpha(a)} + i_{-\alpha(b)} = h(f_a) + h(f_b)$$

ve

$$\begin{aligned} h([f_a, f_b]) &= h\big(f_{[b,a]}\big) = i_{-\alpha([b,a])} = i_{\alpha([a,b])} = \big[i_{\alpha(a)}, i_{\alpha(b)}\big] \\ &= \big[i_{-\alpha(a)}, i_{-\alpha(b)}\big] = [h(f_a), h(f_b)] \end{aligned}$$

sağlandığından h bir Lie homomorfizmadır. $x \in R$ olmak üzere bir $i_x \in I(R)$ alalım. α örten olduğundan $x = \alpha(y)$ olacak biçimde en az bir $y \in R$ vardır. Bu durumda

$$i_x = i_{\alpha(y)} = i_{-(-\alpha(y))} = i_{-(\alpha(-y))} = h(f_{-y})$$

olacak biçimde $f_{-y} \in f_R$ var olduğundan h bir Lie epimorfizmadır. Üstelik

$$\begin{aligned} kerh &= \{f_a \in f_R \mid h(f_a) = 0\} \\ &= \{f_a \in f_R \mid i_{\alpha(a)} = 0\} \\ &= l(f_R) \end{aligned}$$

olduğundan *I. Lie izomorfizma Teoremi* uygulanarak $f_R \,/\, l(f_R) \cong I(R)$ elde edilir.

$(\boldsymbol{ii})$ *Lemma 4.1.1*, *Teorem 4.1.10* ve *Teorem 4.1.11 (i)* de tanımlanan fonksiyonlar kullanılarak her $r \in R$ için

$$(hg)(r) = h(g(r)) = h(f_{-r}) = i_{-\alpha(-r)} = i_{-(-\alpha(r))} = i_{\alpha(r)} = \theta(\alpha(r)) = (\theta\alpha)(r)$$

olduğu görülür. Böylece $hg = \theta\alpha$ dır.

Sonuç 4.1.12. R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve α, R halkası üzerinde tanımlı bir epimorfizma ise $f_R \,/\, l(f_R)$ bir asal Lie halkasıdır. Böylece $l(f_R)$, f_R Lie halkasının bir asal Lie idealidir.

İspat. *Lemma 4.1.2* den $I(R)$ asal Lie halkasıdır. *Teorem 4.1.11 (i)* ifadesinden $f_R \,/\, l(f_R) \cong I(R)$ bulunur. Bu iki ifade beraber düşünülürse $f_R \,/\, l(f_R)$ asal Lie halkası olur. Böylece $l(f_R)$, f_R Lie halkasının bir asal Lie idealidir.

Sonuç 4.1.13. R bir 2-torsion free yarıasal halka ve α, R halkası üzerinde bir epimorfizma ise $f_R \,/\, l(f_R)$ bir yarıasal Lie halkasıdır. Böylece $l(f_R)$, f_R Lie halkasının bir yarıasal Lie idealidir.

İspat. *Lemma 4.1.3* den $I(R)$ bir yarıasal Lie halkasıdır. *Teorem 4.1.11 (i)* uygulanarak $f_R \,/\, l(f_R) \cong I(R)$ bulunur. Bu iki ifade beraber düşünülürse $f_R \,/\, l(f_R)$ yarıasal Lie halkası olur. Böylece $l(f_R)$, f_R Lie halkasının bir yarıasal Lie idealidir.

Teorem 4.1.14. A ve B, R halkasının Lie idealleri olsun. f_R bir asal Lie halkası ise $[f_A, f_B] = (0)$ olması durumunda $f_A = (0)$ veya $f_B = (0)$ dır.

İspat. f_R asal bir Lie halkası olduğundan *Teorem 4.1.10* uygulanarak $L(R) \,/\, N_{\alpha,\beta}$ de bir asal Lie halka olur. Böylece $N_{\alpha,\beta}$, R halkasının bir asal Lie idealidir. Kabul edelim ki $[f_A, f_B] = (0)$ olsun. Bu durumda (4.2) ifadesi uygulanarak her $f_a \in f_A$ ve $f_b \in f_B$ için $0 = [f_a, f_b] = f_{[b,a]}$ olduğu görülür. Yani her $a \in A$, $b \in B$ için $f_{[b,a]} = 0$ dır. Bu ise her $r \in R$ için $[r, [b, a]]_{\sigma,\tau} = 0$ olması demektir. *Lemma 4.1.5* uygulanarak her $a \in A$, $b \in B$ için $[b, a] \in N_{\alpha,\beta}$ olduğu bulunur. Böylece

$$[A, B] \subset N_{\alpha,\beta}$$

elde edilir. $N_{\alpha,\beta}$, R halkasının bir asal Lie ideali olduğundan $A \subset N_{\alpha,\beta}$ veya $B \subset N_{\alpha,\beta}$ elde edilir. *Lemma 4.1.5* uygulanarak $[R, A]_{\alpha,\beta} = (0)$ veya $[R, B]_{\alpha,\beta} = (0)$ olduğu bulunur. Böylece $f_A = (0)$ veya $f_B = (0)$ olur.

Teorem 4.1.15. A, R halkasının bir Lie ideali olsun. f_R bir yarıasal Lie halkası ise $[f_A, f_A] = (0)$ olması durumunda $f_A = (0)$ dır.

İspat. f_R yarıasal bir Lie halkası olduğundan *Teorem 4.1.10* uygulanırsa $L(R)\ /\ N_{\alpha,\beta}$ de bir yarıasal Lie halka olur. Böylece $N_{\alpha,\beta}$, R halkasının bir yarıasal Lie idealidir. Kabul edelim ki $[f_A, f_A] = (0)$ olsun. Bu durumda (4.2) ifadesi uygulanarak her $f_a, f_b \in f_A$ için $0 = [f_a, f_b] = f_{[b,a]}$ olduğu görülür. Yani her $a, b \in A$ için $f_{[b,a]} = 0$ dır. Bu ise her $r \in R$ için $\big[r, [b, a]\big]_{\sigma,\tau} = 0$ olması demektir. *Lemma 4.1.5* uygulanarak her $a, b \in A$ için $[b, a] \in N_{\alpha,\beta}$ olduğu bulunur. Böylece

$$[A, A] \subset N_{\alpha,\beta}$$

dır. $N_{\alpha,\beta}$, R halkasının bir yarıasal Lie ideali olduğundan $A \subset N_{\alpha,\beta}$ olur. *Lemma 4.1.5* uygulanarak $[R, A]_{\alpha,\beta} = (0)$ olduğu bulunur. Böylece $f_A = (0)$ dır.

4.2. Yarıasal Halkalarda Genelleştirilmiş Türevlerin Bir Lie Halkası

Jordan ve Jordan (1978) yaptıkları çalışmada R değişmeli bir halka olmak üzere $\delta \in D(R)$ ve $r \in R$ iken $R\delta = \{r\delta \mid r \in R\}$ kümesinin $D(R)$ Lie halkasının bir Lie althalkası olduğunu göstermişlerdir. Aynı çalışmada çeşitli koşullar altında $R\delta$ Lie halkasının asal olduğu sonucuna varmışlardır.

Ali ve Chaudhry (2011) yaptıkları çalışmada R değişmeli olmayan bir halka, $F \in Gder(R)$ ve $r \in Z(R)$ iken $Z(R)F = \{rF \mid r \in Z(R)\}$ kümesinin $Gder(R)$ Lie halkasının bir Lie althalkası olduğunu göstermişler ve bazı durumlarda $Z(R)F$ Lie halkasının asal olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Bu bölümde yukarıda ifade edilen çalışmalardan esinlenerek R halkasının yarıasal olması durumunda $f \in Gder(R)$ iken

$$f \cdot N_{\alpha,\beta} = \{f \cdot n : R \to R \mid (f \cdot n)(r) = f(r)\alpha(n), n \in N_{\alpha,\beta}\}$$

kümesinin $Gder(R)$ Lie halkasının bir Lie althalkası olduğu gösterilmiş ve bazı koşullar altında $f \cdot N_{\alpha,\beta}$ Lie halkasının asal olduğu sonucuna varılmıştır.

Bu bölüm boyunca $\alpha,\ \beta: R \to R$ halka homomorfizmaları olarak alınacaktır.

Lemma 4.2.1. R bir yarıasal halka ve $d,\ \alpha$ ve β ile değişmeli olan R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ise $d\left(N_{\alpha,\beta}\right) \subset N_{\alpha,\beta}$ dır.

İspat. R bir yarıasal halka olduğundan *Lemma 4.1.5* uygulanarak her $n \in N_{\alpha,\beta}$ için $\alpha(n) = \beta(n) \in Z(R)$ bulunur. d iyi tanımlı olduğundan $d(\alpha(n)) = d\big(\beta(n)\big) \in d\big(Z(R)\big)$ dir. *Özellik 2.41* uygulanarak $d(\alpha(n)) = d\big(\beta(n)\big) \in Z(R)$ elde edilir. $d,\ \alpha$ ve β ile değişmeli bir türev olduğundan $\alpha(d(n)) = \beta\big(d(n)\big) \in Z(R)$ olur. *Lemma 4.1.5* uygulanarak her $n \in N_{\alpha,\beta}$ için $d(n) \in N_{\alpha,\beta}$ olduğu bulunur.

Not 4.2.2. R bir yarıasal halka, f bir d türevi ile belirli R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi ve $n \in N_{\alpha,\beta}$ olsun. $f \cdot n\colon R \to R,$ her $r \in R$ için

$$(f \cdot n)(r) = f(r)\alpha(n)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda her $r, s \in R$ için

$$\begin{aligned}(f \cdot n)(r+s) &= f(r+s)\alpha(n) = \big(f(r)+f(s)\big)\alpha(n)\\ &= f(r)\alpha(n) + f(s)\alpha(n)\\ &= (f \cdot n)(r) + (f \cdot n)(s)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani her $r, s \in R$ için

$$(f \cdot n)(r+s) = (f \cdot n)(r) + (f \cdot n)(s)$$

dır.

R bir yarıasal halka olduğundan *Lemma 4.1.5* uygulanarak $\alpha(n) \in Z(R)$ olduğu görülür. Öte yandan her türev kendisi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olduğundan her $r \in R$ için

$$(d \cdot n)(r) = d(r)\alpha(n)$$

sağlanır. Böylece $\alpha(n) \in Z(R)$ olması kullanılarak her $r, s \in R$ için

$$\begin{aligned}(f \cdot n)(rs) &= f(rs)\alpha(n) = f(r)s\alpha(n) + rd(s)\alpha(n)\\ &= f(r)\alpha(n)s + rd(s)\alpha(n) = (f \cdot n)(r)s + r(d \cdot n)(r)\end{aligned}$$

elde edilir. R bir yarıasal halka iken $d \cdot n$ de bir türevdir. Böylece $f \cdot n,\ d \cdot n$ türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olur. Bu şekilde tanımlanan bütün genelleştirilmiş türevlerin kümesi $f \cdot N_{\alpha,\beta}$ ile gösterilecek olursa her $f \in Gder(R)$ için

$$f \cdot N_{\alpha,\beta} = \{f \cdot n : R \to R \mid (f \cdot n)(r) = f(r)\alpha(n), n \in N_{\alpha,\beta}\}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\begin{gathered}Gder(R) \times N_{\alpha,\beta} \to Gder(R)\\ (f, n) \to f \cdot n\end{gathered}$$

olarak tanımlanan dış işlem ile $Gder(R)$ nin bir sağ $N_{\alpha,\beta}$-modül olduğu kolayca görülür.

Üstelik R bir yarıasal halka ve $d,\ \alpha$ ve β ile değişmeli olan R halkasının sıfırdan farklı bir türevi iken her $n, m \in N_{\alpha,\beta},\ r \in R$ için

$$
\begin{aligned}
([f \cdot n\,, f \cdot m\,])(r) &= \Big(\big(f \cdot n\,(f \cdot m)\big) - \big(f \cdot m(f \cdot n)\big)\Big)(r) \\
&= f \cdot n\,\big((f \cdot m)(r)\big) - f \cdot m\big((f \cdot n)(r)\big) \\
&= f \cdot n\,\big(f(r)\alpha(m)\big) - f \cdot m\big(f(r)\alpha(n)\big) \\
&= f\big(f(r)\alpha(m)\big)\alpha(n) - f\big(f(r)\alpha(n)\big)\alpha(m) \\
&= \Big(f\big(f(r)\big)\alpha(m) + f(r)d\big(\alpha(m)\big)\Big)\alpha(n) \\
&\quad - \Big(f\big(f(r)\big)\alpha(n) + f(r)d\big(\alpha(n)\big)\Big)\alpha(m) \\
&= f(f(r)\,)\alpha(m)\alpha(n) + f(r)d(\alpha(m)\,)\alpha(n) \\
&\quad - f(f(r)\,)\alpha(n)\alpha(m) - f(r)d(\alpha(n)\,)\alpha(m) \\
&= f(r)d\big(\alpha(m)\big)\alpha(n) - f(r)d\big(\alpha(n)\big)\alpha(m) \\
&= f(r)\Big(d\big(\alpha(m)\big)\alpha(n) - d\big(\alpha(n)\big)\alpha(m)\Big) \\
&= f(r)\alpha(d(m)n - d(n)m) \\
&= (f \cdot (d(m)n - d(n)m))(r)
\end{aligned}
$$

sağlanır. Bu ise her $n, m \in N_{\alpha,\beta}$ için

$$[f \cdot n\,, f \cdot m\,] = f \cdot (d(m)n - d(n)m)$$

demektir. *Lemma 4.2.1* ve *Lemma 4.1.5* art arda uygulanırsa $d(n), d(m) \in N_{\sigma,\tau}$ ve $N_{\sigma,\tau}$ kümesinin R halkasının bir althalkası olduğu görülür. O halde her $n, m \in N_{\alpha,\beta}$ için

$$d(m)n - d(n)m \in N_{\alpha,\beta}$$

olur. Yani

$$[f \cdot n\,, f \cdot m\,] = f \cdot (d(m)n - d(n)m) \in f \cdot N_{\alpha,\beta} \tag{4.3}$$

elde edilir. Böylece $f \cdot N_{\alpha,\beta}$ kümesi $Gder(R)$ Lie halkasının bir Lie althalkası olur.

$A,\ f \cdot N_{\alpha,\beta}$ Lie halkasının bir Lie ideali olsun.

$$\mu(A) = \{a \in N_{\alpha,\beta} \mid f \cdot a \in A\}$$

kümesi tanımlansın. Her $a, b \in \mu(A),\ r \in R$ için

$$
\begin{aligned}
\big(f \cdot (a - b)\big)(r) &= f(r)\alpha(a - b) = f(r)\alpha(a) - f(r)\alpha(b) \\
&= (f \cdot a)(r) - (f \cdot b)(r) = (f \cdot a - f \cdot b)(r)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$f \cdot (a-b) = f \cdot a - f \cdot b \in A$$

dır. Bu ise $a - b \in \mu(A)$ olması demektir. O halde $\mu(A)$, R halkasının bir altgrubudur.

Lemma 4.2.3. R bir asal halka ve f bir d türevi ile belirli R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi olmak üzere $n \in N_{\alpha,\beta}$ ve $f \cdot n = 0$ ise $\alpha(n) = 0$ dır.

İspat. Her $r \in R$ için $(f \cdot n)(r) = 0$ olduğundan $f \cdot n$ fonksiyonunun tanımı kullanılarak $f(r)\alpha(n) = 0$ olduğu görülür. R halkası asal olduğundan *Lemma 4.1.5* den $\alpha(n) \in Z(R)$ dir. Böylece keyfi bir $s \in R$ için $f(r)s\alpha(n) = 0$ bulunur. Bu ise

$$f(r)R\alpha(n) = (0)$$

olması demektir. Böylece R halkasının asallığı kullanılarak $\alpha(n) = 0$ elde edilir.

Lemma 4.2.4. A, $f \cdot N_{\alpha,\beta}$ Lie halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olmak üzere $\alpha(\mu(A))$, R halkasının sıfırdan farklı bir altgrubudur.

İspat. A, $f \cdot N_{\alpha,\beta}$ Lie halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olduğundan

$0 \neq f \cdot n \in A$ olacak şekilde bir $n \in N_{\alpha,\beta}$

vardır. Bu durumda $\mu(A)$ kümesinin tanımından $n \in \mu(A)$ olur. Eğer $n = 0$ ise α iyi tanımlı olduğundan $\alpha(n) = 0$ dır. Bu durumda her $r \in R$ için $f(r)\alpha(n) = 0$ olur. Bu ifade $f \cdot n$ fonksiyonunun tanımı kullanılarak düzenlenirse her $r \in R$ için $(f \cdot n)(r) = 0$ olduğu görülür. Yani $f \cdot n = 0$ dır. Bu ise $0 \neq f \cdot n \in A$ olması ile çelişir. O halde

$$0 \neq n \in \mu(A)$$

olur. Kabul edelim ki $0 \neq n \in \mu(A)$ için $\alpha(n) = 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $f(r)\alpha(n) = 0$ olur. Yani $f \cdot n = 0$ demektir. Bu ise $0 \neq f \cdot n$ olması ile çelişir. O halde $0 \neq n \in \mu(A)$ için $0 \neq \alpha(n) \in \alpha(\mu(A))$ olur. Böylece $\alpha(\mu(A))$ kümesi sıfırdan farklıdır. Üstelik α bir homomorfizma olduğundan $\alpha(\mu(A))$ kümesi R halkasının sıfırdan farklı bir altgrubudur.

Teorem 4.2.5. R bir 2-torsion free asal halka, f bir d türevi ile belirlenen R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi, d, α ve β ile değişmeli ve $d\left(\alpha(N_{\alpha,\beta})\right) \neq (0)$ olsun. Bu durumda $f \cdot N_{\alpha,\beta}$, $Gder(R)$ Lie halkasının bir asal Lie althalkasıdır.

İspat. A ve B, $f \cdot N_{\alpha,\beta}$ Lie halkasının sıfırdan farklı Lie idealleri olmak üzere $[A, B] = (0)$ olsun. $\mu(A) = \{a \in N_{\alpha,\beta} \mid f \cdot a \in A\}$ ve $\mu(B) = \{b \in N_{\alpha,\beta} \mid f \cdot b \in B\}$ kümeleri tanımlansın. A ve B, $f \cdot N_{\alpha,\beta}$ Lie halkasının sıfırdan farklı Lie idealleri olduğundan *Lemma 4.2.4* uygulanarak $\alpha(\mu(A))$ ve $\alpha(\mu(B))$ kümelerinin R halkasının sıfırdan farklı altgrupları olduğu bulunur. Üstelik $a \in \mu(A)$ ve $b \in \mu(B)$ için $f \cdot a \in A$ ve

$f \cdot b \in B$ olur. $[A,B]=(0)$ olduğundan $[f \cdot a, f \cdot b] \in [A,B]=(0)$ dır. Bu ise her $a \in \mu(A)$ ve $b \in \mu(B)$ için

$$[f \cdot a, f \cdot b] = 0$$

olması demektir. (4.3) ifadesi kullanılırsa her $a \in \mu(A)$ ve $b \in \mu(B)$ için

$$f \cdot (d(b)a - d(a)b) = 0$$

sağlanır. Üstelik $d(a), d(b) \in N_{\sigma,\tau}$ ve $N_{\sigma,\tau}$ kümesinin R halkasının bir althalkası olduğundan her $a \in \mu(A)$ ve $b \in \mu(B)$ için $d(b)a - d(a)b \in N_{\alpha,\beta}$ olur. *Lemma 4.2.3* uygulanarak

$$\sigma(d(b)a - d(a)b) = 0, \qquad \forall a \in \mu(A), b \in \mu(B) \tag{4.4}$$

elde edilir. $N_{\alpha,\beta}$, R halkasının bir althalkası olduğundan her $m \in N_{\alpha,\beta}$, $y \in \mu(B)$ için $my \in N_{\alpha,\beta}$ dır. A, $f \cdot N_{\alpha,\beta}$ Lie halkasının bir Lie ideali olduğundan her $x \in \mu(A)$ için $\left[f \cdot x, f \cdot N_{\alpha,\beta}\right] \subset A$ olur. Böylece her $m \in N_{\alpha,\beta}$, $x \in \mu(A)$, $y \in \mu(B)$ için

$$[f \cdot x, f \cdot (my)] \in A$$

dır. (4.3) eşitliği kullanılarak

$$f \cdot (d(my)x - d(x)my) \in A$$

olduğu görülür. $\mu(A)$ kümesinin tanımı uygulanırsa her $m \in N_{\alpha,\beta}$, $x \in \mu(A)$, $y \in \mu(B)$ için

$$d(my)x - d(x)my \in \mu(A)$$

bulunur. Elde edilen son ifade türev özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde

$$d(m)yx + md(y)x - d(x)my \in \mu(A), \qquad \forall m \in N_{\alpha,\beta},\ x \in \mu(A),\ y \in \mu(B)$$

elde edilir. (4.4) nolu eşitlikte a yerine $d(m)yx + md(y)x - d(x)y$ yazılırsa

$$\alpha(d(b)(d(m)yx + md(y)x - d(x)my) - d(d(m)yx + md(y)x - d(x)my)b) = 0$$

bulunur. d ile α nın değişmeli olması kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\big(d(b)\big)\alpha(d(m)yx + md(y)x - d(x)my) \\ &\quad -\alpha\big(d(d(m)yx - md(y)x + d(x)my)\big)\alpha(b) \\ &= \alpha\big(d(b)\big)\big(\alpha(d(m)yx + md(y)x - d(x)my)\big) \\ &\quad -\big(d(\alpha(d(m)yx) - md(y)x + d(x)my)\big)\alpha(b) \\ &= \alpha\big(d(b)\big)\big(\alpha(d(m)yx) + \alpha(md(y)x - d(x)my)\big) \\ &\quad -\Big(d\big(\alpha(d(m)yx) - \alpha(md(y)x - d(x)my)\big)\Big)\alpha(b) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani her $m \in N_{\alpha,\beta}$, $x \in \mu(A)$, $y, b \in \mu(B)$ için

$$\alpha\big(d(b)\big)\big(\alpha(d(m)yx)+\alpha(md(y)x-d(x)my)\big)$$
$$-\Big(d\big(\alpha(d(m)yx)-\alpha(md(y)x-d(x)my)\big)\Big)\alpha(b)=0$$

olur. R bir asal halka olduğundan *Lemma 4.1.5* den $\alpha(m)\in Z(R)$ olur. Yukarıdaki eşitlik $\alpha(m)\in Z(R)$ olması kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$0=\alpha\big(d(b)\big)\big(\alpha(d(m)yx)+\alpha(md(y)x-d(x)my)\big)$$
$$-\Big(d\big(\alpha(d(m)yx)-\alpha(md(y)x-d(x)my)\big)\Big)\alpha(b)$$
$$=\alpha\big(d(b)\big)\big(\alpha(d(m)yx)+\sigma(m)\alpha(d(y)x-d(x)y)\big)$$
$$-\Big(d\big(\alpha(d(m)yx)-\alpha(m)\alpha(d(y)x-d(x)y)\big)\Big)\alpha(b)$$

bulunur. Yani her $m\in N_{\alpha,\beta},\ x\in\mu(A),\ y,b\in\mu(B)$ için

$$\alpha\big(d(b)\big)\big(\alpha(d(m)yx)+\sigma(m)\alpha(d(y)x-d(x)y)\big)$$
$$-\Big(d\big(\alpha(d(m)yx)-\alpha(m)\alpha(d(y)x-d(x)y)\big)\Big)\alpha(b)=0$$

olur. Son eşitlik (4.4) eşitliği kullanılarak düzenlendiğinde

$$\alpha\big(d(b)\big)\big(\alpha(d(m)yx)\big)-\Big(d\big(\alpha(d(m)yx)\big)\Big)\alpha(b)=0$$

elde edilir. Bu ise $m\in N_{\alpha,\beta},\ x\in\mu(A),\ y,b\in\mu(B)$ için

$$\alpha(d(b)d(m)yx-d(d(m)yx)b)=0$$

olması demektir. Son elde edilen ifade türev özellikleri kullanılarak düzenlendiğinde

$$0=\alpha(d(b)d(m)yx-d(d(m)yx)b)$$
$$=\alpha(d(b)d(m)yx-d^2(m)yxb-d(m)d(yx)b)$$
$$=\alpha(d(b)d(m)yx-d^2(m)yxb-d(m)d(y)xb-d(m)yd(x)b)$$

bulunur. Yani $m\in N_{\alpha,\beta},\ x\in\mu(A),\ y,b\in\mu(B)$ için

$$\alpha(d(b)d(m)yx-d^2(m)yxb-d(m)d(y)xb-d(m)yd(x)b)=0$$

olur. *Lemma 4.2.1* den $d\big(N_{\sigma,\tau}\big)\subset N_{\sigma,\tau}$ ve *Lemma 4.1.5* den $\sigma(y)\in Z(R)$ dır. Son eşitlik $d\big(N_{\sigma,\tau}\big)\subset N_{\sigma,\tau}$ ve $\sigma(y)\in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $m\in N_{\alpha,\beta},\ x\in\mu(A)$, $y,b\in\mu(B)$ için

$$\alpha\big(d(m)y(d(b)x-d(x)b)-\big(d^2(m)y+d(m)d(y)\big)xb\big)=0$$

olduğu bulunur. (4.4) eşitliği kullanılarak her $m\in N_{\alpha,\beta},\ x\in\mu(A),\ y,b\in\mu(B)$ için

$$\alpha\Big(\big(d^2(m)y+d(m)d(y)\big)xb\Big)=0 \qquad (4.5)$$

elde edilir. $N_{\alpha,\beta}$, R halkasının bir althalkası olduğundan $m\in N_{\alpha,\beta}$ iken $m^2\in N_{\alpha,\beta}$ dır.

Böylece (4.5) eşitliğinde m yerine $m^2 \in N_{\alpha,\beta}$ yazılırsa

$$\alpha\left(\left(d^2(m^2)y + d(m^2)d(y)\right)xb\right) = 0$$

olur. Son ifade $\alpha(m) \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\left(\left(d^2(m^2)y + d(m^2)d(y)\right)xb\right) \\ &= \alpha\left(\left(d\big(d(m)m + md(m)\big)y + \big(d(m)m + md(m)\big)d(y)\right)xb\right) \\ &= \alpha\left(\left(\left(d^2(m)m + d(m)d(m) + d(m)d(m) + md^2(m)\right)y \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \big(d(m)m + md(m)\big)d(y)\right)xb\right) \\ &= \alpha\big(2m\big(d^2(m)y + d(m)d(y)\big)xb + 2d(m)^2yxb\big) \end{aligned}$$

bulunur. Yani her $m \in N_{\alpha,\beta},\ x \in \mu(A),\ y, b \in \mu(B)$ için

$$2\alpha\big(m\big(d^2(m)y + d(m)d(y)\big)xb + d(m)^2yxb\big) = 0$$

olur. R bir 2-torsion free halka olduğundan

$$\alpha\big(m\big(d^2(m)y + d(m)d(y)\big)xb + d(m)^2yxb\big) = 0$$

bulunur. (4.5) eşitliği kullanılarak her $m \in N_{\alpha,\beta},\ x \in \mu(A),\ y, b \in \mu(B)$ için

$$\alpha(d(m)^2yxb) = 0$$

elde edilir. Bu ise

$$\alpha(d(m)^2)\alpha(y)\alpha(x)\alpha(b) = 0$$

olması demektir. *Lemma 4.1.5* uygulandığında her $x \in \mu(A),\ y, b \in \mu(B)$ için $\alpha(y), \alpha(x), \alpha(b) \in Z(R)$ olduğu görülür. $\alpha(d(m)^2)\alpha(y)\alpha(x)\alpha(b) = 0$ eşitliği sağdan keyfi bir $s \in R$ ile çarpılır ve elde edilen ifade $\alpha(b) \in Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $s \in R$ için

$$\alpha(d(m)^2)\alpha(y)\alpha(x)s\alpha(b) = 0$$

olur. Bu ise her $m \in N_{\alpha,\beta},\ x \in \mu(A),\ y, b \in \mu(B)$ için

$$\alpha(d(m)^2)\alpha(y)\alpha(x)R\alpha(b) = (0)$$

demektir. R halkasının asal olması kullanılırsa her $m \in N_{\alpha,\beta},\ x \in \mu(A),\ y, b \in \mu(B)$ için

$$\alpha(d(m)^2)\alpha(y)\alpha(x) = 0 \text{ veya } \alpha(b) = 0$$

olduğu bulunur. Benzer şekilde devam edildiğinde her $m \in N_{\alpha,\beta},\ x \in \mu(A),\ y, b \in \mu(B)$ için

$$\alpha(d(m)^2) = 0 \text{ veya } \alpha(y) = 0 \text{ veya } \alpha(x) = 0 \text{ veya } \alpha(b) = 0$$

olduğu görülür. Bu ise her $m \in N_{\alpha,\beta}$ için

$$\alpha(d(m)^2) = 0 \text{ veya } \alpha\big(\mu(B)\big) = (0) \text{ veya } \alpha\big(\mu(A)\big) = (0)$$

olması demektir. $\alpha\big(\mu(A)\big)$ ve $\alpha\big(\mu(B)\big)$ kümeleri R halkasının sıfırdan farklı altgrupları olduğundan her $m \in N_{\alpha,\beta}$ için

$$\alpha(d(m)^2) = 0$$

elde edilir. Son eşitlikte $n \in N_{\alpha,\beta}$ olmak üzere m yerine $m+n$ yazılır ve elde edilen ifade $\alpha(d(m)^2) = 0$ ve $d\big(N_{\sigma,\tau}\big) \subset N_{\sigma,\tau}$ olması kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha(d(m+n)^2) = \alpha\big(d(m+n)d(m+n)\big) \\
&= \alpha\Big(\big(d(m)+d(n)\big)\big(d(m)+d(n)\big)\Big) \\
&= \alpha\big(d(m)d(m)+d(m)d(n)+d(n)d(m)+d(n)d(n)\big) \\
&= \alpha(d(m)^2+d(m)d(n)+d(n)d(m)+d(n)^2) = \alpha\big(d(m)d(n)+d(n)d(m)\big) \\
&= \alpha\big(2d(m)d(n)\big)
\end{aligned}$$

bulunur. Yani her $m, n \in N_{\alpha,\beta}$ için

$$2\alpha\big(d(m)d(n)\big) = 0$$

demektir. R bir 2-torsion free halka olduğundan her $m, n \in N_{\alpha,\beta}$ için

$$\alpha\big(d(m)d(n)\big) = 0$$

olur. $\sigma\Big(d\big(N_{\sigma,\tau}\big)\Big) \subset Z(R)$ olduğundan $\alpha\big(d(m)\big)\alpha\big(d(n)\big) = 0$ bulunur. Bu ifade sağdan keyfi bir $s \in R$ ile çarpılır ve elde edilen ifade $\sigma\Big(d\big(N_{\sigma,\tau}\big)\Big) \subset Z(R)$ olması kullanılarak düzenlenirse her $m, n \in N_{\alpha,\beta}$ ve $s \in R$ için $\alpha\big(d(m)\big)s\alpha\big(d(n)\big) = 0$ olur. Bu ise

$$\alpha\big(d(m)\big)R\alpha\big(d(n)\big) = (0), \qquad \forall m, n \in N_{\alpha,\beta}$$

olması demektir. R halkasının asal olması kullanılarak her $m \in N_{\alpha,\beta}$ için $\alpha\big(d(m)\big) = 0$ olduğu bulunur. Böylece

$$\alpha\Big(d\big(N_{\alpha,\beta}\big)\Big) = (0)$$

elde edilir. Ancak $d\Big(\sigma\big(N_{\sigma,\tau}\big)\Big) \neq (0)$ kabul edilmişti. Çelişkinin nedeni kabuldür. O halde $[A, B] = (0)$ iken $A = (0)$ veya $B = (0)$ dır. Böylece $f \cdot N_{\alpha,\beta}$, $Gder(R)$ Lie halkasının bir asal Lie althalkasıdır.

BÖLÜM 5
SONUÇ VE ÖNERİLER

Kaya (1988) yaptığı çalışmada R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, I sıfırdan farklı bir ideali, $\sigma,\ \tau$ halka üzerinde iki otomorfizm, d_1 halka üzerinde sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, d_2 sıfırdan farklı bir türev olmak üzere $d_1d_2(I) \subset C_{\sigma,\tau}$ ve $d_2(I) \subset I$ ise R halkası değişmelidir sonucuna ulaşmıştır. Kaya (1988) tarafından ele alınan bu problem α, β halka üzerinde iki otomorfizm olmak üzere σ-asal bir halkanın σ-idealleri üzerinde şu şekilde genelleştirilmiştir: R karakteristiği ikiden farklı olan bir σ-asal halka, β ile σ değişmeli olan R halkasının bir (α,β)-türevi ve $h,\ R$ halkasının σ ile değişmeli olan bir türevi olmak üzere $dh(I) \subset C_{\alpha,\beta}$ ve $h(I) \subset I$ ise R halkası değişmelidir.

R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, $U \not\subset Z(R)$ ve $U \not\subset C_{\alpha,\beta}$ olan R halkasının sıfırdan farklı bir (α,β)-Lie ideali olmak üzere Aydın ve Kandamar (1994) yaptıkları çalışmada şu sonuçlara ulaşmıştır: (i) $[M,R] \subset U$ ancak $[M,R] \not\subset Z(R)$ olan R halkasının sıfırdan farklı bir M ideali vardır, (ii) $a,b \in R$ olmak üzere $aUb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır. Bu problemlerden esinlenerek ilk olarak σ-(α,β)-Lie ideal tanımı verilmiş sonrasında Aydın ve Kandamar (1994) tarafından yukarıda ele alınan problemler σ-asal bir halkanın $Z(R)$ ve $C_{\alpha,\beta}$ tarafından kapsanmayan sıfırdan farklı bir σ-(α,β)-Lie ideali üzerinde şu şekilde genelleştirilmiştir: R karakteristiği ikiden farklı olan bir σ-asal halka, $U,\ R$ halkasının sıfırdan farklı bir σ-(α,β)-Lie ideali, β ile σ değişmeli olsun. $a,b \in R$ olmak üzere $U \not\subset Z(R)$ ve $U \not\subset C_{\alpha,\beta}$ iken $aUb = \sigma(a)Ub = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

R halkası üzerinde tanımlı bütün türevlerin kümesi $D(R)$ ve $a \in R$ olmak üzere $i_a(x) = [a,x]$ olacak şekilde tanımlanan a elemanı ile belirli bütün iç türevlerin kümesi $I(R)$ iken Jacobson (1937) yaptığı çalışmada $\theta: L(R) \to I(R)$ iken her $r \in R$ için $\theta(r) = i_r$ olacak biçimde tanımlanan dönüşümün bir Lie epimorfizma olduğunu ve çekirdeğinin $Z(R)$ olduğunu göstermiştir. Üstelik $Z(R),\ L(R)$ Lie halkasının bir Lie ideali olduğundan $L(R)/Z(R) \cong I(R)$ oluduğunu ifade etmiştir. Jacobson (1937) tarafından yapılan bu çalışmadan yola çıkarak şu sonuçlara ulaşılmıştır:

$(\boldsymbol{i})$ $g: L(R) \to f_R$, her $a \in R$ için $g(a) = f_{-a}$ olacak biçimde tanımlanan dönüşüm bir Lie epimorfizmadır ve çekirdeği $N_{\alpha,\beta}$ dır. Böylece $N_{\alpha,\beta},\ L(R)$ Lie halkasının bir ideali olduğundan $L(R)\ /\ N_{\alpha,\beta} \cong f_R$ dir.

$(\boldsymbol{ii})$ R bir yarıasal halka ve α, R halkası üzerinde bir epimorfizma olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- $h: f_R \to I(R)$, her $f_a \in f_R$ için $h(f_a) = i_{-\alpha(a)}$ olacak biçimde tanımlanan dönüşüm bir Lie epimorfizmasıdır ve çekirdeği $l(f_R)$ dır. Böylece $l(f_R)$, f_RLie halkasının bir ideali olduğundan $f_R \,/\, l(f_R) \cong I(R)$ dir.
- $hg = \theta\alpha$ dır.

Jordan ve Jordan (1978) yaptıkları çalışmada R değişmeli bir halka olmak üzere $\delta \in D(R)$ ve $r \in R$ iken $R\delta = \{r\delta \mid r \in R\}$ kümesinin $D(R)$ Lie halkasının bir Lie althalkası olduğunu göstermişlerdir. Çeşitli koşullar altında $R\delta$ Lie halkasının asal olduğu sonucuna varmışlardır. Ali ve Chaudhry (2011) yaptıkları çalışmada R değişmeli olmayan bir halka iken $F \in Gder(R)$ ve $r \in Z(R)$ iken $Z(R)F = \{rF \mid r \in Z(R)\}$ kümesinin $Gder(R)$ Lie halkasının bir Lie althalkası olduğu göstermiş ve bazı durumlarda $Z(R)F$ Lie halkasının asal olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bu çalışmada ise R halkasının yarıasal olması durumunda $f \in Gder(R)$ için

$$f \cdot N_{\alpha,\beta} = \{f \cdot n : R \to R \,|(f \cdot n)(r) = f(r)\alpha(n), n \in N_{\alpha,\beta}\}$$

kümesinin $Gder(R)$ Lie halkasının bir Lie althalkası olduğu gösterilmiştir. Bazı koşullar altında $f \cdot N_{\alpha,\beta}$ Lie halkasının asal olduğu sonucuna varılmış ve şu şekilde ifade edilmiştir: R bir 2-torsion free asal halka, f bir d türevi ile belirli R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi, d, α ve β ile değişmeli ve $d\left(\alpha\left(N_{\alpha,\beta}\right)\right) \neq (0)$ olsun. Bu durumda $f \cdot N_{\alpha,\beta}$, $Gder(R)$ Lie halkasının bir asal Lie althalkasıdır.

KAYNAKLAR

Ali A., Kumar D., 2007. Derivation which Acts as a Homomorphism or as an Anti-homomorphism in a Prime Ring. International Mathematical Forum 2(23): 1105-1110.

Ali F., Chaudhry M. A., 2011. On a Lie ring of Generalized Derivations of Non-Commutative Rings. Int. J. of Algebra 5(8): 397-402.

Aydın N., Kaya K., 1992. Some Generalizations in Prime Rings with (σ,τ)-Derivation. Doğa-Tr. J. Mathematics 16: 169-176.

Aydın N., Kandamar H., 1994. (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings. Tr. J. of Math. 18: 143-148.

Aydın N., 1999. Notes On Generalized Lie Ideals. Analele Universitatii din Timişoara XXXVII(2): 7-13.

Bergen J., Herstein I.N., Kerr, J.W., 1981. Lie Ideals and Derivation of Prime Rings. J. of Algebra 71: 259-267.

Breśar M., 1991. On the Distance of the Composition of Two Derivations to the Generalized Derivations. Glasgow Math. J. 33(1): 89-93.

Breśar M., 2014. Introduction to Noncommotative Algebra. Springer. 31.

Chang J. C., 1997. A Special Identity of (α,β)-Derivations and its Consequences. Twiwanese Journal of Mathematics 1(1): 21-30.

Jacobson N., 1937. Abstract Derivation and Lie Algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 42: 206-224.

Jordan C. R., Jordan D. A., 1978. Lie Rings of Derivations of Associative Rings. J. London Math. Soc. 17(2): 33-41.

Herstein I. N., 1979. A Note on Derivation II. Canad. Math. Bull. 22(4): 509-511.

Kaya K., 1988. (σ,τ)-Türevli Asal Halkalar Üzerine. Doğa-Tr. J. Mathematics 42-45.

Khan M. R., Hasnain M. M., 2013. Some Theorems for Sigma Prime Rings with Differential Identities on Sigma Ideals. Hindawi Publishing Corporation ISRN

Algebra doi:10.1155/2013/572690.

Khan M. R., Hasnain M. M., 2013. On Generalized Derivations in Nearrings. Hindawi Publishing Corporation Chinese Journal of Mathematics doi:10.1155/2013/752928.

Mccoy N. H., 1964. The Theory of Rings. The Macmillan Company, New York. 161 p.

Oukhtite L., Salhi S., 2006. Derivations and Commutativity of σ-Prime Rings. Int. J. Contemp. Sci. 1(9): 439-448.

Oukhtite L., Salhi S., 2007. σ-Prime Rings with a Special Kind of Automorphism. Int. J. Contemp. Math. Sci. 2(3): 127-133.

Oukhtite L., Salhi S., 2008. Centralizing Automorphisms and Jordan Left Derivations of σ-Prime Rings. Advances in Algebra 1(1): 19-26.

Oukhtite L., 2010. On Jordan ideals and derivations in rings with involution. Comment. Math. Univ. Carolin 51(3): 389–395.

Posner E., 1957. Derivations in Prime Rings. Proc. Amer. Math. Soc. 8: 1093-1100.

Shuliang H., 2010. A Note On Lie Ideals of Prime Rings. Commun. Korean Math. Soc. 25(3): 327-333.

Shuliang H., 2012. On Generalized Derivations of Prime and Semiprime Rings. Taiwanese Journal of Mathematics 16(2): 771-776.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Selin TÜRKMEN

Doğum Yeri : Bakırköy/İSTANBUL

Doğum Tarihi : 17.12.1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar -SCI -Diğer

- Türkmen S., Aydın N., 2015. Some Results on σ-Ideal of σ-Prime Ring. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 44(5): 1147-1156.

İLETİŞİM

E-posta Adresi : selinvurkac@gmail.com