T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

DERECELİ DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARI

Ramazan EKMEKÇİ

Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

DERECELİ DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARI

Ramazan EKMEKÇİ

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **23/12/2016**

Tez Danışmanı:

Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN

Eş Danışman:

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK

ÇANAKKALE

TEZ SINAVI SONUÇ FORMU

Ramazan EKMEKÇİ tarafından Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN yönetiminde ve Prof. Dr. Rıza ERTÜRK ikinci danışmanlığında hazırlanan ve **23/12/2016** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**Dereceli Ditopolojik Doku Uzayları**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK ……………………
Başkan

Prof. Dr. Ali Haydar EŞ ……………………
Üye

Prof. Dr. Neşet AYDIN ……………………
Üye

Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN ……………………
Üye

Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI ……………………
Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:………

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Ramazan EKMEKÇİ

TEŞEKKÜR

Öncelikle; bu tezin ortaya çıkmasında yardımlarını esirgemeyen ve lisansüstü öğrenimim boyunca her anlamda yanımda olan değerli hocam Prof. Dr. Rıza ERTÜRK'e teşekkür ederim.

Ayrıca bana tecrübesi ile yol gösterip destek olan Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN'a; tez çalışmalarıma öneri ve emekleriyle katkıda bulunan, Tez İzleme Komitesi'nde bulunan hocalarım Prof. Dr. Neşet AYDIN'a ve Prof. Dr. Ali Haydar EŞ'e teşekkür ederim.

Son olarak, doktora öğrenimimde bana maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Ramazan EKMEKÇİ

Çanakkale, Aralık 2016

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathcal{P}(X)$	X in kuvvet kümesi
$\vee$	Supremum (sup)
$\wedge$	İnfimum (inf)
$(S, \mathcal{S})$	Doku uzayı
$(S, \mathcal{S}, \sigma)$	Tümleyenli doku uzayı
P_s	p-küme
Q_s	q-küme
A^b	A nın çekirdeği
(r, R)	Dibağıntı
$(r, R)^{\leftarrow}$	Dibağıntının tersi
(f, F)	Difonksiyon
$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$	Ditopolojik doku uzayı
$(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$	Dereceli ditopolojik doku uzayı
N_s	s noktasının dereceli komşuluk sistemi
M_s	s noktasının dereceli kokomşuluk sistemi
$\widetilde{N}_s$	s noktasının dereceli q-komşuluk sistemi
$\widetilde{M}_s$	s noktasının dereceli q-kokomşuluk sistemi
$F \times G$	Disüzgeç
$(\mathcal{F}, \mathcal{G})$	Dereceli disüzgeç

ÖZET

DERECELİ DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARI

Ramazan EKMEKÇİ
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN
İkinci Danışman : Prof. Dr. Rıza ERTÜRK
23/12/2016, 87

Herhangi bir küme veya aile üzerinde topolojik yapıyı oluşturabilmek için komşuluk ve süzgeç kavramlarının önemli bir rolü bulunmaktadır. L. M. Brown ve A. Šostak, bir doku üzerinde dereceli ditopolojik uzay kavramını tanıtıp bu yapının kategorik anlamındaki bazı özelliklerini çalıştılar. Bu doğrultuda, bu tez çalışmasında, doku uzayları üzerinde dereceli dikomşuluk sistemleri ile dereceli disüzgeç kavramları tanımlanıp bu kavramların dereceli ditopolojik uzaylarla olan ilişkisi ve bunların bazı özellikleri çalışılmıştır.

Tezin birinci bölümünde tez konusuna giriş yapıldı. İkinci bölümde tezde kullanılacak temel tanım ve kavramlar ve bazı teoremler verildi.

Tezin üçüncü bölümünde dereceli ditopolojik doku uzayları için uygun taban ve alttaban yapısı oluşturuldu ve incelendi.

Tezin dördüncü bölümü iki kısımdan oluşmuştur. İlk kısımda ditopolojik doku uzaylarındaki komşuluk yapısı, dereceli ditopolojik doku uzaylarına genelleştirilmiş ve bu yeni yapı kategorik olarak incelenmiştir. İkinci kısımda ise, tümleyenli dokular üzerindeki *"kuazi-uyumluluk"* kavramı yardımıyla tanımlanan dereceli q-dikomşuluk sistemi çalışılmıştır. Ayrıca bu iki tür komşuluk yapısının birbirlerine göre avantaj ve dezavantajları irdelenmiştir.

Tezin beşinci bölümünde, ditopolojik doku uzayları üzerindeki disüzgeç yapısı dereceli ditopolojik doku uazylarına genelleştirilmiş; disüzgeçlerin ve dereceli disüzgeçlerin özellikleri karşılaştırılmıştır. Son olarak, altıncı bölüm sonuç ve öneriler bölümüdür.

Anahtar sözcükler: Doku, Dereceli Ditopoloji, Komşuluk, Dereceli Disüzgeç, Fuzzy Topoloji.

ABSTRACT

GRADED DITOPOLOGICAL TEXTURE SPACES

Ramazan EKMEKÇİ

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Doctoral Dissertation in Mathematics

Advisor : Assist. Prof. Dr. Hasan DALGIN

Co-Advisor: Prof. Dr. Rıza ERTÜRK

23/12/2016, 87

The concepts of neighborhood and filter have a crucial role to construct a topological structure on any set or family of sets. L. M. Brown and A. Šostak have introduced the concept of graded ditopological space on a texture and studied some properties of this structure in categarical view. Consequently, in this thesis, the concepts of graded dineighborhood systems and graded difilters on texture spaces is defined; some of the properties of these concepts and also the relations between these concepts and graded ditopological spaces are studied.

The first chapter of the thesis is the introduction. In the second chapter fundamental definitions and notions and some essential theorems for the thesis are given.

In the third chapter of the thesis, the structures of base and subbase for the graded ditopological texture spaces are presented and investigated.

The fourth chapter of the thesis is composed of two sections. In the first section the neighborhood structure of ditopological texture spaces is generalized to the graded ditopological texture spaces and this new structure is categorically investigated. In the second section the graded q-dineighborhood system defined by means of the concept of *"quasi-coincident"* on the complemented textures is studied. Moreover these two sorts of neighborhood structures are compared with each other.

In the fifth chapter of the thesis, the structure of difilters in ditopological texture spaces is generalized to the graded ditopological texture spaces and the properties of difilters and graded difilters are compared. Finally the sixth chapter is the conclusion chapter.

Keywords: Texture, Graded Ditopology, Neighborhood, Graded Difilter, Fuzzy Topology.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Bu tez çalışmasının amacı, dereceli ditopolojik doku uzayları üzerinde komşuluk sistemi yapısı ve süzgeç yapısı oluşturmak ve bu yapıların hem dereceli ditopolojilerle hem de genellemesi oldukları yapılarla olan ilişkisini incelemektir.

Fuzzy topolojik uzay kavramı, Chang (1968) tarafından bir kümenin bütün fuzzy altkümeleri ailesinin belirli koşulları sağlayan bir altailesi olarak tanımlanmıştır ki bu yapıda kümeler fuzzy kümelerdir ancak tanımlanan topolojide fuzzy kümelerin açık veya kapalı olarak alınması klasik mantık çerçevesindedir. Fuzzy mantığa daha uygun bir yaklaşımla, Šostak (1985) ve Kubiak (1985) birbirinden bağımsız olarak, bir fuzzy altkümenin açık olup olmamasından ziyade açıklık derecesinin söz konusu olduğu fuzzy topoloji kavramını yeniden tanımlamışlardır. Bundan yedi yıl sonra bu yapı Ramadan (1992) tarafından "smooth topoloji" ve Chattopadhyay (1992) tarafından "dereceli fuzzy topoloji" adlarıyla yeniden tanımlanmıştır.

Demirci (1997) smooth topolojik uzaylar üzerinde iki çeşit komşuluk kavramı tanımlamış ve bu yapıları incelemiştir.

Klasik topolojideki tanımlamalarda genellikle birincil olarak açık küme kavramı veya ikincil olarak kapalı küme kavramları temel olarak alınır. Kapalı kümeler, açık kümelerin tümleyeni olarak kolayca elde edilebildiği için topolojik problemlerde önemli bir role sahiptir. Benzer bir durum sırayı tersine çeviren "involüsyon" işleminin küme tümleyeni rolü oynadığı latisler üzerindeki topolojilerde de mevcuttur. Ancak böyle bir sırayı tersine çeviren involüsyonun mümkün olmadığı ya da alakasız olduğu durumlar söz konusu olabilir. Bu tür durumlarla baş edebilmek için açık ve kapalı kümelerin birbirinden bağımsız olduğu bir topolojik yapı düşünmek doğaldır. İşte bu yaklaşım; ilk olarak Brown (1993a,b) tarafından fuzzy kümelerin nokta-tabanlı bir karşılığı olarak sunulan ve daha sonra Brown ve Diker (1998) ve Brown ve Ertürk (2000a,b) tarafından geliştirilen doku üzerinde topolojik yapı tanımlama düşüncesine temel oluşturmuştur. Bu topolojik yapı, yukarıdaki yazarlar tarafından, doku uzayları üzerinde ditopoloji adıyla tanımlandı ve ditopolojik doku uzayları teorisi bir çok araştırmacı tarafından çalışıldı.

S boş olmayan bir küme olmak üzere, S üzerindeki bir $\mathcal{S}$ dokusu $\mathcal{P}(S)$ kuvvet kümesinin belirli koşulları sağlayan bir altailesidir. $(S, \mathcal{S})$ ikilisine bir doku uzayı veya kısaca doku denir. Genelde dokular kümesel tümleyen işlemi altında kapalı değildir.

Bir doku üzerindeki bir ditopoloji birbirinden bağımsız açık ve kapalı küme aileleri ile tanımlanır. $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerindeki bir ditopoloji $\tau, \kappa \subseteq \mathcal{S}$ olmak üzere (τ, κ) çiftidir. Burada τ; $\emptyset, S$ yi kapsayan sonlu inf ve keyfi sup altında kapalı bir ailedir ve elemanları açık kümeler olarak adlandırılır. κ ise $\emptyset, S$ yi kapsayan sonlu sup ve keyfi inf altında kapalı bir ailedir ve elemanları kapalı kümeler olarak adlandırılır. Yani ditopoloji, açık ve kapalı kümeleri arasında bağlantı bulunmayan bir topolojik yapıdır. Başka bir deyişle, bir ditopoloji için açık ve kapalı küme kavramlarının her ikisi de birincildir.

Bir $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık dokusu üzerindeki bir (τ, κ) ditopolojisi, (X, τ, κ^c) ikili topolojik uzayına karşılık gelir. Ditopolojilerin ikili topolojik uzaylarla olan bu ilişkisinin, ditopolojik doku uzayları teorisinin gelişmesinde güçlü bir etkisi olmuştur ancak ditopolojinin ve ikili topolojinin farklı kavramlar olduklarına vurgu yapmak gerekir. Bir ikili topoloji, (bütün açık ve kapalı kümeleriyle birlikte) iki ayrı topolojik yapı barındırmasına karşın; bir ditopoloji tek bir topolojik yapıdır. Ditopoloji yapısı, klasik topolojiden, ikili topolojiden ve Chang anlamında fuzzy topolojiden daha genel bir yapıdır.

Özçağ ve ark. (2005) ditopolojik doku uzaylarında disüzgeçleri tanımlamış ve regüler disüzgeçlerin yakınsaklıklarını araştırmışlardır.

Brown ve Šostak (2014) doku uzayları üzerinde, ditopolojilerin bir genellemesi olarak, açıklığın ve kapalılığın birbirinden bağımsız iki derecelendirme fonksiyonu olarak verildiği "dereceli ditopoloji" kavramını sunmuşlardır ve bu yeni yapıyı kategorik anlamda araştırmışlardır. Dereceli ditopoloji kavramı, ditopoloji ve Šostak anlamındaki fuzzy topoloji kavramlarından daha geneldir.

Tezin ikinci bölümünde tezde kullanılacak temel tanım ve kavramlar ve bazı teoremler verildi.

Tezin üçüncü bölümünde, dereceli ditopolojik uzaylar ve ditopolojik uzaylar arasındaki ilişki kullanılarak dereceli ditopolojik doku uzayları için uygun taban ve alttaban yapısı oluşturulmuş ve incelenmiştir.

Tezin dördüncü bölümünün ilk kısmında ditopolojik doku uzaylarındaki komşuluk yapısı, dereceli ditopolojik doku uzaylarına genelleştirilmiş ve bu yeni yapı kategorik olarak incelenmiştir. İkinci kısımda ise, tümleyenli dokular üzerinde *"kuazi-uyumluluk"* kavramı yardımıyla tanımlanan dereceli q-dikomşuluk sistemi çalışılmıştır. Ayrıca bu iki tür komşuluk yapısının birbirlerine göre avantaj ve dezavantajları irdelenmiştir.

Tezin beşinci bölümünde, ditopolojik doku uzayları üzerindeki disüzgeç yapısı dereceli ditopolojik doku uzaylarına genelleştirilmiş; disüzgeçlerin ve dereceli disüzgeçlerin özellikleri karşılaştırılmıştır. Son olarak, altıncı bölüm sonuç ve öneriler bölümüdür.

BÖLÜM 2
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Latis Teori

Latis Teori başlığı altındaki bu kısım Yıldız (2005) tarafından hazırlanan yüksek lisans tezinden alınmıştır.

Tanım 2.1.1. Bir P kümesi üzerinde, aşağıdaki üç koşulu sağlayan bir $\leq$ bağıntısına *kısmi sıralama bağıntısı* ve $(P, \leq)$ ikilisine de *kısmi sıralı küme* denir:

(i) Her $x \in P$ için, $x \leq x$ (yansıma)

(ii) Her $x, y \in P$ için, $x \leq y$ ve $y \leq x \Longrightarrow x = y$ (ters simetri)

(iii) Her $x, y \in P$ için, $x \leq y$ ve $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (geçişlilik).

Bir $(P, \leq)$ kısmi sıralı kümesinde her $x, y \in P$ için, $x \leq y$ ya da $y \leq x$ oluyorsa, yani P nin herhangi iki elemanı karşılaştırılabilir ise $\leq$ bağıntısına *tam sıralama bağıntısı* ve $(P, \leq)$ ikilisine de *tam sıralı kümedir* denir.

Örnek 2.1.2. (1) P, bir m tamsayısının pozitif tam sayı bölenleri kümesi ve $a, b \in P$ için "$a \leq b \Leftrightarrow a, b\ yi\ böler$" olsun. Bu durumda, $(P, \leq)$ bir kısmi sıralı kümedir.

(2) $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi, bilinen $\leq$ bağıntısı ile bir tam sıralı kümedir.

(3) Bir X kümesinin tüm alt kümeleri ailesi $\mathcal{P}(X)$ üzerinde; her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için, "$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$" biçiminde tanımlanan bağıntı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

(4) $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $X^{\mathbb{R}}$, X üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonların kümesi olsun. Her $f, g \in X^{\mathbb{R}}$ için,

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X, f(x) \leq g(x)$$

ile tanımlı $\leq$ bağıntısı, $X^{\mathbb{R}}$ kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.1.3. $(P, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $k, b \in P$ olsun. Eğer $\forall x \in P$, $(b \leq x \Longrightarrow x = b)$ koşulu sağlanıyorsa b ye *büyükçe eleman* denir. Eğer $\forall x \in P$, $(x \leq k \Longrightarrow x = k)$ koşulu sağlanıyorsa k ye *küçükçe eleman* denir.

A, P nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Her $x \in A$ için $a \leq x$ biçimindeki bir $a \in P$ elemanına A nın bir *alt sınırı*, alt sınırlarının en büyüğüne de A kümesinin *en büyük alt sınırı* (*infimumu*) denir. Eğer A nın en büyük alt sınırı varsa tektir ve $\inf A$ ile gösterilecektir. Benzer şekilde, $x \in A$ için $x \leq b$ biçimindeki bir $b \in P$ elemanına A nın bir *üst sınırı*, üst sınırlarının en küçüğüne de A kümesinin *en küçük üst sınırı* (*supremumu*) denir. Eğer A nın en küçük üst sınırı varsa tektir ve $\sup A$ ile gösterilecektir.

P içindeki bütün elemanlardan daha küçük veya eşit bir $a \in P$ elemanına, P nin *en* *küçük elemanı* denir. P içindeki bütün elemanlardan daha büyük veya eşit bir $b \in P$ elemanına, P nin *en büyük elemanı* denir. Verilen bir kısmi sıralı kümenin en büyük ya da en küçük elemanı olmayabilir. Ancak bu elemanlardan birisi varsa, söz konusu eleman tektir.

Tanım 2.1.4. $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. L nin iki elemanlı her $\{x, y\}$ altkümesinin en büyük alt sınırı ve en küçük üst sınırı varsa $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine bir *latis* denir. $x, y \in L$ için, $\{x, y\}$ kümesinin en büyük alt sınırı $x \wedge y$, en küçük üst sınırı $x \vee y$ ile gösterilir.

Her $x, y \in L$ için,

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$$

özelliğinden faydalanılarak, $\vee$ ve $\wedge$ işlemlerinin her $x, y, z \in L$ için, aşağıdaki dört özelliği sağladığı görülebilir.

(L1) $x \vee x = x$ ve $x \wedge x = x$,

(L2) $x \vee y = y \vee x$ ve $x \wedge y = y \wedge x$,

(L3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ve $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,

(L4) $(x \vee y) \wedge x = x$ ve $(x \wedge y) \vee x = x$.

Diğer taraftan, bir L kümesi üzerinde (L1) - (L4) koşullarını sağlayan $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri verilmiş olsun. Bu durumda, " $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$" kuralıyla tanımlı $\leq$ bağıntısı, L üzerinde her $x, y \in L$ için $\sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ eşitliklerini sağlayan bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.1.5. $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. L nin boştan farklı her altkümesinin supremumu ve infimumu varsa $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine *tam latis* denir. $A \subseteq L$ için $\sup A = \bigvee A$ ve $\inf A = \bigwedge A$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.6. (1) $(\mathbb{R}, \leq)$, bir latistir ama tam latis değildir. Çünkü $\mathbb{R}$ nin en büyük elemanı yoktur.

(2) $\mathbb{I} = [0, 1]$ bilinen sıralamayla bir tam latistir.

(3) $X \neq \emptyset$ için $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ bir tam latistir. $\mathcal{P}(X)$ de bir altailenin infimumu bu ailenin arakesiti ve supremumu da bu ailenin birleşimidir.

Teorem 2.1.7. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$, keyfi arakesit altında kapalı bir aile ve $X \in \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda $(\mathcal{L}, \subseteq)$ bir tam latistir.

Sonuç 2.1.8. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $(\mathcal{L}, \subseteq)$ bir tam latis ve $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda,

$$\bigvee \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{L}$$

dir.

Tanım 2.1.9. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $(L, \leq)$ latisine *dağılımlı latis* denir.

(i) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$

(ii) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

Tanım 2.1.10. $(L, \leq)$ bir latis olsun. Her I indeks kümesi, $i \in I$ ve J_i indeks kümesi için, $j \in J_i$ ve $a_j^i \in L$ olmak üzere

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} a_j^i = \bigvee_{\gamma \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} a_{\gamma(i)}^i$$

oluyorsa $(L, \leq)$ latisi *tamamen dağılımlıdır* denir.

Teorem 2.1.11.

(1) X boş olmayan bir küme olsun. Bu durumda $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ tam latisi tamamen dağılımlıdır.

(2) $L = (0,1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, r] \mid r \in [0,1]\}$ olsun. Bu durumda $(\mathcal{L}, \subseteq)$ bir tam, tamamen dağılımlı latistir.

(3) $I = [0,1]$ ve $\mathcal{J} = \{[0, r] \mid r \in I\} \cup \{[0, r) \mid r \in I\}$ olsun. Bu durumda $(\mathcal{J}, \subseteq)$ bir tam, tamamen dağılımlı latistir.

Tanım 2.1.12. Bir tam, tamamen dağılımlı $\mathbb{L}$ latisi, aşağıdaki özellikleri sağlayan ve *involüt* olarak isimlendirilen (sırayı tümleme altında tersine çeviren) $' : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$ işlemine sahipse, $(\mathbb{L}, ')$ ikilisine *fuzzy latis* ya da *Hutton cebiri* denir.

(1) Her $a \in \mathbb{L}$ için $(a')' = a$,

(2) Her $a, b \in \mathbb{L}$ için $a \leq b \Leftrightarrow b' \leq a'$.

Tanım 2.1.13. $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ Hutton cebirleri ve $f : \mathbb{L}_1 \longrightarrow \mathbb{L}_2$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu, keyfi inf ve sup ile involütü koruyan bire bir ve örten ise f ye bir *Hutton cebiri izomorfizması* denir.

Tanım 2.1.14. $(L, \leq)$, en küçük elemanı 0 olan bir latis ve $m \in L$ olsun. Eğer $m \leq a \vee b$ olan her $a, b \in L$ için $m \leq a$ veya $m \leq b$ oluyorsa m ye $\vee$-*indirgenemez* denir. Eğer m, $\vee$-indirgenemez ve $m \neq 0$ ise m ye L nin bir *molekülü* adı verilir.

$(L, \leq)$ latisinin moleküllerinin kümesi M ile gösterilsin. Her $a \in L$ için $a = \bigvee\{m \in M \mid m \leq a\}$ olur. Bu anlamda M kümesi, L latisinin bir tabanı olarak düşünülebilir.

Tanım 2.1.15. $(\mathbb{L}, ')$ bir Hutton cebiri ve X boştan farklı bir küme olsun. $\mathbb{W} = \mathbb{L}^X = \{f \mid f : X \longrightarrow \mathbb{L}\}$ biçiminde tanımlı küme, $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X, f(x) \leq g(x)$ noktasal sıralaması ve $f'(x) = f(x)'$ involütü ile bir Hutton cebiridir. Bu Hutton cebirinin en küçük elemanı her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olan $f \in \mathbb{L}^X$ ve en büyük elemanı her $x \in X$ için $g(x) = 1$ olan $g \in \mathbb{L}^X$ dir. Elde edilen bu $(\mathbb{W}, ') = (\mathbb{L}^X, ')$ Hutton cebiri, $\mathbb{L}$-*Hutton cebiri* olarak anılacaktır.

2.2. Fuzzy Topolojik Uzaylar

X boştan farklı bir küme olmak üzere, bir $\mu : X \longrightarrow I = [0, 1]$ dönüşümüne bir fuzzy (alt)küme denir Zadeh (1965). Bu bağlamda, klasik anlamdaki $A \subseteq X$ altkümesini belirtmek için, karakteristik fonksiyon $A = \chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ kullanılırken; $x \in X$ için $\mu(x)$, x noktasının μ fuzzy kümesindeki üyelik derecesini temsil eder. $\mu \in I^X$ fuzzy kümesinin tümleyeni $\mu^c = 1 - \mu$ olarak tanımlanır. Ayrıca her $x \in X$, $\mu_1, \mu_2 \in I^X$ için; $(\mu_1 \wedge \mu_2)(x) = \mu_1(x) \wedge \mu_2(x)$ ve $(\mu_1 \vee \mu_2)(x) = \mu_1(x) \vee \mu_2(x)$ olup I^X bir fuzzy latistir.

X, Y kümeler ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bir $\mu \in I^X$ fuzzy altkümesinin f altındaki resmi $f(\mu) \in I^Y$

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup\{\mu(x) : x \in f^{-1}(y)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

biçiminde; bir $\nu \in I^Y$ fuzzy altkümesinin f altındaki ters resmi $f^{-1}(\nu) \in I^X$ de $f^{-1}(\nu)(x) = \nu\big(f(x)\big)$ biçiminde tanımlıdır (Šostak, 1989).

Tanım 2.2.1. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tau \subseteq I^X$ailesine Chang anlamında bir *fuzzy topoloji* denir (Chang, 1968):

(i) $0 \in \tau$ ve $1 \in \tau$

(ii) $\mu_1, \mu_2 \in \tau$ ise $\mu_1 \wedge \mu_2 \in \tau$

(iii) J bir indeks kümesi olmak üzere, $i \in J$ için $\mu_i \in \tau$ ise $\bigvee_i \mu_i \in \tau$ dir.

(X, τ) ve (Y, δ) fuzzy topolojik uzaylar, $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\mu \in \delta$ için $f^{-1}(\mu) \in \tau$ oluyorsa, f ye *fuzzy süreklidir* denir Chang, (1968). Burada verilen fuzzy topoloji ve fuzzy süreklilik tanımlarından, klasik anlamda bilinen her sabit fonksiyonun sürekli olması özelliği sağlanmamaktadır. Bu nedenle, fuzzy topoloji kavramı Lowen (1976) tarafından bu özelliğin sağlanacağı şekilde, aşağıdaki gibi yeniden tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.2. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tau \subseteq I^X$ailesine Lowen anlamında bir *fuzzy topoloji* denir (Lowen, 1976):

(i) $\forall \alpha \in I$ sabiti için $\alpha \in \tau$

(ii) $\mu_1, \mu_2 \in \tau$ ise $\mu_1 \wedge \mu_2 \in \tau$

(iii) J bir indeks kümesi olmak üzere, $i \in J$ için $\mu_i \in \tau$ ise $\bigvee_i \mu_i \in \tau$ dir.

Buraya kadar verilen fuzzy topoloji tanımlarında, bir fuzzy altküme ya açıktır ya da değildir veya ya kapalıdır ya da değildir. Bu nedenle Šostak (1985), fuzzy mantığa daha uygun bir yaklaşımla, fuzzy topoloji kavramını, bir fuzzy altkümenin açık olup olmamasından ziyade, bu kümenin açıklık derecesini tanımlayacak şekilde, aşağıdaki gibi yeniden tanımlamıştır.

Tanım 2.2.3. X bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tau : I^X \longrightarrow I$ fonksiyonuna X üzerinde bir *fuzzy topoloji* ve (X, τ) ikilisine de *fuzzy topolojik uzay* denir (Šostak, 1985):

(FT1) $\tau(0) = \tau(1) = 1$

(FT2) $\mu, \nu \in I^X \Longrightarrow \tau(\mu \wedge \nu) \geq \tau(\mu) \wedge \tau(\nu)$

(FT3) $\forall i \in I, \mu_i \in I^X \Longrightarrow \tau(\bigvee_{i \in I} \mu_i) \geq \bigwedge_{i \in I} \tau(\mu_i)$

$\tau(\mu)$ reel sayısına μ fuzzy kümesinin açıklık derecesi denir.

$\tau^* : I^X \longrightarrow I$, her $\mu \in I^X$ için, $\tau^*(\mu) = \tau(\mu^c)$ biçiminde tanımlansın. $\tau^*(\mu)$ sayısına μ fuzzy kümesinin kapalılık derecesi denir. Bu şekilde tanımlanan $\tau^* : I^X \longrightarrow I$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

(FT1)* $\tau^*(0) = \tau^*(1) = 1$

(FT2)* $\mu, \nu \in I^X \Longrightarrow \tau^*(\mu \vee \nu) \geq \tau^*(\mu) \wedge \tau^*(\nu)$

(FT3)* $\forall i \in I, \mu_i \in I^X \Longrightarrow \tau^*(\bigwedge_{i \in I} \mu_i) \geq \bigwedge_{i \in I} \tau^*(\mu_i)$

Bir fuzzy topolojik uzay, (FT1)*, (FT2)*, (FT3)* özelliklerini sağlayan bir $\tau^* : I^X \longrightarrow I$ dönüşümü yardımıyla da tanımlanabilir. τ^* dönüşümüne karşılık gelen fuzzy topoloji τ, her $\mu \in I^X$ için, $\tau(\mu) = \tau^*(\mu^c)$ biçiminde tanımlanır.

(X, τ) ve (Y, δ) fuzzy topolojik uzaylar, $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\mu \in I^X$ için $\tau\big(f^{-1}(\mu)\big) \geq \delta(\mu)$ oluyorsa, f ye *fuzzy süreklidir* denir (Šostak, 1985).

Yukarıdaki tanımda; $\tau : I^X \longrightarrow I$ yerine $\tau : I^X \longrightarrow \{0,1\}$ olarak alınırsa, Chang anlamında fuzzy topoloji ve $\tau : \{0,1\}^X \longrightarrow \{0,1\}$ olarak alınırsa klasik anlamda topoloji elde edilir.

Tanım 2.2.4. X bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tau : I^X \longrightarrow I$ fonksiyonuna X üzerinde bir *smooth topoloji* ve (X, τ) ikilisine de *smooth topolojik uzay* denir (Ramadan, 1992):

(ST1) $\tau(0) = \tau(1) = 1$

(ST2) $\mu, \nu \in I^X \Longrightarrow \tau(\mu \wedge \nu) \geq \tau(\mu) \wedge \tau(\nu)$

(ST3) $\forall i \in I, \mu_i \in I^X \Longrightarrow \tau(\bigcup_{i \in I} \mu_i) \geq \bigwedge_{i \in I} \tau(\mu_i)$.

Šostak (1985) ve Ramadan (1992) tarafından birbirinden bağımsız olarak yapılan bu tanımlar aynı yapıyı oluşturmaktadır. Bu nedenle, bütünlüğü sağlamak için, tez boyunca smooth topoloji kavramı yerine Šostak (1985) tarafından tanımlanan fuzzy topoloji kavramı kullanılacaktır.

Not 2.2.5. (X,τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $\alpha \in I$ olmak üzere $\tau_\alpha = \{\mu \in I^X : \tau(\mu) \geq \alpha\}$ olsun. Bu durumda, her $\alpha \in I$ için τ_α Chang anlamında fuzzy topolojidir ve $\tau_0 = I^X$ dir (Šostak, 1989).

Tanım 2.2.6. X boştan farklı bir küme ve $p \in I^X$ olsun. Bir $x \in X$ için $p(x) > 0$ ve $y \neq x$ olan her $y \in X$ için $p(y) = 0$ ise p ye X kümesinin bir *fuzzy noktası* denir ve $p(x) = \lambda$ olmak üzere, x_λ ile gösterilir. $\mu \in I^X$ fuzzy kümesi için; $\mu(x) \geq \lambda$ ise $x_\lambda \in \mu$ yazılır, $\mu(x) + \lambda > 1$ ise x_λ, μ ile kuazi-uyumludur denir ve bu durum $x_\lambda\, q\, \mu$ ile gösterilir ve $\mu(x) + \lambda \leq 1$ ise x_λ, μ ile kuazi-uyumlu değildir denir ve bu durum $x_\lambda\, \bar{q}\, \mu$ ile gösterilir (Šostak, 1989).

$K : I^X \longrightarrow I$ bir dönüşüm ve $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere $K^\alpha = \{\mu \in I^X : K(\mu) > \alpha\}$ biçiminde gösterilsin.

Tanım 2.2.7. p, boştan farklı bir X kümesinin bir fuzzy noktası ve (X,τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. $N_p,\ Q_p : I^X \longrightarrow I$ dönüşümler olmak üzere, eğer her $\alpha \in [0,1)$ için;

(a) $N_p^\alpha = \{\mu \in I^X \mid \exists \nu \in \tau^\alpha : p \in \nu \subseteq \mu\}$ oluyorsa N_p ye p nin *fuzzy komşuluk sistemi* ve $\mu \in I^X$ olmak üzere, $N_p(\mu)$ reel sayısına da μ fuzzy altkümesinin p fuzzy noktasının komşuluğu olma derecesi denir.

(b) $Q_p^\alpha = \{\mu \in I^X \mid \exists \nu \in \tau^\alpha : p\, q\, \nu,\ \nu \subseteq \mu\}$ oluyorsa Q_p ye p nin *fuzzy q-komşuluk sistemi* ve $\mu \in I^X$ olmak üzere, $Q_p(\mu)$ reel sayısına da μ fuzzy altkümesinin p fuzzy noktasının q-komşuluğu olma derecesi denir (Demirci, 1997).

Önerme 2.2.8. (X,τ) bir fuzzy topolojik uzay, $p \in I^X$ bir fuzzy nokta ve $N_p,\ Q_p : I^X \longrightarrow I$ dönüşümler olsun. Bu durumda;

(i) N_p, p nin fuzzy komşuluk sistemidir ancak ve ancak her $\mu \in I^X$ için

$$N_p(\mu) = \begin{cases} \sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq \mu\}, & p \in \mu \\ 0, & p \notin \mu \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

(ii) Q_p, p nin fuzzy q-komşuluk sistemidir ancak ve ancak her $\mu \in I^X$ için

$$Q_p(\mu) = \begin{cases} \sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X,\ p\, q\, \nu,\ \nu \subseteq \mu\}, & p\, q\, \mu \\ 0, & p\, \bar{q}\, \mu \end{cases}$$

eşitliği sağlanır (Demirci, 1997).

Önerme 2.2.9. (X,τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $p \in I^X$ bir fuzzy nokta olsun.

$N_p : I^X \longrightarrow I$, p nin fuzzy komşuluk sistemi ise her $\mu, \mu_1, \mu_2 \in I^X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır (Demirci, 1997):

(N1) $N_p(\mu) > 0 \Longrightarrow p \in \mu$

(N2) $\sup\{N_p(\mu) : \mu \in I^X\} = 1$

(N3) $N_p(\mu_1 \wedge \mu_2) \geq N_p(\mu_1) \wedge N_p(\mu_2)$

(N4) $\mu_1 \leq \mu_2 \Longrightarrow N_p(\mu_1) \leq N_p(\mu_2)$

(N5) $N_p(\mu) \leq \sup\{N_p(\nu) \wedge (\bigwedge_{e \in \nu} N_e(\nu)) : \nu \in I^X, \nu \subseteq \mu\}$.

Önerme 2.2.10. (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $p \in I^X$ bir fuzzy nokta olsun. $Q_p : I^X \longrightarrow I$, p nin fuzzy q-komşuluk sistemi ise her $\mu, \mu_1, \mu_2 \in I^X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır (Demirci, 1997):

(Q1) $Q_p(\mu) > 0 \Longrightarrow p\, q\, \mu$

(Q2) $\sup\{Q_p(\mu) : \mu \in I^X\} = 1$

(Q3) $Q_p(\mu_1 \wedge \mu_2) \geq Q_p(\mu_1) \wedge Q_p(\mu_2)$

(Q4) $\mu_1 \leq \mu_2 \Longrightarrow Q_p(\mu_1) \leq Q_p(\mu_2)$

(Q5) $Q_p(\mu) \leq \sup\{Q_p(\nu) \wedge \left(\bigwedge_{eq\nu} Q_e(\nu)\right) : \nu \in I^X, \nu \subseteq \mu\}$.

Önerme 2.2.11. X boştan farklı bir küme ve $Q_p : I^X \longrightarrow I$ dönüşümü (Q1) - (Q5) özellikleri sağlasın. Bu durumda, her $\mu \in I^X$ için

$$\tau(\mu) = \begin{cases} \bigwedge\limits_{eq\mu} Q_e(\mu), & \mu \neq 0_X \\ 1, & \mu = 0_X \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\tau : I^X \longrightarrow I$ dönüşümü, X üzerinde bir fuzzy topolojidir. Ayrıca, Q_p, p nin (τ fuzzy topolojisine göre) fuzzy q-komşuluk sistemidir (Demirci, 1997).

Yukarıdaki önermede verilen, fuzzy q-komşuluk sistemi ve fuzzy topoloji arasındaki ilişkinin benzer şekilde fuzzy komşuluk sistemleri ve fuzzy topoloji arasında da olması beklenebilir. Ancak söz konusu makale böyle bir ilişkiye yer vermemiştir.

2.3. Ditopolojik Doku Uzayları

Doku Uzayları

Tanım 2.3.1. S boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ailesine S nin bir *dokulanması* ve $(S, \mathcal{S})$ ikilisine bir *doku uzayıdır* ya da kısaca bir *dokudur* denir (Brown ve Ertürk, 2000a).

(1) $(\mathcal{S}, \subseteq)$, $\emptyset$ ve S yi içeren bir tam ve tamamen dağılımlı latis ve $\mathcal{S}$ deki sup ve inf işlemleri, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ latisindeki kesişim ve birleşim işlemleriyle şu şekilde ilişkilidir.

Her I indeks kümesi için

$$\bigwedge_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i\,, \qquad A_i \in \mathcal{S}, i \in I$$

ve her sonlu indeks kümesi I için

$$\bigvee_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i\,, \qquad A_i \in \mathcal{S}, i \in I$$

(2) $\mathcal{S}$, S nin noktalarını ayırır. Yani her $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ için $s_1 \in A, s_2 \notin A$ veya $s_2 \in A, s_1 \notin A$ olacak şekilde $A \in \mathcal{S}$ vardır.

Genelde bir doku uzayı, klasik anlamdaki küme tümleyeni işlemi altında kapalı değildir. Örneğin, $S = \{a, b\}, \mathcal{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ olmak üzere; $\mathcal{S}$, S üzerinde bir dokudur ve $\{a\} \in \mathcal{S}$ olmasına karşın $X \backslash \{a\} = \{b\} \notin \mathcal{S}$ dır. Bu nedenle küme tümleyeninin bir genelleştirmesi aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır (Brown ve Ertürk, 2000a).

Tanım 2.3.2. Eğer $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ fonksiyonu

(1) Her $A \in \mathcal{S}$ için $\sigma^2(A) = A$,

(2) Her $A, B \in \mathcal{S}$ için $A \subseteq B \Longrightarrow \sigma(B) \subseteq \sigma(A)$

koşullarını gerçekliyorsa σ ya $\mathcal{S}$ üzerinde bir tümleyen işlemi ve $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ya da *tümleyenli doku uzayı* denir. Tümleyen işleminin bire-bir ve örten olduğu açıktır (Brown ve Ertürk, 2000a).

Tanım 2.3.3. $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve her $s \in S$ için $P_s = \bigcap\{A \in \mathcal{S} \mid s \in A\}$ olsun. P_s kümesine nokta küme (point set) veya kısaca p-küme denir.

Açıkça, P_s, $\mathcal{S}$ nin s yi içeren en küçük elemanıdır.

$P: S \to \mathcal{S};\ s \mapsto P_s$ dönüşümü, S yi $\mathcal{S}$ içine resmeden bir gömmedir. $\mathcal{S}$ dokusunun üzerindeki latis yapısı, "$s \leq t \Leftrightarrow P_s \subseteq P_t \Leftrightarrow s \in P_t$" biçiminde tanımlı $\leq$ bağıntısı ile S üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı indirger.

Ayrıca, P_s, $\mathcal{S}$ nin bir molekülüdür ve her $A \in \mathcal{S}$ için

$$A = \bigvee_{s\in A} P_s = \bigcup_{s\in A} P_s$$

olur (Brown ve Ertürk, 2000a).

Tanım 2.3.4. Eğer $(\mathcal{S}, \subseteq)$ nin bütün molekülleri $\{P_s \mid s \in S\}$ ailesine aitse $(S, \mathcal{S})$ ye *basit doku* denir (Brown ve Ertürk, 2000a).

Tanım 2.3.5. $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve her $s \in S$ için $Q_s = \bigvee\{P_t \mid s \notin P_t\}$ olsun. Q_s kümesine q-küme denir. p-kümeler ile q-kümeler arasında bir dualite vardır (Yıldız, 2005).

$\mathcal{S}$ dokusunun üzerindeki latis yapısı, "$s \preccurlyeq t \Leftrightarrow Q_s \subseteq Q_t$" biçiminde tanımlı $\preccurlyeq$

bağıntısı ile S üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı indirger. Bu bağıntıya *kosıralama* bağıntısı denir (Yıldız, 2005).

σ, $\mathcal{S}$ üzerinde bir tümleyen işlemi olmak üzere; eğer $\mathcal{S}$ üzerinde; $\sigma(P_s) = Q_{s'}$ ve $\sigma(Q_s) = P_{s'}$ olacak şekilde bir $s \mapsto s'$ (s' yerine $\sigma(s)$ kullanılacaktır) dönüşümü varsa σ ya *çakılı* denir ve bu durumda $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ya da *tümleyenli çakılı doku uzayı* denir (Özçağ ve Brown, 2011).

Tanım 2.3.6. Bir $A \in \mathcal{S}$ kümesi için,

$$core(A) = \bigcap \left\{ \bigcup \{A_i \mid i \in I\} \mid \{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{S}, A = \bigvee \{A_i \mid i \in I\} \right\}$$

kümesine A nın çekirdeği denir ve kısaca A^b ile gösterilir (Yıldız, 2005).

Tanım 2.3.7. $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun. Eğer her $s \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_s$ oluyorsa $\mathcal{S}$ dokusuna *sade doku* denir (Yıldız, 2005).

Bir tümleyenli sade doku uzayının tümleyeni çakılıdır (Tiryaki ve Brown, 2011).

Teorem 2.3.8. Bir $(S, \mathcal{S})$ dokusu için aşağıdakiler denktir (Yıldız, 2005):

(1) $(S, \mathcal{S})$ sadedir.

(2) Her $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ için $\bigcup \mathcal{A} = \bigvee \mathcal{A}$ dır.

(3) $\mathcal{S}$ birleşim işlemi altında kapalıdır.

Örnek 2.3.9. (1) $(X, P(X))$ bir doku uzayıdır. Her $x \in X$ için, $P_x = \{x\}, Q_x = X \backslash \{x\}$ dir. $P(X)$ in tüm molekülleri P_x biçiminde olduğundan bu doku basittir. X üzerindeki sıralama ve kosıralama aşikar sıralamadır. Her $x \in X$ için, $P_x \not\subseteq Q_x$ olduğundan bu doku sadedir. Ayrıca, $\pi_X : Y \subseteq X \longmapsto X \backslash Y$ fonksiyonu $(X, P(X))$ üzerinde bir tümleyendir. $(X, P(X), \pi_X)$ dokusu *tümleyenli ayrık doku* olarak adlandırılır.

(2) $L = (0,1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, r] \mid r \in [0,1]\}$ olmak üzere $(L, \mathcal{L})$ bir doku uzayıdır. Burada

$$(0,1] = \bigvee_{n \in N} \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right] \neq \bigcup_{n \in N} \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0,1)$$

olduğundan bu dokuda sup ile birleşim her zaman eşit değildir. $r \in L$ için, $P_r = Q_r = (0, r]$ dir. Bu dokunun bütün molekülleri P_r biçiminde olduğundan bu doku basittir. L üzerindeki indirgenmiş sıralama, L üzerindeki bilinen sıralamayla aynıdır. Ayrıca $P_r = Q_r$ olduğundan L üzerinde $\mathcal{L}$ dokusunun indirgediği sıralama ve kosıralama aynıdır, yani doku ko-ayrıktır. Ancak, $P_r \not\subseteq Q_r$ olmadığından bu doku sade değildir. Son olarak $\lambda((0, r]) = (0, 1 - r]$ fonksiyonu $(L, \mathcal{L})$ dokusu üzerinde doğal bir tümleyendir. Yani, $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ bir tümleyenli, basit, ko-ayrık dokudur.

(3) $\mathbb{I} = [0,1]$ ve $\mathcal{J} = \{[0,r] \mid r \in [0,1]\} \cup \{\{[0,r) \mid r \in [0,1]\}$ ise $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ bir doku uzayıdır. Bu doku uzayında sup ile birleşim çakışırlar, bu nedenle bu doku sadedir. Ayrıca, $r \in \mathbb{I}$ için $P_r = [0,r]$, $r \in \mathbb{I}\backslash\{0\}$ için $Q_r = [0,r)$ ve $Q_0 = \emptyset$ dir. Her $r \in \mathbb{I}\backslash\{0\}$ için Q_r de moleküldür ve $Q_r \notin \{P_r \mid r \in \mathbb{I}\}$ olduğundan bu doku basit değildir. Ayrıca $\mathcal{J}$ dokusunun indirgediği sıralama ile kosıralama aynıdır. Son olarak, $r \in \mathbb{I}$ için, $\lambda([0,r]) = [0,1-r)$ ve $\lambda([0,r)) = [0,1-r]$ biçiminde bir tümleyen tanımlanabilir. $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \lambda)$ bir tümleyenli, sade, ko-ayrık dokudur.

(4) $M = [0,1], \mathcal{M} = \{[0,1] \mid r \in [0,1]\} \cup \{\emptyset\}$ ve $\sigma : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M};\ \sigma([0,r]) = [0,1-r]$ olmak üzere $(M, \mathcal{M}, \sigma)$ bir tümleyenli doku uzayıdır. Bu doku uzayında supremum ve birleşim işlemlerinin çakışık olmadığı, yani bu dokunun sade olmadığı (2)'deki gibi gösterilebilir. Her $r \in M$ için $P_r = [0,r]$, $r \in M\backslash\{0\}$ için $Q_r = [0,r]$ ve $Q_0 = \emptyset$ dir. Açıkça, $P_r \not\subseteq Q_r$ olmadığından sade değildir. Ayrıca $(M, \mathcal{M}, \sigma)$ basit ve ko-ayrık bir dokudur.

(5) $\mathcal{R} = \{(-\infty, r) \mid r \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, r] \mid r \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ olmak üzere $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ bir doku uzayıdır. Her $r \in \mathbb{R}$ için $P_r = (-\infty, r]$ ve $Q_r = (-\infty, r)$ dir. Her $r \in \mathbb{R}$ için Q_r de bir moleküldür ve $Q_r \notin \{P_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ olduğundan bu doku basit değildir. Ayrıca bu doku uzayında supremum ve birleşim çakışıktır. Sonuç olarak $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ bir sade, ko-ayrık dokudur.

(6) $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{a,b\}, \{b\}, \{b,c\}, S\}$, $S = \{a,b,c\}$ üzerinde bir basit dokudur. $P_a = \{a,b\}, P_b = \{b\}, P_c = \{b,c\}$ dir. $\mathcal{S}$ nin indirgediği kısmi sıralama $b \leq a, b \leq c$ şeklindedir. $Q_a = \{b,c\}, Q_b = \emptyset, Q_c = \{a,b\}$ dir. $(S, \mathcal{S})$ nin üzerinde bir tümleyen tanımlamak mümkün değildir (Yıldız, 2005).

Teorem 2.3.10. $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun. Aşağıdakiler geçerlidir (Brown ve ark., 2004a):

(1) Her $s \in S, A \in \mathcal{S}$ için, $s \notin A \Longrightarrow A \subseteq Q_s \Longrightarrow s \notin A^b$.

(2) Her $A \in \mathcal{S}$ için, $A^b = \{s \in S \mid A \not\subseteq Q_s\}$.

(3) Her $i \in I, A_i \in \mathcal{S}$ için, $(\bigvee_{i \in I} A_i)^b = \bigcup_{i \in I} A_i^b$.

(4) Her $A \in \mathcal{S}$ için A, A^b yi içeren $\mathcal{S}$ nin en küçük elemanıdır.

(5) Her $A, B \in \mathcal{S}$ için, $A \not\subseteq B \Longrightarrow A \not\subseteq Q_s$ ve $P_s \not\subseteq B$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır.

(6) Her $A \in \mathcal{S}$ için, $A = \bigcap\{Q_s \mid P_s \not\subseteq A\}$

(7) Her $A \in \mathcal{S}$ için, $A = \bigvee\{P_s \mid A \not\subseteq Q_s\}$

Sonuç 2.3.11. $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun. Aşağıdakiler geçerlidir (Brown ve ark., 2004a):

(1) Her $A \in \mathcal{S}$ için, $A^b \in \mathcal{S} \iff A^b = A$

(2) Her $s \in S$ için, $s \notin S^b \iff Q_s = S$.

(3) Her $A \in \mathcal{S}$ için, $A^b = \{s \in S^b \mid A \nsubseteq Q_s\}$.

(4) Her $A, B \in \mathcal{S}$ için, $A \subseteq B \iff$ "$\forall s,\ A \nsubseteq Q_s \Longrightarrow B \nsubseteq Q_s$".

Teorem 2.3.12. $\mathbb{L}$ bir Hutton cebiri ve $\mathbb{L}$ nin moleküllerinin kümesi L olsun. Her $a \in \mathbb{L}$ için $\varphi(a) = \{m \in L : m \leq a\}$, $\mathcal{L} = \{\varphi(a) : a \in \mathbb{L}\}$ ve $\lambda(\varphi(a)) = \varphi(a')$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ bir tümleyenli basit dokudur ve $\varphi : \mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{L}$, tümleyeni koruyan bir latis izomorfizmasıdır.

Tersine, her tümleyenli basit doku uzayı bu yolla uygun bir Hutton cebirinden elde edilebilir (Brown ve Ertürk, 2000a).

Tanım 2.3.13. Eğer $(L, \mathcal{L}, \lambda)$, $\mathbb{L}$ için yukarıdaki şekilde tanımlanmışsa $(L, \mathcal{L})$ $\big((L, \mathcal{L}, \lambda)\big)$ ye $\mathbb{L}$ nin *(tümleyenli) Hutton dokusu* denir (Brown ve Ertürk, 2000a).

Örnek 2.3.14. $\mathbb{I} = [0, 1]$ kümesi üzerindeki doğal sıralama ve $r \in \mathbb{I}$ için $r' = 1 - r$ doğal involütü ile bir Hutton cebiridir. $\mathbb{I}$ nın 0 dan farklı her elemanı moleküldür. ($L = (0, r]$, $\mathcal{L} = \{(0, r] : r \in \mathbb{I}\}$) dokusu, $\mathbb{I}$ Hutton cebirine karşı gelen Hutton dokusudur (Brown ve Ertürk, 2000a).

Teorem 2.3.12.'den, bütün Hutton dokularının basit olduğu görülür. Ancak basit olmayan bir doku, bir Hutton cebirine karşılık gelmez (Örnek 2.3.9. (3)). Dolayısıyla doku uzayları, Hutton cebirlerinden daha genel yapılardır (Yıldız, 2005).

Çarpım Dokuları:

Klasik anlamda $X \times Y$ kartezyen çarpımı, X den Y ye olan bağıntılar ve fonksiyonlar için temel teşkil eder. Bu nedenle benzer bir kavramın doku uzayları için de tanımlanması gerekmektedir. Kartezyen çarpımın tanımından yola çıkarak $(S_1, \mathcal{S}_1)$ ve $(S_2, \mathcal{S}_2)$ dokularının çarpımı olarak $(S_1 \times S_2, \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$ düşünüldüğünde bu tanımın yetersiz olacağı açıktır. Çünkü $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ nin bilinen anlamda kartezyen çarpımı $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ üzerinde bir doku olmayabilir. Bu nedenle daha doğal bir yol izlenerek $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ nin bütün elemanlarını içeren $S_1 \times S_2$ üzerindeki en küçük dokuya çarpım dokusu denilmiştir. Bu düşünceden yola çıkılarak keyfi sayıda doku uzayının çarpımının tanımı aşağıdaki şekilde verilmektedir. Bu konuda daha geniş bilgi için Brown (1993b) incelenebilir (Yıldız, 2005).

I bir indeks kümesi, $(S_i, \mathcal{S}_i)_{i \in I}$ doku uzayları ve $S = \prod_{i \in I} S_i$, S_i lerin bilinen çarpım kümesi olsun. Her $k \in I$ ve $A \subseteq S_k$ için

$$Y_i = \begin{cases} A, & i = k \; ise \\ S_i, & i \neq k \; ise \end{cases}$$

olmak üzere

$$E(k, A) = \prod_{i \in I} Y_i$$

verilsin.

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{k \in K} E(k, L_k) \mid K \subseteq I, L_k \in \mathcal{S}_k \right\}$$

olarak tanımlansın ve $\mathcal{E}$ kümesinin keyfi kesişimlerinden oluşan küme, $\mathcal{S}$ ile gösterilsin. Teorem 2.1.7. gereği $(\mathcal{S}, \subseteq)$ bir tam latistir ve her K indeks kümesi, $A_\alpha \in \mathcal{S}$, $\alpha \in K$ için $\bigwedge_{\alpha \in K} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in K} A_\alpha$ dir. Ayrıca,

$$\bigvee_{\alpha \in K} A_\alpha = \bigcap \{Q \mid \bigcup_{\alpha \in K} A_\alpha \subseteq Q \in \mathcal{S}\} = \bigcap \{P \mid \bigcup_{\alpha \in K} A_\alpha \subseteq P \in \mathcal{E}\}$$

olduğu görülebilir (Yıldız, 2005).

Tanım 2.3.15. Yukarıdaki biçimde oluşturulan $(S, \mathcal{S})$ ye $(S_i, \mathcal{S}_i)_{i \in I}$ doku uzaylarının *çarpım dokusudur* denir ve $\mathcal{S} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{S}_i$ile gösterilir (Brown ve Ertürk, 2000a).

Teorem 2.3.12.'de Hutton cebirleri, basit Hutton dokularıyla temsil edilmişti. Şimdi $\mathbb{L}$-Hutton cebiri göz önüne alınsın.

$\mathbb{L}$ bir Hutton cebiri ve X boştan farklı bir küme olsun. Tanım 2.1.15.'de belirtildiği gibi $\mathbb{W} = \mathbb{L}^X$ bir Hutton cebiridir. Teorem 2.3.12. gereği, $\mathbb{W}$ Hutton cebirine karşılık gelen $(W, \mathcal{W}, w)$ Hutton dokusu vardır.

$x \in X, m \in L$ olmak üzere, $\mathbb{W}$ nin fuzzy noktaları, yani

$$x_m(z) = \begin{cases} m, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}$$

fonksiyonları, $\mathbb{W}$ nin molekülleridir. Dolayısıyla $W = \{x_m \mid x \in X, m \in L\}$ olur. x_m fonksiyonun (x, m) çifti ile temsil edilmesiyle $W = L^X$ denilebilir. Böylece $\varphi(f) = \{(x, m) \in W \mid x_m \leq f\}$ olmak üzere $\mathcal{W} = \{\varphi(f) \mid f \in \mathbb{W}\}$ ve $w(\varphi(f)) = \varphi(f') = \{(x, m) \mid m \leq f(x)'\}$ bir tümleyendir. Yani $(W, \mathcal{W}, w)$ bir tümleyenli basit doku uzayı olur (Yıldız, 2005).

Tanım 2.3.16. Yukarıda tanımlanan $(W, \mathcal{W})$ doku uzayına X üzerindeki $\mathbb{L}$-Hutton doku uzayı ve $(W, \mathcal{W}, w)$ doku uzayına X üzerindeki tümleyenli $\mathbb{L}$-Hutton doku uzayı denir.

Ayrıca, $\mathbb{L}$-Hutton cebirine karşı gelen Hutton dokusu, çarpım dokusuyla da karakterize edilebilir (Brown ve Ertürk, 2000a).

Önerme 2.3.17. X üzerindeki $(W, \mathcal{W})$ $\mathbb{L}$-Hutton dokusu, $(X, \mathcal{P}(X))$ dokusu ile $\mathbb{L}$ ye karşı gelen $(L, \mathcal{L})$ Hutton dokusunun çarpımına eşittir. Ayrıca $(W, \mathcal{W})$ üzerindeki w tümleyeni, $(X, \mathcal{P}(X))$ dokusundaki π_X tümleyeni ile $(L, \mathcal{L})$ üzerindeki λ tümleyeninin çarpımına eşittir (Brown ve Ertürk, 2000a).

Teorem 2.3.18. X üzerindeki tümleyenli $\mathbb{L}$-Hutton dokusu, $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ tümleyenli dokusu ile $\mathbb{L}$ ye karşılık gelen $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ tümleyenli Hutton dokusunun çarpımına eşittir (Brown ve Ertürk, 2000a).

Örnek 2.3.19. Bir X kümesi üzerinde Chang anlamında fuzzy kümeler $f : X \longrightarrow \mathbb{I} = [0,1]$ biçimindeki fonksiyonlardır. Örnek 2.3.14.'de belirtildiği üzere $\mathbb{I}$ ya karşılık gelen Hutton dokusu, $(L = (0,1], \mathcal{L} = \{(0,1] \mid r \in \mathbb{I}\})$ dokusudur. Böylece $W = X \times (0,1]$ ve $\mathcal{W}$ nin elemanları $Y \subseteq X$ ve $0 \leq r \leq 1$ olmak üzere $(Y \times (0,1]) \cup (X \times (0, r])$ biçimindeki kümelerin kesişimi olur. Ayrıca $w\big((Y \times (0,1]) \cup (X \times (0, r])\big) = (X \backslash Y) \times (0, 1 - r]$, $\mathcal{W}$ çarpım dokusunun tümleyeni olur. Bu tümleyenli çarpım dokusu, X üzerindeki $\mathbb{I}$-Hutton cebirine karşı gelen dokudur (Brown ve Ertürk, 2000a).

Dibağıntılar:

Doku uzaylarında nokta kavramı olmadığı için noktayı noktayla eşleştiren klasik anlamdaki bağıntı ve fonksiyon tanımları, doku uzayları için uygun değildir. Ancak, bağıntı ve fonksiyonların bazı özelliklerinin nokta küme kavramına genelleştirilmesiyle bu tanımların doku uzayları için uygun karşılıkları elde edilmiştir. Klasik anlamda fonksiyon, bağıntının bir özel halidir ve doku uzaylarında da difonksiyon, dibağıntının özel bir hali olarak tanımlanmıştır.

Gösterim 2.3.20. $(S, \mathcal{S})$ ve $(Z, \mathcal{Z})$ doku uzayları olma üzere; $(S, \mathcal{S})$ dokusunun p- ve q- kümeleri her zaman için $s \in S$ olmak üzereP_s ve Q_s ile, $(Z, \mathcal{Z})$ dokusununkiler ise $z \in Z$ olmak üzere P_z ve Q_z ile gösterilecektir. Ayrıca, $(s, z) \in S \times Z$ olmak üzere $\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{Z}$ çarpım dokusunun p- ve q- kümeleri için $\bar{P}_{(s,z)}$ ve $\bar{Q}_{(s,z)}$ ve benzer şekilde $\mathcal{P}(Z) \otimes \mathcal{S}$ dokusununkiler için ise $\bar{P}_{(z,s)}$ ve $\bar{Q}_{(z,s)}$ sembolleri kullanılacaktır.

Tanım 2.3.21. $(S, \mathcal{S})$ ve $(Z, \mathcal{Z})$ doku uzayları olsun.

(1) Aşağıdaki koşulları sağlayan $r \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{Z}$ ye, $(S, \mathcal{S})$ den $(Z, \mathcal{Z})$ ye bir *bağıntıdır* denir:

(R1) $r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,z)}, P_{s'} \not\subseteq Q_s \Longrightarrow r \not\subseteq \bar{Q}_{(s',z)}$

(R2) $r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,z)} \Longrightarrow P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ve $r \not\subseteq \bar{Q}_{(s',z)}$ olacak şekilde bir $s' \in S$ vardır.

Özel olarak, $(Z, \mathcal{Z}) = (S, \mathcal{S})$ ise bu durumda r ye $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir bağıntıdır denir.

(2) Aşağıdaki koşulları sağlayan $R \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{Z}$ ye, $(S, \mathcal{S})$ den $(Z, \mathcal{Z})$ ye bir *kobağıntıdır* denir:

(CR1) $\bar{P}_{(s,z)} \nsubseteq R, P_s \nsubseteq Q_{s'} \Longrightarrow P_{(s',z)} \nsubseteq R$

(CR2) $\bar{P}_{(s,z)} \nsubseteq R \Longrightarrow P_{s'} \nsubseteq Q_s$ ve $P_{(s',z)} \nsubseteq R$ olacak şekilde bir $s' \in S$ vardır.

Özel olarak, $(Z, \mathcal{Z}) = (S, \mathcal{S})$ ise bu durumda R ye $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir kobağıntıdır denir.

(3) r ve R, $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(Z, \mathcal{Z})$ doku uzayına tanımlı bağıntı ve kobağıntı olsun. Bu durumda (r, R) çiftine $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(Z, \mathcal{Z})$ doku uzayına tanımlı bir *dibağıntıdır* denir ve $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ veya $(S, \mathcal{S}) \xrightarrow{(r,R)} (Z, \mathcal{Z})$ ile gösterilir. Eğer özel olarak $(Z, \mathcal{Z}) = (S, \mathcal{S})$ ise bu durumda (r, R) ye $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir dibağıntıdır denir. Ayrıca dibağıntılar ailesi üzerinde, (r_1, R_1) ve (r_2, R_2) dibağıntıları için "$(r_1, R_1) \sqsubseteq (r_2, R_2) \Leftrightarrow r_1 \subseteq r_2 \; ve \; R_2 \subseteq R_1$" biçiminde tanımlı, bir $\sqsubseteq$ kısmi sıralama bağıntısı bulunmaktadır (Brown ve ark., 2004a).

Tanımda olduğu gibi genelde bağıntılar küçük harflerle, kobağıntılar ise büyük harflerle gösterilecektir.

Yardımcı Teorem 2.3.22. $\varphi \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{Z}$ olsun. Bu durumda

(1) $\bigcap\{\bar{Q}_{(z,s)} \mid \varphi \nsubseteq \bar{Q}_{(s,z)}\}$ kümesi $(Z, \mathcal{Z})$ den $(S, \mathcal{S})$ ye bir kobağıntıdır.

(2) $\bigvee\{\bar{P}_{(z,s)} \mid \bar{P}_{(s,z)} \nsubseteq \varphi\}$ kümesi $(Z, \mathcal{Z})$ den $(S, \mathcal{S})$ ye bir bağıntıdır (Brown ve ark., 2004a).

Tanım 2.3.23. $(S, \mathcal{S})$ ve $(Z, \mathcal{Z})$ doku uzayları olsun.

(1) $r : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ bir bağıntı ise

$$r^{\leftarrow} = \bigcap\{\bar{Q}_{(z,s)} \mid r \nsubseteq \bar{Q}_{(s,z)}\}$$

kobağıntısına r nin *tersi* denir.

(2) $R : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ bir kobağıntı ise

$$R^{\leftarrow} = \bigvee\{\bar{P}_{(z,s)} \mid \bar{P}_{(s,z)} \nsubseteq R\}$$

bağıntısına R nin *tersi* denir.

(3) $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ bir dibağıntı ise $(r, R)^{\leftarrow} = (R^{\leftarrow}, r^{\leftarrow})$ biçiminde tanımlı $(r, R)^{\leftarrow}$ dibağıntısına (r, R) nin *tersi* denir (Brown ve ark., 2004a).

Önerme 2.3.24. $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ bir dibağıntı olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır (Brown ve ark., 2004a):

(1) Her $s \in S$ ve her $z \in Z$ için $r \nsubseteq \bar{Q}_{(s,z)} \Leftrightarrow \bar{P}_{(z,s)} \nsubseteq r^{\leftarrow}$ ve $\bar{P}_{(s,z)} \nsubseteq R \Leftrightarrow R^{\leftarrow} \nsubseteq$

$\bar{Q}_{(z,s)}$ olur.

(2) $(r^{\leftarrow})^{\leftarrow} = r$ ve $(R^{\leftarrow})^{\leftarrow} = R$ dir.

(3) $(d, D) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ bir dibağıntı olsun. $r \subseteq d \Leftrightarrow d^{\leftarrow} \subseteq r^{\leftarrow}$ ve . $R \subseteq D \Leftrightarrow D^{\leftarrow} \subseteq R^{\leftarrow}$ olur.

Örnek 2.3.25. (1) $(S, \mathcal{P}(S))$, $(Z, \mathcal{P}(Z))$ ayrık dokular ve $\varphi : S \longrightarrow Z$ bir noktasal bağıntı olsun. Bu durumda φ, $(S, \mathcal{P}(S))$ den $(Z, \mathcal{P}(Z))$ ye hem bir bağıntı hem de bir kobağıntıdır.

(2) $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olmak üzere $i_S = \bigvee\{\bar{P}_{(s,s)} \mid s \in S\}$ ve $I_S = \bigcap\{\bar{Q}_{(s,s)} \mid s \in S^b\}$ tanımlamaları yapılsın. $i_S \not\subseteq \bar{Q}_{(s,z)} \Leftrightarrow P_s \not\subseteq Q_z$ ve $\bar{P}_{(s,z)} \not\subseteq I_S \Leftrightarrow P_z \not\subseteq Q_s$ olduğundan i_S nin bir bağıntı, I_S nin de bir kobağıntı olduğu görülebilir. Üstelik $i_S{}^{\leftarrow} = I_S$ ve $I_S{}^{\leftarrow} = i_S$ dir.

(3) $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık doku uazyı için $i_X = \{(s, s) \mid s \in X\}$, yani bilinen birim bağıntı ve I_X ise onun tümleyeni $\{(s, z) \mid s \neq z\}$ dir. Fakat Örnek 2.3.9. (2)'de verilen $(L, \mathcal{L})$ dokusu için $i_L = \{(s, z) \mid s, z \in [0,1],\ z \leq s\}$ ve $I_L = \{(s, z) \mid s, z \in [0,1],\ z < s\}$ dir. Böylece $(L, \mathcal{L})$ dokusu için $I_L \subseteq i_L$ olur (Brown ve ark., 2004a).

Tanım 2.3.26. $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olmak üzere $i_S = \bigvee\{\bar{P}_{(s,s)} \mid s \in S\}$ bağıntısına $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki *birim bağıntı*, $I_S = \bigcap\{\bar{Q}_{(s,s)} \mid s \in S^b\}$ kobağıntısına $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki *birim kobağıntı* ve (i_S, I_S) dibağıntısına $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki *birim dibağıntı* adı verilir (Brown ve ark., 2004a).

Tanım 2.3.27. $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ bir dibağıntı olsun.

(1) $A \subseteq S$ olmak üzere

$$r^{\rightarrow}A = \bigcap\{Q_z \mid \forall s,\ r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,z)} \Rightarrow A \subseteq Q_s\} \in \mathcal{Z}$$

kümesine r nin A-*kesiti* denir.

(2) $A \subseteq S$ olmak üzere

$$R^{\rightarrow}A = \bigvee\{P_z \mid \forall s,\ \bar{P}_{(s,z)} \not\subseteq R \Rightarrow P_s \subseteq A\} \in \mathcal{Z}$$

kümesine R nin A-*kesiti* denir.

(3) $B \subseteq Z$ olsun. $r^{\leftarrow}$ kobağıntısının B-kesiti $(r^{\leftarrow})^{\rightarrow}B \in \mathcal{S}$ ye, r bağıntısının B-önkesiti denir ve $r^{\leftarrow}B$ ile gösterilir. Benzer olarak $R^{\leftarrow}$ bağıntısının B-kesiti $(R^{\leftarrow})^{\rightarrow}B \in \mathcal{S}$ ye, R kobağıntısının B-önkesiti denir ve $R^{\leftarrow}B$ ile gösterilir (Brown ve ark., 2004a).

Kesitler, bağıntı ve kobağıntıları karakterize eder. Yani;

Yardımcı Teorem 2.3.28. (r_1, R_1), $(r_2, R_2) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ dibağıntılar olsun. Her $A \in \mathcal{S}$ için,

$$r_1 = r_2 \Leftrightarrow {r_1}^{\rightarrow}A = {r_2}^{\rightarrow}A \text{ ve}$$
$$R_1 = R_2 \Leftrightarrow {R_1}^{\rightarrow}A = {R_2}^{\rightarrow}A$$

dir (Brown ve ark., 2004a).

Yardımcı Teorem 2.3.29. $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ bir dibağıntı olsun. Bir $B \in \mathcal{Z}$ için,

(1) $r^{\leftarrow}B = \bigvee\{P_s \mid \forall z,\ r \nsubseteq \bar{Q}_{(s,z)} \Longrightarrow P_z \subseteq B\}$

(2) $R^{\leftarrow}B = \bigcap\{Q_s \mid \forall z,\ \bar{P}_{(s,z)} \nsubseteq R \Longrightarrow B \subseteq Q_z\}$

(3) **(a)** $r \nsubseteq \bar{Q}_{(s,z)} \Leftrightarrow r^{\rightarrow}P_s \nsubseteq Q_z$

(b) $\bar{P}_{(s,z)} \nsubseteq R \Leftrightarrow P_z \nsubseteq R^{\rightarrow}Q_s$

geçerlidir (Brown ve ark., 2004a).

Teorem 2.3.30. $(r, R), (r_1, R_1)$, $(r_2, R_2) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ dibağıntılar olsun. Bu durumda;

(1) $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$, $A_1 \subseteq A_2$, $B_1, B_2 \in \mathcal{Z}$, $B_1 \subseteq B_2$, $r_1 \subseteq r_2$ ve $R_1 \subseteq R_2$ ise ${r_1}^{\rightarrow}A_1 \subseteq {r_2}^{\rightarrow}A_2$, ${R_1}^{\rightarrow}A_1 \subseteq {R_2}^{\rightarrow}A_2$, ${r_2}^{\leftarrow}B_1 \subseteq {r_1}^{\leftarrow}B_2$, ${R_2}^{\leftarrow}B_1 \subseteq {R_1}^{\leftarrow}B_2$ dir,

(2) $r^{\rightarrow}\emptyset = \emptyset$ dir. Ayrıca her $A \in \mathcal{S}$ için $A \subseteq r^{\leftarrow}(r^{\rightarrow}A)$ ve her $B \in \mathcal{Z}$ için $r^{\rightarrow}(r^{\leftarrow}B) \subseteq B$ dir,

(3) $R^{\rightarrow}S = Z$ dir. Ayrıca her $A \in \mathcal{S}$ için $R^{\leftarrow}(R^{\rightarrow}A) \subseteq A$ ve her $B \in \mathcal{Z}$ için $B \subseteq R^{\rightarrow}(R^{\leftarrow}B)$ olur,

(4) (i, I), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde birim dibağıntı ve $A \in \mathcal{S}$ ise, $i^{\rightarrow}A = I^{\rightarrow}A = A$ ve böylece $i^{\leftarrow}A = I^{\leftarrow}A = A$ dir,

(5) $j \in J$, $A_j \in \mathcal{S}$ için $r^{\rightarrow} \bigvee_{j \in J} A_j = \bigvee_{j \in J} r^{\rightarrow}A_j$ ve $R^{\rightarrow} \bigcap_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} R^{\rightarrow}A_j$ dir,

(6) $j \in J$, $B_j \in \mathcal{Z}$ için $r^{\leftarrow} \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{j \in J} r^{\leftarrow}B_j$ ve $R^{\leftarrow} \bigvee_{j \in J} B_j = \bigvee_{j \in J} R^{\leftarrow}B_j$ ve dir (Brown ve ark., 2004a).

Tanım 2.3.31. $(p, P) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ ve $(q, Q) : (Z, \mathcal{Z}) \longrightarrow (U, \mathcal{U})$ dibağıntıları verilsin.

(1) p ile q bağıntılarının *bileşkesi*

$$q \circ p = \bigvee\{\bar{P}_{(s,u)} \mid \exists z \in Z,\ p \nsubseteq \bar{Q}_{(s,z)},\ q \nsubseteq \bar{Q}_{(z,u)}\}$$

biçiminde tanımlıdır.

(2) P ile Q kobağıntılarının *bileşkesi*

$$Q \circ P = \bigcap\{\bar{Q}_{(s,u)} \mid \exists z \in Z,\ \bar{P}_{(s,z)} \nsubseteq P,\ \bar{Q}_{(z,u)} \nsubseteq Q\}$$

biçiminde tanımlıdır.

(3) (p, P) ve (q, Q) dibağıntılarının bileşkesi

$$(q, Q) \circ (p, P) = (q \circ p, Q \circ P)$$

biçiminde tanımlıdır (Brown ve ark., 2004a).

Önerme 2.3.32. Yukarıdaki tanımda verilen $q \circ p$, $(S, \mathcal{S})$ den $(U, \mathcal{U})$ ya bir bağıntıdır ve $Q \circ P$, $(S, \mathcal{S})$ den $(U, \mathcal{U})$ ya bir kobağıntıdır (Brown ve ark., 2004a).

Önerme 2.3.33.

(1) $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ bir dibağıntı, (i_S, I_S), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde ve (i_Z, I_Z), $(Z, \mathcal{Z})$ üzerinde birim dibağıntılar olsun. Bu durumda;

$$(r, R) \circ (i_S, I_S) = (r, R) \text{ ve } (i_Z, I_Z) \circ (r, R) = (r, R)$$

olur.

(2) $(p, P) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ ve $(q, Q) : (Z, \mathcal{Z}) \longrightarrow (U, \mathcal{U})$ dibağıntılar olsun. Bu durumda;

$$[(q, Q) \circ (p, P)]^{\leftarrow} = (p, P)^{\leftarrow} \circ (q, Q)^{\leftarrow}$$

olur.

(3) $(p, P) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ ve $(q, Q) : (Z, \mathcal{Z}) \longrightarrow (U, \mathcal{U})$ dibağıntılar olsun. Bu durumda;

(a) Her $A \in \mathcal{S}$ için $(q \circ p)^{\rightarrow} A = q^{\rightarrow}(p^{\rightarrow} A)$ ve $(Q \circ P)^{\rightarrow} A = Q^{\rightarrow}(P^{\rightarrow} A)$ dir.

(b) Her $B \in \mathcal{U}$ için $(q \circ p)^{\leftarrow} B = p^{\leftarrow}(q^{\leftarrow} B)$ ve $(Q \circ P)^{\leftarrow} B = P^{\leftarrow}(Q^{\leftarrow} B)$ dir.

(4) Bileşke işlemi, birleşme özelliğine sahiptir. Yani $(p, P) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$, $(q, Q) : (Z, \mathcal{Z}) \longrightarrow (U, \mathcal{U})$ ve $(r, R) : (U, \mathcal{U}) \longrightarrow (V, \mathcal{V})$ dibağıntılar olsun. Bu durumda;

$$[(r, R) \circ (q, Q)] \circ (p, P) = (r, R) \circ [(q, Q) \circ (p, P)]$$

dir.

(5) (p_1, P_1), $(p_2, P_2) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ ve (q_1, Q_1), $(q_2, Q_2) : (Z, \mathcal{Z}) \longrightarrow (U, \mathcal{U})$ dibağıntılar, $(p_1, P_1) \sqsubseteq (p_2, P_2)$ ve $(q_1, Q_1) \sqsubseteq (q_2, Q_2)$ olsun. Bu durumda $(q_1, Q_1) \circ (p_1, P_1) \sqsubseteq (q_2, Q_2) \circ (p_2, P_2)$ olur (Brown ve ark., 2004a).

Difonksiyonlar:

Noktasal fonksiyonlar, noktasal bağıntıların özel bir halidir. Daha açık bir ifadeyle; 1) her $x \in X$ için $(x, y) \in f$ olacak biçimde bir $y \in Y$ vardır, 2) her $x \in X$ için $(x, y_1) \in f$ ve $(x, y_2) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2$ koşullarını sağlayan bir $f \subseteq X \times Y$ bağıntısına X den Y ye bir noktasal fonksiyondur denir. Bu kavram, nokta-küme kavramına genelleştirilerek difonksiyon tanımı oluşturulmuştur.

Tanım 2.3.34. $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ bir dibağıntı olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan (f, F) dibağıntısına *difonksiyon* denir:

(DF1) $s, s' \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ise, $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,z)}$ ve $\bar{P}_{(s',z)} \not\subseteq F$ olacak şekilde bir $z \in Z$ vardır.

(DF2) $z, z' \in Z$ ve $s \in S$ için $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,z)}$ ve $\bar{P}_{(s,z')} \not\subseteq F$ ise, $P_{z'} \not\subseteq Q_z$ dir (Brown ve ark., 2004a).

Tanım 2.3.35. $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ bir difonksiyon, $A \in \mathcal{S}$ ve $B \in \mathcal{Z}$ olsun. Bu durumda;

(1) f bağıntısının A-kesitine, A nın (f, F) difonksiyonu altındaki *görüntüsüdür* denir ve $f^{\rightarrow}A$ ile gösterilir,

(2) F kobağıntısının A-kesitine, A nın (f, F) difonksiyonu altındaki *kogörüntüsüdür* denir ve $F^{\rightarrow}A$ ile gösterilir,

(3) f bağıntısının B-önkesitine, B nin (f, F) difonksiyonu altındaki *ters görüntüsüdür* denir ve $f^{\leftarrow}B$ ile gösterilir,

(4) F kobağıntısının B-önkesitine, B nin (f, F) difonksiyonu altındaki *ters kogörüntüsüdür* denir ve $F^{\leftarrow}B$ ile gösterilir (Brown ve ark., 2004a).

Örnek 2.3.36. (1) $(S, \mathcal{P}(S))$, $(Z, \mathcal{P}(Z))$ doku uzayları ve $\varphi, \psi : S \longrightarrow Z$ noktasal bağıntılar olsun. Örnek 2.3.25.'den $(\varphi, \psi) : (S, \mathcal{P}(S)) \longrightarrow (Z, \mathcal{P}(Z))$ nin bir dibağıntı olduğu bilinmektedir. Bu durumda, $(\varphi, \psi) : (S, \mathcal{P}(S)) \longrightarrow (Z, \mathcal{P}(Z))$ bir difonksiyondur ancak ve ancak $\varphi : S \longrightarrow Z$ bir noktasal fonksiyon ve $\psi = \varphi'$ dir. Burada, $'$ kümesel tümleyen işlemini göstermektedir.

(2) Bir $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerindeki (i_S, I_S) birim dibağıntısı, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir difonksiyondur (Brown ve ark., 2004a).

Teorem 2.3.37. $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ ve $(g, G) : (Z, \mathcal{Z}) \longrightarrow (U, \mathcal{U})$ difonksiyonlar olsun. Bu durumda $(g, G) \circ (f, F)$ bileşkesi, $(S, \mathcal{S})$ den $(U, \mathcal{U})$ ya bir difonksiyondur.

Dokular ve aralarındaki difonksiyonlar bir kategori oluşturur. Nesneleri dokular ve morfizmleri difonksiyonlar olan bu kategori **dfTex** ile gösterilecektir (Brown ve ark., 2004a).

Teorem 2.3.38. $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ dibağıntısı için aşağıdakiler denktir (Brown ve ark., 2004a):

(1) (f, F) bir difonksiyondur.

(2) Aşağıdaki içermeler geçerlidir.

(a) Her $A \in \mathcal{S}$ için $f^{\leftarrow}(F^{\rightarrow}A\,) \subseteq A \subseteq F^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}A\,)$ dır ve

(b) Her $B \in \mathcal{Z}$ için $f^{\rightarrow}(F^{\leftarrow}B) \subseteq B \subseteq F^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}B)$ dır.

(3) Her $B \in \mathcal{Z}$ için $f^{\leftarrow}B = F^{\leftarrow}B$ dir.

Ditopolojik Doku Uzayları

Topoloji, ikili topoloji ve fuzzy topolojilerin bir genellemesi olarak ortaya konulacak olan ditopoloji kavramı, doku uzayları üzerinde tanımlanacaktır. Bu kısımda ditopoloji tanımı ve bazı örnekler verilecektir.

Ditopolojiler, birbirinden bağımsız açık ve kapalı küme aileleri ile tanımlanır

Tanım 2.3.39. $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun.

(1) Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tau \subseteq \mathcal{S}$ ailesine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir topoloji ve τ nun elemanlarına topolojinin açık kümeleridir denir:

(T1) $S, \emptyset \in \tau$

(T2) $G_1, G_2 \in \tau \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$

(T3) $i \in I, G_i \in \tau \Longrightarrow \bigvee_{i \in I} G_i$

(2) Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\kappa \subseteq \mathcal{S}$ ailesine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ko-topoloji ve κ nın elemanlarına kotopolojinin kapalı kümeleridir denir:

(CT1) $S, \emptyset \in \kappa$

(CT2) $K_1, K_2 \in \tau \Longrightarrow K_1 \cup K_2 \in \kappa$

(CT3) $i \in I, K_i \in \tau \Longrightarrow \bigcap_{i \in I} K_i$

(3) τ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir topoloji, ve κ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir kotopoloji ise bu durumda (τ, κ) ikilisine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *ditopoloji* ve $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ya da bir *ditopolojik doku uzayıdır* denir.

Genelde açık kümeler ile kapalı kümeler arasında bir ilişki olmak zorunda değildir. Bununla beraber σ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir tümleyen ve (τ, κ) ditopolojisi $\kappa = \sigma(\tau)$ koşulunu sağlıyorsa, (τ, κ) ya $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde *tümleyensel ditopoloji* ve $(S, \mathcal{S}, \sigma, \tau, \kappa)$ ya da bir *tümleyensel ditopolojik doku uzayıdır* denir (Brown ve ark., 2004b).

Örnek 2.3.40. (1) $(X, P(X), \pi_X)$ ayrık dokusu üzerinde bir (τ, κ) tümleyensel ditopolojisi ele alalım. Bu durumda τ, X üzerinde bilinen anlamda topoloji ve $\kappa = \pi(\tau) = \{F \subseteq X \mid \pi(F) = X \backslash F \in \tau\}$ ise τ topolojisinin bilinen anlamda kapalı kümelerinden oluşur. Sonuç olarak $(X, P(X), \pi_X)$ ayrık dokusu üzerinde bir (τ, κ) tümleyensel ditopolojisi, kesinlikle bir noktasal topolojiye karşı gelir. Ayrıca, (X, τ) bir noktasal topolojik uzay ise $\kappa = \{K \subseteq X \mid \pi_X(K) = X \backslash K \in \tau\}$ olmak üzere $(X, P(X), \pi_X, \tau, \kappa)$ bir tümleyensel ditopolojik doku uzayıdır.

(2) Şimdi $(X, P(X), \pi_X)$ ayrık dokusu üzerinde tümleyensel olmak zorunda olmayan bir (τ, κ) ditopolojisi alalım. Bu ditopoloji, X üzerinde bir ikili topoloji olarak düşünülebilir. Gerçekten topolojilerden biri τ ve diğer topoloji de $v = \pi_X(\kappa) = \{H \subseteq X \mid \pi_X(H) = X \backslash H \in \kappa\}$ olarak alınırsa (τ, v), X üzerinde bir ikili topoloji olur. Tersine, X üzerinde bir (τ, v) ikili topolojisi için $\kappa = \pi_X(v)$ olarak alınırsa (τ, κ), $(X, P(X), \pi_X)$ ayrık dokusu üzerinde tümleyensel olmak zorunda olmayan bir ditopoloji olur. Sonuç olarak, $(X, P(X), \pi_X)$ ayrık dokusu üzerindeki ditopolojiler, X üzerindeki ikili topolojilere bire-bir karşılık gelir.

(3) $(L, \mathcal{L}, \lambda)$, $(\mathbb{L}, ')$ Hutton cebirine karşılık gelen tümleyenli basit doku ve T, $(\mathbb{L}, ')$ üzerinde bir fuzzy topoloji olsun. T nin elemanlarına, fuzzy topolojinin açık fuzzy kümeleri ve $T' = \{a' \mid a \in T\}$ nin elemanlarına ise fuzzy topolojinin kapalı fuzzy kümeleri denir. Şimdi $\tau = \varphi(T), \kappa = \varphi(T')$ olarak tanımlayalım. Bu durumda (τ, κ), $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ üzerinde tümleyensel bir ditopolojidir. Tersine, $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ üzerinde tanımlı her tümleyensel ditopolojiden bu yolla $(\mathbb{L}, ')$ üzerinde bir fuzzy topoloji elde etmek mümkündür. Sonuç olarak basit tümleyenli dokuların üzerinde, tümleyensel ditopolojiler ile fuzzy topolojiler bire-bir karşılık gelir.

(4) Örnek 2.3.9. (3) deki $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \lambda)$ dokusunu ele alalım. $\tau = \{[0, r) \mid r \in [0,1]\} \cup \{\mathbb{I}\}$ ve $\kappa = \{[0, r] \mid r \in [0,1]\} \cup \{\emptyset\}$ biçiminde tanımlarsak, (τ, κ), $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \lambda)$ üzerinde bir ditopoloji olur. Bu ditopoloji bir fuzzy topolojiye karşılık gelmez. Çünkü $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \lambda)$ basit değildir (Brown ve ark., 2004b).

Tanım 2.3.41. (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji ve $A \in \mathcal{S}$ olsun. $[A] = \bigcap\{K \in \kappa \mid A \subseteq K\}$ kümesine A nın *kapanışı* ve $]A[= \bigvee\{G \in \tau \mid G \subseteq A\}$ kümesine ise A nın *içidir* denir (Brown ve ark., 2004b).

Tanım 2.3.42. (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji, $\beta, \delta \subseteq \tau$ ve $\beta^*, \delta^* \subseteq \kappa$ olsun.

(1) Eğer τ nun her elemanı β daki kümelerin keyfi supremumu olarak yazılabiliyorsa β ya (τ, κ) nın bir *tabanıdır* denir. Benzer biçimde eğer κ nın her elemanı β^* daki kümelerin keyfi arakesiti olarak yazılabiliyorsa β^* a (τ, κ) nın bir *kotabanıdır* denir.

(2) Eğer δ nın elemanlarının sonlu arakesitlerinden oluşan aile, (τ, κ) ditopolojisinin bir tabanı ise δ ya (τ, κ) ditopolojisinin bir *alttabanı* ve benzer biçimde eğer δ^* nin elemanlarının sonlu supremumlarından oluşan aile (τ, κ) ditopolojisinin bir kotabanı ise δ^* a (τ, κ) ditopolojisinin bir *koalttabanıdır* denir (Brown ve ark., 2004b).

Tanım 2.3.43. (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji olsun.

(1) $s \in S^b$ için $P_s \subseteq G \subseteq N \not\subseteq Q_s$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ varsa $N \in \mathcal{S}$ kümesine s nin bir komşuluğudur denir.

(2) $s \in S$ için $P_s \not\subseteq M \subseteq K \subseteq Q_s$ olacak şekilde bir $K \in \kappa$ varsa $M \in \mathcal{S}$ kümesine s nin bir kokomşuluğudur denir.

Bir noktanın kokomşuluğu, her $s \in S$ için tanımlansa da sadece S^b nin noktalarının kokomşuluklarını göz önüne almak yeterli olabilir. Bir s noktasının komşuluklarının ailesi $\eta(s)$ ile ve kokomşuluklarının ailesi $\mu(s)$ ile gösterilecektir (Brown ve ark., 2006).

Teorem 2.3.44. (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji olsun.

(1) Her $s \in S^b$ için s nin komşulukları ailesi $\eta(s) \neq \emptyset$ dir ve $\eta(s)$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $N \in \eta(s) \Rightarrow N \not\subseteq Q_s$

(ii) $N \in \eta(s),\ N \subseteq N' \Rightarrow N' \in \eta(s)$

(iii) $N_1, N_2 \in \eta(s),\ N_1 \cap N_2 \not\subseteq Q_s \Rightarrow N_1 \cap N_2 \in \eta(s)$

(iv) **(a)** $N \in \eta(s) \Rightarrow \exists N^* \in \mathcal{S}, P_s \subseteq N^* \subseteq N\ :\ "N^* \not\subseteq Q_t \Rightarrow \forall t \in S^b,\ N^* \in \eta(t)"$

(b) $N \in \mathcal{S}$ ve $N \not\subseteq Q_s$ için, $P_s \subseteq N^* \subseteq N$ ve $"\forall s' \in S^b,\ N^* \not\subseteq Q_{s'} \Rightarrow N^* \in \eta(s')"$ olacak şekilde bir $N^* \in \mathcal{S}$ varsa $N \in \eta(s)$ dir.

Ayrıca, $G \in \tau$ dur ancak ve ancak $G \not\subseteq Q_s$ olacak şekildeki her $s \in S^b$ için $G \in \eta(s)$ dir.

(2) Her $s \in S$ için s nin kokomşulukları ailesi $\mu(s) \neq \emptyset$ dir ve $\mu(s)$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $M \in \mu(s) \Rightarrow P_s \not\subseteq M$

(ii) $M \in \mu(s),\ M \supseteq M' \Rightarrow M' \in \mu(s)$

(iii) $M_1, M_2 \in \mu(s) \Rightarrow M_1 \cup M_2 \in \mu(s)$

(iv) **(a)** $M \in \mu(s) \Rightarrow \exists M^* \in \mathcal{S},\ M \subseteq M^* \subseteq Q_s\ :"P_t \not\subseteq M^* \Rightarrow \forall t \in S,\ M^* \in \mu(t)"$

(b) $M \in \mathcal{S}$ ve $P_s \not\subseteq M$ için, $M \subseteq M^* \subseteq Q_s$ ve $"\forall s' \in S,\ P_{s'} \not\subseteq M \Rightarrow M^* \in \mu(s')"$ olacak şekilde bir $M^* \in \mathcal{S}$ varsa $M \in \mu(s)$ dir.

Ayrıca, $K \in \kappa$ dur ancak ve ancak $P_s \not\subseteq K$ olacak şekildeki her $s \in S$ için $K \in \mu(s)$ dir.

Tersine, her $s \in S^b$ için (1)'deki koşulları sağlayan $\mathcal{S}$ nin boştan farklı bir $\eta(s)$ alt ailesi ve her $s \in S$ için (2)'deki koşulları sağlayan $\mathcal{S}$ nin boştan farklı bir $\mu(s)$ alt ailesi var olsun. Bu durumda, her $s \in S^b$ için $\eta(s)$ komşuluklar ailesi ve her $s \in S$ için $\mu(s)$ kokomşuluklar ailesi olacak şekilde $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir (τ, κ) ditopolojisi vardır (Brown ve ark., 2006).

Tanım 2.3.45. $(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)_{i=1,2}$ ditopolojik doku uzayları ve $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda;

(1) Her $G \in \tau_2$ için $F^{\leftarrow}G \in \tau_1$ oluyorsa (f, F) difonksiyonuna *süreklidir* denir.

(2) Her $K \in \kappa_2$ için $f^{\leftarrow}K \in \kappa_1$ oluyorsa (f, F) difonksiyonuna *kosüreklidir* denir.

(3) Hem sürekli hem de kosürekli olan bir (f, F) difonksiyonuna *ikili süreklidir* denir (Brown ve ark., 2004b).

Örnek 2.3.46. **(1)** $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay ve (i_S, I_S), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde birim difonksiyon olsun. Bu durumda, her $G \in \tau$ ve $K \in \kappa$ için $I_S{}^{\leftarrow}G = G \in \tau$ ve $i_S{}^{\leftarrow}K = K \in \kappa$ olduğundan (i_S, I_S) bir ikili sürekli difonksiyondur.

(2) $(X_i, \tau_i)_{i=1,2}$ klasik topolojiler, $\left(X_i, \mathcal{P}(X_i), \pi_{X_i}, \tau_i, \kappa_i\right)_{i=1,2}$ bu klasik topolojilere karşılık gelen tümleyenli ditopolojik doku uzayları ve $(\varphi, \psi) : \left(X_1, \mathcal{P}(X_1)\right) \longrightarrow \left(X_2, \mathcal{P}(X_2)\right)$ bir difonksiyon olsun. Örnek 2.3.36.'da belirtildiği gibi $\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$ bir noktasal fonksiyon ve $\psi = \varphi'$ dir. Bu durumda; (φ, ψ) bir ikili sürekli difonksiyondur ancak ve ancak φ bir sürekli noktasal fonksiyondur (Yıldız, 2005).

Tanım 2.3.47. $(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)_{i=1,2}$ ditopolojik uzaylar ve $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun.

(1) Eğer her $G \in \tau_1$ için $f^{\rightarrow}G \in \tau_2$ $(F^{\rightarrow}G \in \tau_2)$ oluyorsa (f, F) difonksiyonuna *açık* (*koaçık*) difonksiyondur denir.

(2) Eğer her $K \in \kappa_1$ için $f^{\rightarrow}K \in \kappa_2$ $(F^{\rightarrow}K \in \kappa_2)$ oluyorsa (f, F) difonksiyonuna *kapalı* (*kokapalı*) difonksiyondur denir.

$(S, \mathcal{S})$ üzerindeki (i_S, I_S) birim difonksiyonu açık, koaçık, kapalı ve kokapalıdır (Yıldız, 2005).

Teorem 2.3.48. $(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)_{i=1,2,3}$ ditopolojik doku uzayları ve $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$, $(g, G) : (S_2, \mathcal{S}_2) \longrightarrow (S_3, \mathcal{S}_3)$ difonksiyonlar olsun.

(1) Eğer hem (f, F) hem de (g, G) sırasıyla sürekli (kosürekli, ikili sürekli) difonksiyonlar ise, $(g, G) \circ (f, F)$ de sırasıyla sürekli (kosürekli, ikili sürekli) difonksiyondur.

(2) Eğer hem (f, F) hem de (g, G) sırasıyla açık (koaçık, kapalı, kokapalı) difonksiyonlar ise, $(g, G) \circ (f, F)$ de sırasıyla açık (koaçık, kapalı, kokapalı) difonksiyondur (Yıldız, 2005).

Teorem 2.3.49. Ditopolojik doku uzayları ve aralarındaki ikili sürekli difonksiyonlar bir kategori oluşturur. Bu kategori $\mathbf{dfDitop}$ ile gösterilecektir (Brown ve ark., 2004b).

Teorem 2.3.50. $(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)_{i=1,2}$ ditopolojik uzaylar ve $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Eğer δ_2, (τ_2, κ_2) nin bir alt tabanı ve δ_2^*, (τ_2, κ_2) nin bir koalttabanı ise bu durumda;

(1) (f, F) süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $G \in \delta_2$ için $F^{\leftarrow}G = (f^{\leftarrow}G) \in \tau_1$ dir.

(2) (f, F) kosüreklidir $\Leftrightarrow$ Her $K \in \delta_2^*$ için $f^{\leftarrow}K = (F^{\leftarrow}K) \in \kappa_1$ dir (Yıldız, 2005).

Teorem 2.3.51. $(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)_{i=1,2}$ ditopolojik uzaylar ve $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Eğer β_2, (τ_2, κ_2) nin bir tabanı ve β_2^*, (τ_2, κ_2) nin bir kotabanı ise bu durumda;

(1) (f, F) süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $G \in \beta_2$ için $f^{\leftarrow}G \in \tau_1$ dir.

(2) (f, F) kosüreklidir $\Leftrightarrow$ Her $K \in \beta_2^*$ için $F^{\leftarrow}K \in \kappa_1$ dir (Yıldız, 2005).

Regüler Disüzgeçlerin Yakınsaklığı

Tanım 2.3.52. (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji olsun.

(1) Bir $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ kümesine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *di-aile* denir.

(2) Bir $\mathcal{D}$ di-ailesi için, $(A_i, B_i) \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots, n \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ oluyorsa $\mathcal{D}$ di-ailesi *sonlu dışlanma özelliğine* (*sdö*'ye) sahiptir denir (Özçağ ve ark., 2005).

Tanım 2.3.53. $(S, \mathcal{S})$ bir doku olsun.

(1) Aşağıdaki özellikleri sağlayan boştan farklı bir $F \subseteq \mathcal{S}$ ailesine bir $\mathcal{S}$-*süzgeç* veya $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *süzgeç* denir:

(F1) $\emptyset \notin F$,

(F2) $A \in F, A \subseteq A' \in \mathcal{S} \Longrightarrow A' \in F$

(F3) $A_1, A_2 \in F \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in F$

(2) Aşağıdaki özellikleri sağlayan boştan farklı bir $G \subseteq \mathcal{S}$ ailesine bir $\mathcal{S}$-*kosüzgeç* veya $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *kosüzgeç* denir:

(CF1) $S \notin G$,

(CF2) $B \in G, B \supseteq B' \in \mathcal{S} \Longrightarrow B' \in G$

(CF3) $B_1, B_2 \in G \Longrightarrow B_1 \cup B_2 \in G$

(3) F bir $\mathcal{S}$-süzgeç ve G bir $\mathcal{S}$-kosüzgeç ise $F \times G$ ye bir $\mathcal{S}$-*disüzgeç* veya $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *disüzgeç* denir (Özçağ ve ark., 2005).

Yardımcı Teorem 2.3.54. $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $F \times G$ disüzgeci için aşağıdakiler denktir (Özçağ ve ark., 2005):

(1) $F \cap G = \emptyset$

(2) $F \times G$ sdö'ye sahiptir.

(3) $A \in F, B \in G \Longrightarrow A \nsubseteq B$

Tanım 2.3.55. Yardımcı Teorem 2.3.54.'deki denk koşullardan birini sağlayan $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki bir disüzgece *regüler* denir (Özçağ ve ark., 2005).

Yardımcı Teorem 2.3.56. $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki $F_1 \times G_1$, $F_2 \times G_2$ disüzgeçleri için aşağıdakiler denktir (Özçağ ve ark., 2005):

(1) $F_1 \times G_1 \subseteq F_2 \times G_2$

(2) $F_1 \subseteq F_2$ ve $G_1 \subseteq G_2$

(3) $(A, B) \in F_1 \times G_1$ verildiğinde $A' \subseteq A$ ve $B \subseteq B'$ olacak şekilde $(A', B') \in F_2 \times G_2$ vardır.

Açıkça, $F_1 \times G_1 \subseteq F_2 \times G_2$ ve $F_2 \times G_2$ regüler ise, $F_1 \times G_1$ de regülerdir. Ancak bu ifadenin tersi, aşağıdaki örnekte görüleceği gibi genel olarak doğru değildir.

Örnek 2.3.57. (1) $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere $\big(X, \mathcal{P}(X)\big)$ dokusu göz önüne alınsın.

$$F_1 = \big\{\{a, b\}, X\big\},\ G_1 = \big\{\emptyset, \{c\}\big\}$$

ve

$$F_2 = \big\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\big\},\ G_2 = \big\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\big\}$$

biçiminde tanımlanırsa $F_1 \times G_1$ bir regüler disüzgeç, $F_1 \times G_1 \subseteq F_2 \times G_2$ dir ancak $F_2 \times G_2$ regüler olmayan bir disüzgeçtir (Özçağ ve ark., 2005).

(2) (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji olsun. Bir $s \in S^b$ noktasının kokomşulukları $\mu(s)$ bir $\mathcal{S}$-kosüzgeçtir ama komşulukları $\eta(s)$ genel olarak $\mathcal{S}$-süzgeç olmak zorunda değildir. Ancak $(S, \mathcal{S})$ dokusu sade ise, her $s \in S^b = S$ için $\eta(s) \times \mu(s)$ bir regüler $\mathcal{S}$-disüzgeçtir (Özçağ ve ark., 2005).

(3) Bir $s \in S^b$ noktasının açık komşulukları,

$$\eta^*(s) = \{A \in \mathcal{S} \mid \exists G_k \in \tau, G_k \nsubseteq Q_s, 1 \leq k \leq n : G_1 \cap \ldots \cap G_n \subseteq A\}$$

$\mathcal{S}$-süzgecini üretir. Benzer şekilde, $s \in S$ noktasının kapalı kokomşulukları,

$$\mu^*(s) = \{A \in \mathcal{S} \mid \exists F_k \in \kappa, P_s \nsubseteq F_k, 1 \leq k \leq n : A \subseteq F_1 \cup \ldots \cup F_n\}$$

$\mathcal{S}$-kosüzgecini üretir. Açıkça, $\mu^*(s) = \{B \in \mathcal{S} \mid \exists K \in \kappa, P_s \nsubseteq K : B \subseteq K\}$ dır ve $\eta^*(s) \times \mu^*(s)$ regülerdir (Özçağ ve ark., 2005).

$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı ve $F \times G$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir disüzgeç olsun. Klasik topolojide süzgeçlerin yakınsaklığına uygun olarak, $F \times G$ nin $s \in S^b$ noktasına yakınsaması $\eta(s) \times \mu(s) \subseteq F \times G$ koşuluyla tanımlanabilirdi. Ancak bu tanım fazla zayıf olacağından, aşağıdaki tanım yapılmıştır.

Tanım 2.3.58. $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı, F bir $\mathcal{S}$-süzgeç ve G bir $\mathcal{S}$-kosüzgeç olsun.

(1) $\eta^*(s) \subseteq F$ ise; F, $s \in S^b$ ye *yakınsar* denir ve $F \longrightarrow s$ yazılır.

(2) $\mu^*(s) \subseteq G$ ise; G, $s \in S$ ye *yakınsar* denir ve $G \longrightarrow s$ yazılır.

(3) $s, s' \in S$, $P_{s'} \nsubseteq Q_s$ için $F \longrightarrow s$ ve $G \longrightarrow s'$ ise, $F \times G$ ye *diyakınsaktır* denir. Bu durumda s ye $F \times G$ nin *limiti* ve s' ye $F \times G$ nin *kolimiti* denir (Özçağ ve ark., 2005).

Yardımcı Teorem 2.3.59. $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı, F bir $\mathcal{S}$-süzgeç ve G bir $\mathcal{S}$-kosüzgeç olsun. Aşağıdakiler sağlanır (Özçağ ve ark., 2005).

(1) $F \longrightarrow s \Leftrightarrow$ "$H \in \tau, H \nsubseteq Q_s \Longrightarrow H \in F$"

(2) $G \longrightarrow s \Leftrightarrow$ "$K \in \kappa, P_s \nsubseteq K \Longrightarrow K \in G$"

Önerme 2.3.60. $(S, \mathcal{S})$ bir sade doku olmak üzere; $F \times G$, bir $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı üzerinde bir disüzgeç olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir (Özçağ ve ark., 2005):

(1) $F \times G$ diyakınsaktır.

(2) Bir $s \in S$ için $\eta(s) \times \mu(s) \subseteq F \times G$ dir.

Örnek 2.3.61. Örnek 2.3.9. (2)'deki $(L, \mathcal{L})$ dokusu üzerinde ayrık ditopoloji (τ, κ) $(\tau, \kappa = \mathcal{L})$ ele alınsın. Bu durunda, $0 < r < 1$ için $\eta^*(r) = \eta(r) = \{(0, r'] \mid r < r'\}$ ve $\mu^*(r) = \mu(r) = \{(0, r'] \mid r' < r\}$ dir. $F = \eta^*(r)$ ve $G = \mu^*(r)$ alınırsa $\eta^*(r) \times \mu^*(r) \subseteq F \times G$ olur. Ayrıca, $F \longrightarrow s \Leftrightarrow \eta^*(s) \subseteq \eta^*(r) \Leftrightarrow r \leq s$ ve $G \longrightarrow s' \Leftrightarrow \mu^*(s') \subseteq \mu^*(r) \Leftrightarrow s' \leq r$ olduğundan $s' \leq s$ bulunur ki bu $P_{s'} \subseteq Q_s$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $F \times G$ diyakınsak olamaz (Özçağ ve ark., 2005).

Yardımcı Teorem 2.3.62. $F \times G$, bir $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı üzerinde bir regüler disüzgeç olsun. Aşağıdakiler sağlanır (Özçağ ve ark., 2005):

(1) $F \longrightarrow s$ ise, "$B \in G \Longrightarrow]B[\subseteq Q_s$".

(2) $G \longrightarrow s$ ise, "$A \in F \Longrightarrow P_s \subseteq [A]$".

Tanım 2.3.63. $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı, $F \times G$ $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir disüzgeç ve $s, s' \in S$ olsun.

(1) Bir $s \in S$ noktasına, eğer her $A \in F$ için $P_s \subseteq [A]$ oluyorsa F nin *değme noktası* denir.

(2) Bir $s \in S$ noktasına, eğer her $B \in G$ için $]B[\subseteq Q_s$ oluyorsa G nin *değme noktası* denir.

(3) Eğer $s, s' \in S$, $P_s \nsubseteq Q_{s'}$ için, s noktası F nin ve s' noktası G nin bir değme noktası ise (s, s') nokta çiftine $F \times G$ nin bir *dideğme noktasıdır* denir (Özçağ ve ark., 2005).

Sonuç 2.3.64. Bir ditopolojik doku uzayı $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ üzerinde, diyakınsak her regüler disüzgecin bir dideğme noktası vardır (Özçağ ve ark., 2005).

Sıradaki örnekte görüleceği gibi, bu sonucun tersi genel olarak doğru değildir, yani bir regüler disüzgecin bir dideğme noktası varsa bu disüzgeç diyakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek 2.3.65. Örnek 2.3.9. (2)'deki $(L, \mathcal{L})$ dokusu, üzerinde ayrık ve koayrık ditopoloji $\tau = \kappa = \mathcal{L}$ ile göz önüne alınsın. $0 < r_0 < r_1 < 1$ seçilirse ve $\mathcal{F} = \{(0, r] \mid r_1 < r \leq 1\}$, $\mathcal{G} = \{(0, r] \mid 0 < r < r_0\}$ tanımlanırsa $F \times G$ bir regüler disüzgeçtir. Şimdi $F \longrightarrow s$, $G \longrightarrow s'$ ve $P_{s'} \nsubseteq Q_s$ yani $s < s'$ olduğu varsayılsın. Buradan, $s < a < s'$ seçilsin ve $A = (0, a]$ olsun. Bu durumda,

$$A \nsubseteq Q_s, A \in \tau \Longrightarrow A \in \eta^*(s) \subseteq F, P_{s'} \nsubseteq A, A \in \kappa \Longrightarrow A \in \mu^*(s') \subseteq G$$

olur ve buradan $A \in F \cap G \neq \emptyset$ elde edilir ki bu $F \times G$ nin regüler olması ile çelişir. Dolayısıyla $F \times G$ diyakınsak değildir. Diğer taraftan, $(0, r] \in F \Longrightarrow P_{r_1} \subseteq (0, r]$ olup r_1, F nin bir değme noktasıdır. Benzer biçimde r_0 da G nin bir değme noktasıdır. Böylece, $P_{r_1} \nsubseteq Q_{r_0}$ olduğundan $F \times G$ nin bir dideğme noktası vardır (Özçağ ve ark., 2005).

Tanım 2.3.66. F, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir süzgeç ve G, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir kosüzgeç olsun.

(1) Eğer, her $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ için "$A_1 \cup A_2 \in F \Longrightarrow A_1 \in F$ veya $A_2 \in F$" oluyorsa F ye *asaldır* denir.

(2) Eğer, her $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ için "$B_1 \cap B_2 \in G \Longrightarrow B_1 \in G$ veya $B_2 \in G$" oluyorsa G ye *asaldır* denir (Özçağ ve ark., 2005).

Önerme 2.3.67. Bir $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerindeki bir $F \times G$ regüler disüzgeci için aşağıdakiler denktir (Özçağ ve ark., 2005):

(1) $F \times G$, bir maksimal regüler disüzgeçtir

(2) $F \cup G = \mathcal{S}$ dir.

(3) F bir asal $\mathcal{S}$-süzgeç ve $G = \mathcal{S} \setminus F$ dir.

(4) G bir asal $\mathcal{S}$-kosüzgeç ve $F = \mathcal{S} \setminus G$ dir.

Sonuç 2.3.68. $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki maksimal regüler disüzgeçler kümesi, $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki asal süzgeçler kümesi ve $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki asal kosüzgeçler kümesi arasında bire bir bir eşleme vardır (Özçağ ve ark., 2005).

Önerme 2.3.69. $F \times G$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde regüler disüzgeç olsun. Bu durumda, $F \times G \subseteq F^M \times G^M$ olacak şekilde $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $F^M \times G^M$ maksimal regüler disüzgeç vardır (Özçağ ve ark., 2005).

Önerme 2.3.70. $F \times G$, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ üzerinde bir maksimal regüler disüzgeç olsun. Bu durumda, $F \times G$ nin diyakınsak olması için gerek ve yeter şart dideğme noktasının olmasıdır (Özçağ ve ark., 2005).

Önerme 2.3.71. Bir ditopolojik doku uzayı $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ için aşağıdakiler birbirine denktir (Özçağ ve ark., 2005):

(a) $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ üzerinde her regüler disüzgecin bir dideğme noktası vardır.

(b) $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ üzerinde her maksimal regüler disüzgeç diyakınsaktır.

2.4. Dereceli Ditopolojik Doku Uzayları

Bu kısımda, Brown ve Šostak (2014) tarafından literatüre kazandırılan ve tezde geliştirilecek olan dereceli ditopolojik doku uzayları teorisinin temel yapısı verilecektir. Dereceli ditopolojik doku uzayları, bir anlamda ditopolojik doku uzaylarının fuzzyleştirilmesidir ve hem ditopolojik doku uzaylarından hem de Šostak anlamında fuzzy topolojik uzaylardan daha genel bir yapıdır.

Tanım 2.4.1. $(S, \mathcal{S})$ ve $(V, \mathcal{V})$ birer doku uzayı olsun.

(1) Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{T}: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ dönüşümüne $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli topoloji denir.

(GT1) $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\emptyset) = V$

(GT2) $\mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2) \subseteq \mathcal{T}(A_1 \cap A_2) \;\; \forall A_1, A_2 \in \mathcal{S}$

(GT3) $\bigcap_{j \in J} \mathcal{T}(A_j) \subseteq \mathcal{T}\left(\bigvee_{j \in J} A_j\right) \;\; \forall A_j \in \mathcal{S}, j \in J$

(2) Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{K}: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ dönüşümüne $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli kotopoloji denir.

(GCT1) $\mathcal{K}(S) = \mathcal{K}(\emptyset) = V$

(GCT2) $\mathcal{K}(A_1) \cap \mathcal{K}(A_2) \subseteq \mathcal{K}(A_1 \cup A_2) \;\; \forall A_1, A_2 \in \mathcal{S}$

(GCT3) $\bigcap_{j \in J} \mathcal{K}(A_j) \subseteq \mathcal{K}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \;\; \forall A_j \in \mathcal{S}, j \in J$

(3) $\mathcal{T}: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli topoloji ve $\mathcal{K}: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli kotopoloji ise $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ ikilisine, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopolojidir denir. Bu durumda, $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ sıralı altılısına dereceli ditopolojik doku uzayı denir (Brown ve Šostak, 2014).

Önerme 2.4.2. $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ bir tümleyenli doku ve $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopoloji ise $(\mathcal{K} \circ \sigma, \mathcal{T} \circ \sigma)$ da $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopolojidir (Brown ve Šostak, 2014).

Kanıt: $\mathcal{K} \circ \sigma : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ nin $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$- dereceli topoloji olduğunu görelim:

(1) $(\mathcal{K} \circ \sigma)(S) = \mathcal{K}(\sigma(S)) = \mathcal{K}(\emptyset) = V$ ve $(\mathcal{K} \circ \sigma)(\emptyset) = \mathcal{K}(\sigma(\emptyset)) = \mathcal{K}(S) = V$

(2) $A_1, A_2 \in \mathcal{S} \Longrightarrow (\mathcal{K} \circ \sigma)(A_1) \cap (\mathcal{K} \circ \sigma)(A_2) = \mathcal{K}(\sigma(A_1)) \cap \mathcal{K}(\sigma(A_2))$

$$\subseteq \mathcal{K}(\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)) = \mathcal{K}(\sigma(A_1 \cap A_2)) = (\mathcal{K} \circ \sigma)(A_1 \cap A_2)$$

(3) $j \in J, A_j \in \mathcal{S} \Longrightarrow \bigcap_{j\in J}(\mathcal{K} \circ \sigma)(A_j) = \bigcap_{j\in J} \mathcal{K}\left(\sigma(A_j)\right) \subseteq \mathcal{K}\left(\bigcap_{j\in J} \sigma(A_j)\right)$

$$= \mathcal{K}\left(\sigma\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right)\right) = (\mathcal{K} \circ \sigma)\left(\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right)\right)$$

Benzer şekilde $\mathcal{T} \circ \sigma : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ nin de $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$- dereceli kotopoloji olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.4.3. $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopoloji olsun. $(\mathcal{T}, \mathcal{K}) = (\mathcal{K} \circ \sigma, \mathcal{T} \circ \sigma)$ ise $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ ya $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir tümleyensel $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopolojidir denir (Brown ve Šostak, 2014).

Tanım 2.4.4. $(S_k, \mathcal{S}_k, \mathcal{T}_k, \mathcal{K}_k, V_k, \mathcal{V}_k)$, $k = 1,2$ dereceli ditopolojik doku uzayları ve $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$, $(h, H) : (V_1, \mathcal{V}_1) \longrightarrow (V_2, \mathcal{V}_2)$ difonksiyonlar olsunlar. $((f, F), (h, H))$ ikilisi için:

(1) Her $A \in \mathcal{S}_2$ için, $H^{\leftarrow}\mathcal{T}_2(A) \subseteq \mathcal{T}_1(F^{\leftarrow}A)$ ise (f, F) difonksiyonuna, (h, H) ye göre süreklidir denir.

(2) Her $A \in \mathcal{S}_2$ için, $h^{\leftarrow}\mathcal{K}_2(A) \subseteq \mathcal{K}_1(f^{\leftarrow}A)$ ise (f, F) difonksiyonuna, (h, H) ye göre kosüreklidir denir.

(3) (f, F) difonksiyonu (h, H) ye göre hem sürekli hem de kosürekli ise (f, F) difonksiyonuna, (h, H) ye göre ikili süreklidir denir (Brown ve Šostak, 2014).

Örnek 2.4.5. $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ bir dereceli ditopolojik doku uzayı olsun. Birim difonksiyonlar $(i_S, I_S) : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (S, \mathcal{S})$ ve $(i_V, I_V) : (V, \mathcal{V}) \longrightarrow (V, \mathcal{V})$ göz önüne alındığında, her $A \in \mathcal{S}$ için, $I_V{}^{\leftarrow}\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(I_S{}^{\leftarrow}A)$ ve $i_V{}^{\leftarrow}\mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(i_S{}^{\leftarrow}A)$ olduğundan (i_S, I_S), (i_V, I_V) ye göre ikili süreklidir (Brown ve Šostak, 2014).

$$\begin{tikzcd}
(S, \mathcal{S}) \arrow[r, "{(\mathcal{T}, \mathcal{K})}"] \arrow[d, "{(i_S, I_S)}"'] & (V, \mathcal{V}) \arrow[d, "{(i_V, I_V)}"] \\
(S, \mathcal{S}) \arrow[r, "{(\mathcal{T}, \mathcal{K})}"'] & (V, \mathcal{V})
\end{tikzcd}$$

Önerme 2.4.6. Dereceli ditopolojik doku uzaylarında bileşke işlemi altında difonksiyonların göreli ikili süreklilikleri korunur (Brown ve Šostak, 2014).

Kanıt: $(S_k, \mathcal{S}_k, \mathcal{T}_k, \mathcal{K}_k, V_k, \mathcal{V}_k)$, $k = 1,2,3$ dereceli ditopolojik doku uzayları ve $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$, $(h, H) : (V_1, \mathcal{V}_1) \longrightarrow (V_2, \mathcal{V}_2)$ ye göre ikili sürekli, $(g, G) :$

$(S_2, \mathcal{S}_2) \longrightarrow (S_3, \mathcal{S}_3)$, $(k, K) : (V_2, \mathcal{V}_2) \longrightarrow (V_3, \mathcal{V}_3)$ ye göre ikili sürekli difonksiyonlar ise;

$$
\begin{tikzcd}
(S_1, \mathcal{S}_1) \arrow[r, "(\mathcal{T}_1, \mathcal{K}_1)"] \arrow[d, "(f,F)"'] & (V_1, \mathcal{V}_1) \arrow[d, "(h,H)"] \\
(S_2, \mathcal{S}_2) \arrow[r, "(\mathcal{T}_2, \mathcal{K}_2)"] \arrow[d, "(g,G)"'] & (V_2, \mathcal{V}_2) \arrow[d, "(k,K)"] \\
(S_3, \mathcal{S}_3) \arrow[r, "(\mathcal{T}_3, \mathcal{K}_3)"] & (V_3, \mathcal{V}_3)
\end{tikzcd}
$$

her $A \in \mathcal{S}_3$ için, $K^{\leftarrow}\mathcal{T}_3(A) \subseteq \mathcal{T}_2(G^{\leftarrow}A)$ olur ve $G^{\leftarrow}A \in \mathcal{S}_2$ olduğundan

$$(K \circ H)^{\leftarrow}\mathcal{T}_3(A) = H^{\leftarrow}\big(K^{\leftarrow}\mathcal{T}_3(A)\big) \subseteq H^{\leftarrow}\big(\mathcal{T}_2(G^{\leftarrow}A)\big) \subseteq \mathcal{T}_1\big(F^{\leftarrow}(G^{\leftarrow}A)\big) = \mathcal{T}_1((G \circ F)^{\leftarrow}A)$$

elde edilir. Böylece, $(g \circ f, G \circ F)$, $(k \circ h, K \circ H)$ ye göre süreklidir. Benzer şekilde $(g \circ f, G \circ F)$ nin $(k \circ h, K \circ H)$ ye göre kosürekli olduğu görülebilir ve böylece ikili sürekli olduğu bulunur.

Sonuç 2.4.7. Dereceli ditopolojik doku uzayları ve bu uzaylar arasındaki göreli ikili sürekli difonksiyon çiftleri bir kategori oluşturur. Bu kategori **dfGDitop** ile gösterilir (Brown ve Šostak, 2014).

Örnek 2.4.8. $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı ve $(V, \mathcal{V}) = \big(1, P(1)\big)$ olsun. Bu durumda, $\tau^g, \kappa^g : \mathcal{S} \longrightarrow P(1)$,

$$\tau^g(A) = \begin{cases} \{1\}, & A \in \tau \\ \emptyset, & A \notin \tau \end{cases}, \qquad \kappa^g(A) = \begin{cases} \{1\}, & A \in \kappa \\ \emptyset, & A \notin \kappa \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa $(S, \mathcal{S}, \tau^g, \kappa^g, V, \mathcal{V})$ bir dereceli ditopolojik doku uzayı olur. (τ^g, κ^g) ye $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki (τ, κ) ditopolojisine karşılık gelen $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopoloji denir.

$(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1, \tau_1, \kappa_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2, \tau_2, \kappa_2)$ difonksiyonu ikili sürekli ise $(f, F) : \big(S_1, \mathcal{S}_1, {\tau_1}^g, {\kappa_1}^g, 1, P(1)\big) \longrightarrow \big(S_2, \mathcal{S}_2, {\tau_2}^g, {\kappa_2}^g, 1, P(1)\big)$, (i, I) ye göre ikili süreklidir. $\big(1, P(1)\big)$ doku uzayı üzerindeki tek difonksiyonun birim difonksiyon (i, I) olduğu göz önüne alınırsa, $\mathfrak{B}$: $\mathbf{dfDitop} \longrightarrow \mathbf{dfGDitop}$

$$\mathfrak{B}\big((f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1, \tau_1, \kappa_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2, \tau_2, \kappa_2)\big)$$
$$= \Big(\big((f, F), (i, I)\big) : \big(S_1, \mathcal{S}_1, {\tau_1}^g, {\kappa_1}^g, 1, P(1)\big) \longrightarrow \big(S_2, \mathcal{S}_2, {\tau_2}^g, {\kappa_2}^g, 1, P(1)\big)\Big)$$

biçiminde tanımlı funktor bir gömmedir. Ayrıca **dfDitop**, **dfGDitop** kategorisinin bir dolu alt kategorisidir (Brown ve Šostak, 2014).

$(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ bir dereceli ditopolojik doku uzayı olsun. Her $v \in V$ için,

$$\mathcal{T}^v = \{A \in \mathcal{S} \mid P_v \subseteq \mathcal{T}(A)\}, \qquad \mathcal{K}^v = \{A \in \mathcal{S} \mid P_v \subseteq \mathcal{K}(A)\}$$

aileleri tanımlansın.

Önerme 2.4.9. $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ bir dereceli ditopolojik doku uzayı olsun. Aşağıdakiler sağlanır (Brown ve Šostak, 2014):

(1) Her $v \in V$ için $(\mathcal{T}^v, \mathcal{K}^v)$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopolojidir.

(2) Her $v \in V$ için $\mathcal{T}^v = \bigcap\{\mathcal{T}^{v'} \mid P_v \nsubseteq Q_{v'}\}$ ve $\mathcal{K}^v = \bigcap\{\mathcal{K}^{v'} \mid P_v \nsubseteq Q_{v'}\}$

(3) Her $A \in \mathcal{S}$ için

$$\mathcal{T}(A) = \bigvee\{P_v \mid A \in \mathcal{T}^v\} = \bigcap\{Q_v \mid A \notin \mathcal{T}^v\}$$

$$\mathcal{K}(A) = \bigvee\{P_v \mid A \in \mathcal{K}^v\} = \bigcap\{Q_v \mid A \notin \mathcal{K}^v\}$$

(4) σ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir tümleyen ise her $v \in V$ için $(\mathcal{T} \circ \sigma)^v = \sigma(\mathcal{T}^v)$ ve $(\mathcal{K} \circ \sigma)^v = \sigma(\mathcal{K}^v)$ olur. Özel olarak; $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir tümleyensel $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopolojidir ancak ve ancak $\{(\mathcal{T}^v, \mathcal{K}^v)\}_{v \in V}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tümleyensel ditopolojilerin bir ailesidir.

Kanıt: (1) $v \in V$ olsun. $P_v \subseteq V = \mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\emptyset)$ olduğundan $S, \emptyset \in \mathcal{T}^v$ dir. $A_1, A_2 \in \mathcal{T}^v$ ise $P_v \subseteq \mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2) \subseteq \mathcal{T}(A_1 \cap A_2)$ olup $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}^v$ dir. $j \in J, A_j \in \mathcal{T}^v$ ise $P_v \subseteq \bigcap_{j \in J} \mathcal{T}(A_j) \subseteq \mathcal{T}(\bigvee_{j \in J} A_j)$ olup $\bigvee_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}^v$ dir. Yani $\mathcal{T}^v$, $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir topolojidir. Benzer şekilde $\mathcal{K}^v$ nin $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir kotopoloji olduğu gösterilebilir.

(4) Her $A \in \mathcal{S}$ için $A \in (\mathcal{T} \circ \sigma)^v \Leftrightarrow P_v \subseteq \mathcal{T}(\sigma(A)) \Leftrightarrow \sigma(A) \in \mathcal{T}^v \Leftrightarrow A \in \sigma(\mathcal{T}^v)$ olduğundan $(\mathcal{T} \circ \sigma)^v = \sigma(\mathcal{T}^v)$ dir. Benzer şekilde $(\mathcal{K} \circ \sigma)^v = \sigma(\mathcal{K}^v)$ olduğu görülür. $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ tümleyensel ise $\mathcal{T}^v = (\mathcal{K} \circ \sigma)^v = \sigma(\mathcal{K}^v)$ ve $\mathcal{K}^v = (\mathcal{T} \circ \sigma)^v = \sigma(\mathcal{T}^v)$ olduğundan $(\mathcal{T}^v, \mathcal{K}^v)$ de tümleyenseldir. Diğer taraftan, her $v \in V$ için $(\mathcal{T}^v, \mathcal{K}^v)$ tümleyensel olsun. $\mathcal{T} \neq \mathcal{K} \circ \sigma$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathcal{T}(A) \neq \mathcal{K}(\sigma(A))$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{S}$ vardır. $\mathcal{T}(A) \nsubseteq \mathcal{K}(\sigma(A))$ ise $\mathcal{T}(A) \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq \mathcal{K}(\sigma(A))$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. $\mathcal{T}(A) \nsubseteq Q_v$ olduğundan $P_v \subseteq \mathcal{T}(A)$ ve böylece $A \in \mathcal{T}^v$ olur. Hipotezden $\sigma(A) \in \mathcal{K}^v$ olur ki, bu $P_v \nsubseteq \mathcal{K}(\sigma(A))$ olması ile çelişir. Benzer şekilde $\mathcal{K}(\sigma(A)) \nsubseteq \mathcal{T}(A)$ kabulü ile de çelişkiye ulaşılır.

Tanım 2.4.10. $(S, \mathcal{S})$, $(V, \mathcal{V})$ doku uzayları ve her $v \in V$ için $(\mathcal{T}_v, \mathcal{K}_v)$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji olsun. Her $v \in \mathcal{V}$ için

$$\mathcal{T}_v = \bigcap\{\mathcal{T}_{v'} \mid P_v \not\subseteq Q_{v'}\} \text{ ve } \mathcal{K}_v = \bigcap\{\mathcal{K}_{v'} \mid P_v \not\subseteq Q_{v'}\}$$

oluyorsa $\{(\mathcal{T}_v, \mathcal{K}_v)\}_{v\in\mathcal{V}}$ ailesine $\mathcal{V}$*-uyumludur* denir.

Son önermeden, bir $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayından elde edilen ditopolojiler ailesi $\{(\mathcal{T}^v, \mathcal{K}^v)\}_{v\in\mathcal{V}}$ $\mathcal{V}$-uyumludur (Brown ve Šostak, 2014).

Önteorem 2.4.11. $(S, \mathcal{S})$, $(V, \mathcal{V})$ dokuları için, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde ditopolojiler ailesi $\{(\mathcal{T}_v, \mathcal{K}_v)\}_{v\in\mathcal{V}}$ $\mathcal{V}$-uyumlu olsun. Her $A \in \mathcal{S}$ için,

$$\bigvee\{P_v \mid A \in \mathcal{T}_v\} = \bigcap\{Q_v \mid A \notin \mathcal{T}_v\}, \quad \bigvee\{P_v \mid A \in \mathcal{K}_v\} = \bigcap\{Q_v \mid A \notin \mathcal{K}_v\}$$

olur (Brown ve Šostak, 2014).

Teorem 2.4.12. $(S, \mathcal{S})$, $(V, \mathcal{V})$ dokuları için, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde ditopolojiler ailesi $\{(\mathcal{T}_v, \mathcal{K}_v)\}_{v\in\mathcal{V}}$ $\mathcal{V}$-uyumlu olsun. Her $A \in \mathcal{S}$ için,

$$\mathcal{T}(A) = \bigvee\{P_v \mid A \in \mathcal{T}_v\} = \bigcap\{Q_v \mid A \notin \mathcal{T}_v\}$$

$$\mathcal{K}(A) = \bigvee\{P_v \mid A \in \mathcal{K}_v\} = \bigcap\{Q_v \mid A \notin \mathcal{K}_v\}$$

ile tanımlanan $\mathcal{T}, \mathcal{K} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ fonksiyonları, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopoloji $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ oluşturur. Ayrıca, her $v \in \mathcal{V}$ için $(\mathcal{T}^v, \mathcal{K}^v) = (\mathcal{T}_v, \mathcal{K}_v)$ dir (Brown ve Šostak, 2014).

Örnek 2.4.13. (1) $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı ve $(V, \mathcal{V})$ bir doku olsun. Her $v \in V$ için $(\mathcal{T}_v, \mathcal{K}_v) = (\tau, \kappa)$ biçiminde oluşturulan $\{(\mathcal{T}_v, \mathcal{K}_v)\}_{v\in\mathcal{V}}$ ailesi $\mathcal{V}$-uyumludur. Dolayısıyla $\{(\mathcal{T}_v, \mathcal{K}_v)\}_{v\in\mathcal{V}}$, her $v \in \mathcal{V}$ için $(\mathcal{T}^v, \mathcal{K}^v) = (\mathcal{T}_v, \mathcal{K}_v)$ olacak şekilde, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopoloji $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ tanımlanır. Son teoremden,

$$\mathcal{T}(A) = \begin{cases} V, & A \in \tau \\ \emptyset, & A \notin \tau \end{cases}$$

$$\mathcal{K}(A) = \begin{cases} V, & A \in \kappa \\ \emptyset, & A \notin \kappa \end{cases}$$

elde edilir. Özel olarak; V nin tek elemanlı, yani $(V, \mathcal{V}) = \big(1, P(1)\big)$ olması durumunda, $(\mathcal{T}^0, \mathcal{K}^0) = (\tau, \kappa)$ olacak biçimde bir $\big(1, P(1)\big)$- dereceli ditopoloji $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ elde edilir. Dolayısıyla $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki ditopolojiler ve $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki $\big(1, P(1)\big)$- dereceli ditopolojiler arasında birebir bir eşleme vardır.

(2) $(V, \mathcal{V}) = \big(V, P(V)\big)$ ayrık doku uzayı olmak üzere her $v \in V$ için $(\mathcal{T}_v, \mathcal{K}_v)$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde herhangi bir ditopoloji olsun. $(V, \mathcal{V})$ ayrık olduğundan $P_v \not\subseteq Q_{v'} \Leftrightarrow v = v'$ sağlanır ve böylece $\{(\mathcal{T}_v, \mathcal{K}_v)\}_{v\in\mathcal{V}}$ ailesi $\mathcal{V}$- uyumludur. Bu aileye karşılık gelen $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopoloji $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$,

$$\mathcal{T}(A) = \{v \mid A \in \mathcal{T}_v\}, \qquad \mathcal{K}(A) = \{v \mid A \in \mathcal{K}_v\}$$

biçimindedir ve her $v \in V$ için $(\mathcal{T}^v, \mathcal{K}^v) = (\mathcal{T}_v, \mathcal{K}_v)$ sağlanır (Brown ve Šostak, 2014).

Önerme 2.4.14. $k = 1, 2$ için; $(\mathcal{T}_k, \mathcal{K}_k)$, $(S_k, \mathcal{S}_k)$ üzerinde $(V_k, \mathcal{V}_k)$-dereceli ditopolojiler ve $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$, $(h, H) : (V_1, \mathcal{V}_1) \longrightarrow (V_2, \mathcal{V}_2)$ difonksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir (Brown ve Šostak, 2014):

(1) (f, F), (h, H) ye göre ikili süreklidir.

(2) $P_{v_1} \subseteq H^{\leftarrow} P_{v_2}$ koşulunu sağlayan her $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ için (f, F), $(\mathcal{T}_1{}^{v_1}, \mathcal{K}_1{}^{v_1}) - (\mathcal{T}_2{}^{v_2}, \mathcal{K}_2{}^{v_2})$ ikili süreklidir.

(3) $H^{\leftarrow} P_{v_2} \nsubseteq Q_{v_1}$ koşulunu sağlayan her $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ için (f, F), $(\mathcal{T}_1{}^{v_1}, \mathcal{K}_1{}^{v_1}) - (\mathcal{T}_2{}^{v_2}, \mathcal{K}_2{}^{v_2})$ ikili süreklidir.

BÖLÜM 3
DERECELİ DİTOPOLOJİLERDE TABAN VE ALTTABAN

Bir topolojik yapıda, çoğu kez topolojinin tüm açık kümeleri yerine bu topolojiyi belirleyen bazı açık kümeleri göz önüne almak yeterlidir. Bu durum, topoloji çalışmalarında çok kullanışlı olan taban ve alttaban kavramlarının ortaya çıkmasını sağlamıştır. Dolayısıyla dereceli ditopolojik uzaylarda da taban ve alttaban kavramlarının oluşturulması bu teorinin gelişmesi açısından faydalı olacaktır.

Bu bölümde, dereceli ditopolojilerde taban ve alttaban yapıları oluşturulacak ve bu yapıların bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1. $(\mathcal{T}_1, \mathcal{K}_1)$ ve $(\mathcal{T}_2, \mathcal{K}_2)$ bir $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde iki $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopoloji olsun. Eğer her $A \in \mathcal{S}$ için $\mathcal{T}_1(A) \subseteq \mathcal{T}_2(A)$ ve $\mathcal{K}_1(A) \subseteq \mathcal{K}_2(A)$ ise bu durumda $(\mathcal{T}_1, \mathcal{K}_1)$ $(V, \mathcal{V})$- dereceli ditopolojisi $(\mathcal{T}_2, \mathcal{K}_2)$ $(V, \mathcal{V})$- dereceli ditopolojisinden *daha kabadır* ve $(\mathcal{T}_2, \mathcal{K}_2)$ $(V, \mathcal{V})$- dereceli ditopolojisi $(\mathcal{T}_1, \mathcal{K}_1)$ $(V, \mathcal{V})$- dereceli ditopolojisinden *daha incedir* denir.

Tanım 3.2. $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopoloji, $\mathcal{B}, \mathcal{B}^*, \delta, \delta^* \subseteq \mathcal{S}$ olsun. Eğer her $v \in V$ için

$$A \in \mathcal{T}^v, A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists \{B_j\}_{j \in J} \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{T}^v) \ ; \quad A = \bigvee_{j \in J} B_j$$

koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{B}$ ‘ye $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopolojisi için bir *tabandır* denir. Eğer her $v \in V$ için

$$A \in \mathcal{K}^v, A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists \{B_j^*\}_{j \in J} \subseteq (\mathcal{B}^* \cap \mathcal{K}^v) \ ; \quad A = \bigcap_{j \in J} B_j^*$$

koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{B}^*$ ‘a $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopolojisi için bir *kotabandır* denir. Eğer her $v \in V$ için

$$A \in \mathcal{T}^v, A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists \{G_i^j\}_{j \in J, i \in I_j, I_j \, sonlu} \subseteq (\delta \cap \mathcal{T}^v) \ ; \quad A = \bigvee_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} G_i^j$$

koşulu sağlanıyorsa δ ‘ya $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopolojisi için bir *alttabandır* denir. Eğer her $v \in V$ için

$$A \in \mathcal{K}^v, A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists \{G^{*j}_i\}_{j \in J, i \in I_j, I_j \, sonlu} \subseteq (\delta^* \cap \mathcal{K}^v) \ ; \quad A = \bigcap_{j \in J} \bigvee_{i \in I_j} G^{*j}_i$$

koşulu sağlanıyorsa δ ‘ya $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopolojisi için bir *koalttabandır* denir.

Yani, sırasıyla $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$ $(\mathcal{B}^*, \delta, \delta^* \subseteq \mathcal{S})$ ailesi $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ $(V, \mathcal{V})$- dereceli ditopolojisi için bir tabandır (kotabandır, alttabandır, koalttabandır) ancak ve ancak her $v \in V$ için $\mathcal{B} \cap \mathcal{T}^v \subseteq \mathcal{S}$ $(\mathcal{B}^* \cap \mathcal{K}^v, \delta \cap \mathcal{T}^v, \delta^* \cap \mathcal{K}^v \subseteq \mathcal{S})$ ailesi $(\mathcal{T}^v, \mathcal{K}^v)$ ditopolojisi için bir tabandır (kotabandır, alttabandır, koalttabandır).

Tanım 3.3. $k = 1, 2$ için; $(\mathcal{T}_k, \mathcal{K}_k)$, $(S_k, \mathcal{S}_k)$ üzerinde $(V_k, \mathcal{V}_k)$-dereceli ditopolojiler, $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$ ve $(h, H) : (V_1, \mathcal{V}_1) \longrightarrow (V_2, \mathcal{V}_2)$ difonksiyonlar olsun. Eğer

$$\forall A \in \mathcal{S}_1 \text{ için } h^{\to}\mathcal{T}_1(A) \subseteq \mathcal{T}_2(f^{\to}A) \ \big(h^{\to}\mathcal{T}_1(A) \subseteq \mathcal{T}_2(F^{\to}A)\big)$$

koşulu sağlanıyorsa (f, F), (h, H) *'ye göre açıktır (koaçıktır)* denir, eğer

$$\forall A \in \mathcal{S}_1 \text{ için } h^{\to}\mathcal{K}_1(A) \subseteq \mathcal{K}_2(f^{\to}A) \ \big(h^{\to}\mathcal{K}_1(A) \subseteq \mathcal{K}_2(F^{\to}A)\big)$$

koşulu sağlanıyorsa (f, F), (h, H) *'ye göre kapalıdır (kokapalıdır)* denir.

Difonksiyonların sürekliliği, kosürekliliği, (ko-)açıklığı, (ko-)kapalılığı, klasik yapıya paralel olarak aşağıdaki önermedeki gibi (ko-)taban ve (ko-)alttaban kavramları kullanılarak da karakterize edilebilir.

Sonuç 3.4. $k = 1, 2$ için; $(\mathcal{T}_k, \mathcal{K}_k)$, $(S_k, \mathcal{S}_k)$ üzerinde $(V_k, \mathcal{V}_k)$-dereceli ditopolojiler, $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$ ve $(h, H) : (V_1, \mathcal{V}_1) \longrightarrow (V_2, \mathcal{V}_2)$ difonksiyonlar olsun. $\mathcal{B}$ $(\mathcal{B}^*, \delta, \delta^*) \subseteq \mathcal{S}_2$ ailesi $(\mathcal{T}_2, \mathcal{K}_2)$ $(V_2, \mathcal{V}_2)$- dereceli ditopolojik uzayı için sırasıyla bir taban (kotaban, alttaban, koalttaban) olsun. Bu durumda,

(1) (f, F), (h, H) 'ye göre süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall B \in \mathcal{B}$ için $H^{\leftarrow}\mathcal{T}_2(B) \subseteq \mathcal{T}_1(f^{\leftarrow}B)$

$\Leftrightarrow$ $\forall G \in \delta$ için $H^{\leftarrow}\mathcal{T}_2(G) \subseteq \mathcal{T}_1(f^{\leftarrow}B)$

(2) (f, F), (h, H) 'ye göre kosüreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall B^* \in \mathcal{B}^*$ için $H^{\leftarrow}\mathcal{K}_2(B^*) \subseteq \mathcal{K}_1(F^{\leftarrow}B^*)$ $\Leftrightarrow$ $\forall G^* \in \delta^*$için $H^{\leftarrow}\mathcal{K}_2(G^*) \subseteq \mathcal{K}_1(F^{\leftarrow}G^*)$

Kanıt: (1) $\mathcal{B}, \delta \subseteq \mathcal{S}_2$ olduğundan gereklilikler açıktır.

Her $G \in \delta$ için $H^{\leftarrow}\mathcal{T}_2(G) \subseteq \mathcal{T}_1(F^{\leftarrow}G)$ ve de; $v_1 \in V_1$ ve $v_2 \in V_2$, $P_{v_1} \subseteq H^{\leftarrow}P_{v_2}$ koşulunu sağlayan herhangi iki nokta olsun. Eğer $(f, F) : \big(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\big) \longrightarrow \big(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\big)$ difonksiyonunun sürekli olduğu gösterilirse Önerme 2.4.14.'den (f, F) nin (h, H) 'ye göre sürekli olduğu çıkar. $A \in \mathcal{T}_2^{v_2}$ olsun. $\exists \{G_i^j\}_{j \in J, i \in I_j, I_j\, sonlu} \subseteq \big(\delta \cap \mathcal{T}_2^{v_2}\big)$; $A = \bigvee_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} G_i^j$. Buradan, (GT2), (GT3), Teorem 2.3.30. (6) ve Teorem 2.3.38. (3) göz önüne alındığında,

$$\mathcal{T}_1(F^{\leftarrow}A) = \mathcal{T}_1\left(F^{\leftarrow}\left(\bigvee_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j} G_i^j\right)\right) = \mathcal{T}_1\left(\bigvee_{j\in J} F^{\leftarrow}\left(\bigcap_{i\in I_j} G_i^j\right)\right) = \mathcal{T}_1\left(\bigvee_{j\in J} f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{i\in I_j} G_i^j\right)\right)$$

$$= \mathcal{T}_1\left(\bigvee_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j} f^{\leftarrow} G_i^j\right) = \mathcal{T}_1\left(\bigvee_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j} F^{\leftarrow} G_i^j\right) \supseteq \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j} \mathcal{T}_1\left(F^{\leftarrow} G_i^j\right)$$

$$\supseteq \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j} H^{\leftarrow}\mathcal{T}_2(G_i^j) \supseteq H^{\leftarrow}P_{v_2} \supseteq P_{v_1}$$

olur ki, bu $F^{\leftarrow}A \in \mathcal{T}_1^{v_1}$ demektir.

Şimdi, her $B \in \mathcal{B}$ için $H^{\leftarrow}\mathcal{T}_2(B) \subseteq \mathcal{T}_1(F^{\leftarrow}B)$ ve de; $v_1 \in V_1$ ve $v_2 \in V_2$, $P_{v_1} \subseteq H^{\leftarrow}P_{v_2}$ koşulunu sağlayan herhangi iki nokta olsun. Eğer $(f,F) : \left(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\right) \longrightarrow \left(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ difonksiyonunun sürekli olduğu gösterilirse Önerme 2.4.14.'den (f,F) nin (h,H) ‘ye göre sürekli olduğu çıkar. $A \in \mathcal{T}_2^{v_2}$ olsun. O zaman, $\exists\{B_j\}_{j\in J} \subseteq \left(\mathcal{B} \cap \mathcal{T}_2^{v_2}\right)$; $A = \bigvee_{j\in J} B_j$ olur. Buradan, (GT3) ve Teorem 2.3.30. (6) göz önüne alındığında,

$$\mathcal{T}_1(F^{\leftarrow}A) = \mathcal{T}_1\left(F^{\leftarrow}\left(\bigvee_{j\in J} B_j\right)\right) = \mathcal{T}_1\left(\bigvee_{j\in J} F^{\leftarrow}(B_j)\right) \supseteq \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_1\left(F^{\leftarrow}(B_j)\right) \supseteq \bigcap_{j\in J} H^{\leftarrow}\mathcal{T}_2(B_j)$$

$$\supseteq H^{\leftarrow}P_{v_2} \supseteq P_{v_1}$$

olur ki, bu $F^{\leftarrow}A \in \mathcal{T}_1^{v_1}$ demektir.

(2) $\mathcal{B}^*, \delta^* \subseteq \mathcal{S}_2$ olduğundan gereklilikler açıktır.

Her $G^* \in \delta^*$ için $H^{\leftarrow}\mathcal{K}_2(G^*) \subseteq \mathcal{K}_1(F^{\leftarrow}G^*)$ ve de; $v_1 \in V_1$ ve $v_2 \in V_2$, $P_{v_1} \subseteq H^{\leftarrow}P_{v_2}$ koşulunu sağlayan herhangi iki nokta olsun. Eğer $(f,F) : \left(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\right) \longrightarrow \left(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ difonksiyonunun kosürekli olduğu gösterilirse Önerme 2.4.14.'den (f,F) nin (h,H) ‘ye göre kosürekli olduğu çıkar. $A \in \mathcal{K}_2^{v_2}$ olsun. Bu durumda, $\exists\{{G^*}_i^j\}_{j\in J, i\in I_j, I_j\, sonlu} \subseteq \left(\delta^* \cap \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$; $A = \bigcap_{j\in J}\bigvee_{i\in I_j} {G^*}_i^j$ olur. Buradan, (GCT2), (GCT3), Teorem 2.3.30. (6) ve Teorem 2.3.38. (3) göz önüne alındığında,

$$\mathcal{K}_1(F^{\leftarrow}A)=\mathcal{K}_1\left(F^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J}\bigvee_{i\in I_j}{G^*}_i^j\right)\right)=\mathcal{K}_1\left(f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J}\bigvee_{i\in I_j}{G^*}_i^j\right)\right)$$

$$=\mathcal{K}_1\left(\bigcap_{j\in J}f^{\leftarrow}\left(\bigvee_{i\in I_j}{G^*}_i^j\right)\right)=\mathcal{K}_1\left(\bigcap_{j\in J}F^{\leftarrow}\left(\bigcup_{i\in I_j}{G^*}_i^j\right)\right)$$

$$=\mathcal{K}_1\left(\bigcap_{j\in J}\bigcup_{i\in I_j}F^{\leftarrow}{G^*}_i^j\right)\supseteq\bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j}\mathcal{K}_1\left(F^{\leftarrow}{G^*}_i^j\right)\supseteq\bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j}H^{\leftarrow}\mathcal{K}_2({G^*}_i^j)$$

$$\supseteq H^{\leftarrow}P_{v_2}\supseteq P_{v_1}$$

olur ki, bu $F^{\leftarrow}A\in\mathcal{K}_1^{v_1}$ demektir.

Şimdi, her $B^*\in\mathcal{B}^*$ için $H^{\leftarrow}\mathcal{K}_2(B^*)\subseteq\mathcal{K}_1(F^{\leftarrow}B^*)$ ve $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$, $P_{v_1}\subseteq H^{\leftarrow}P_{v_2}$ koşulunu sağlayan herhangi iki nokta olsun. Eğer $(f,F):\left(S_1,\mathcal{S}_1,\mathcal{T}_1^{v_1},\mathcal{K}_1^{v_1}\right)\longrightarrow\left(S_2,\mathcal{S}_2,\mathcal{T}_2^{v_2},\mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ difonksiyonunun kosürekli olduğu gösterilirse Önerme 2.4.14.'den (f,F) nin (h,H) 'ye göre kosürekli olduğu çıkar. $A\in\mathcal{K}_2^{v_2}$ olsun. O zaman $\exists\{B_j^*\}_{j\in J}\subseteq\left(\mathcal{B}^*\cap\mathcal{K}_2^{v_2}\right)$; $A=\bigcap_{j\in J}B_j^*$ elde edilir. Buradan, (GCT2), (GCT3), Teorem 2.3.30. (6) ve Teorem 2.3.38. (3) göz önüne alındığında,

$$\mathcal{K}_1(F^{\leftarrow}A)=\mathcal{K}_1\left(F^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J}B_j^*\right)\right)=\mathcal{K}_1\left(f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J}B_j^*\right)\right)=\mathcal{K}_1\left(\bigcap_{j\in J}f^{\leftarrow}(B_j^*)\right)$$

$$=\mathcal{K}_1\left(\bigcap_{j\in J}F^{\leftarrow}(B_j^*)\right)\supseteq\bigcap_{j\in J}\mathcal{K}_1\left(F^{\leftarrow}(B_j^*)\right)\supseteq\bigcap_{j\in J}H^{\leftarrow}\mathcal{K}_2(B_j^*)\supseteq H^{\leftarrow}P_{v_2}$$

$$\supseteq P_{v_1}$$

olur ki, bu $F^{\leftarrow}A\in\mathcal{K}_1^{v_1}$ demektir.

Önerme 3.5. $k=1,2$ için; $(\mathcal{T}_k,\mathcal{K}_k)$, $(S_k,\mathcal{S}_k)$ üzerinde $(V_k,\mathcal{V}_k)$-dereceli ditopolojiler, $(f,F):(S_1,\mathcal{S}_1)\longrightarrow(S_2,\mathcal{S}_2)$ ve $(h,H):(V_1,\mathcal{V}_1)\longrightarrow(V_2,\mathcal{V}_2)$ difonksiyonlar olsun. (f,F), (h,H) 'ye göre açıktır (kapalıdır) ancak ve ancak $P_{v_2}\subseteq h^{\rightarrow}P_{v_1}$ koşulunu sağlayan her $v_1\in V_1,v_2\in V_2$ için $(f,F):\left(S_1,\mathcal{S}_1,\mathcal{T}_1^{v_1},\mathcal{K}_1^{v_1}\right)\longrightarrow\left(S_2,\mathcal{S}_2,\mathcal{T}_2^{v_2},\mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ açıktır (kapalıdır).

Kanıt: (f,F) difonksiyonu (h,H) 'ye göre açık ve $v_1\in V_1,v_2\in V_2$, $P_{v_2}\subseteq h^{\rightarrow}P_{v_1}$ koşulunu sağlayan noktalar olsun. $A\in\mathcal{T}_1^{v_1}$ ise $\mathcal{T}_2(f^{\rightarrow}A)\supseteq h^{\rightarrow}\mathcal{T}_1(A)\supseteq h^{\rightarrow}P_{v_1}\supseteq P_{v_2}$ olup $f^{\rightarrow}A\in\mathcal{T}_2^{v_2}$ olur. Yani, $(f,F):\left(S_1,\mathcal{S}_1,\mathcal{T}_1^{v_1},\mathcal{K}_1^{v_1}\right)\longrightarrow\left(S_2,\mathcal{S}_2,\mathcal{T}_2^{v_2},\mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ açıktır.

$P_{v_2} \subseteq h^{\rightarrow} P_{v_1}$ koşulunu sağlayan her $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ için $(f,F) : \left(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\right)$ $\longrightarrow \left(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ açık olsun, fakat (f,F) difonksiyonu (h,H) 'ye göre açık olmasın. Bu durumda $h^{\rightarrow}\mathcal{T}_1(A) \nsubseteq \mathcal{T}_2(f^{\rightarrow}A)$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{S}_1$ vardır. Buradan, $h^{\rightarrow}\mathcal{T}_1(A) \nsubseteq Q_{v_2}$ ve $P_{v_2} \nsubseteq \mathcal{T}_2(f^{\rightarrow}A)$ olacak şekilde bir $v_2 \in V_2$ vardır. $\mathcal{T}_1(A) \in \mathcal{V}_1$ olduğundan, Teorem 2.3.30. (5) göz önüne alınırsa,

$$h^{\rightarrow}\mathcal{T}_1(A) = h^{\rightarrow}\left(\bigvee_{v \in \mathcal{T}_1(A)} P_v\right) = \left(\bigvee_{v \in \mathcal{T}_1(A)} h^{\rightarrow}P_v\right) \nsubseteq Q_{v_2}$$

olur, böylece $h^{\rightarrow}P_{v_1} \nsubseteq Q_{v_2}$olacak biçimde bir $v_1 \in \mathcal{T}_1(A)$ vardır. Buradan $P_{v_2} \subseteq h^{\rightarrow}P_{v_1}$ ve $v_1 \in \mathcal{T}_1(A)$ olduğundan $P_{v_1} \subseteq \mathcal{T}_1(A)$ ve $A \in \mathcal{T}_1^{v_1}$ dir. Ancak $P_{v_2} \nsubseteq \mathcal{T}_2(f^{\rightarrow}A)$ olduğundan $f^{\rightarrow}A \notin \mathcal{T}_2^{v_2}$ olur ki bu durum $(f,F) : \left(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\right) \longrightarrow \left(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ nin açık olmasıyla çelişir. Böylece, varsayımın aksine (f,F) difonksiyonu (h,H) 'ye göre açıktır.

Şimdi, (f,F) difonksiyonu (h,H) 'ye göre kapalı ve $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, $P_{v_2} \subseteq h^{\rightarrow}P_{v_1}$ koşulunu sağlayan noktalar olsun. $A \in \mathcal{K}_1^{v_1}$ ise $\mathcal{K}_2(f^{\rightarrow}A) \supseteq h^{\rightarrow}\mathcal{K}_1(A) \supseteq h^{\rightarrow}P_{v_1} \supseteq P_{v_2}$ olup $f^{\rightarrow}A \in \mathcal{K}_2^{v_2}$ olur. Yani, $(f,F) : \left(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\right) \longrightarrow \left(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ kapalıdır.

$P_{v_2} \subseteq h^{\rightarrow}P_{v_1}$ koşulunu sağlayan her $v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$ için $(f,F) : \left(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\right)$ $\longrightarrow \left(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ kapalı olsun, fakat (f,F) difonksiyonu (h,H) 'ye göre kapalı olmasın. Bu durumda $h^{\rightarrow}\mathcal{K}_1(A) \nsubseteq \mathcal{K}_2(f^{\rightarrow}A)$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{S}_1$ vardır. Buradan, $h^{\rightarrow}\mathcal{K}_1(A) \nsubseteq Q_{v_2}$ ve $P_{v_2} \nsubseteq \mathcal{K}_2(f^{\rightarrow}A)$ olacak şekilde bir $v_2 \in V_2$ vardır. $\mathcal{K}_1(A) \in \mathcal{V}_1$ olduğundan, Teorem 2.3.30. (5) göz önüne alınırsa,

$$h^{\rightarrow}\mathcal{K}_1(A) = h^{\rightarrow}\left(\bigvee_{v \in \mathcal{K}_1(A)} P_v\right) = \left(\bigvee_{v \in \mathcal{K}_1(A)} h^{\rightarrow}P_v\right) \nsubseteq Q_{v_2}$$

olur, böylece $h^{\rightarrow}P_{v_1} \nsubseteq Q_{v_2}$olacak biçimde bir $v_1 \in \mathcal{K}_1(A)$ vardır. Buradan $P_{v_2} \subseteq h^{\rightarrow}P_{v_1}$ ve $A \in \mathcal{K}_1^{v_1}$ dir. Ancak $P_{v_2} \nsubseteq \mathcal{K}_2(f^{\rightarrow}A)$ olduğundan $f^{\rightarrow}A \notin \mathcal{K}_2^{v_2}$ olur ki bu durum $(f,F) :$ $\left(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\right) \longrightarrow \left(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ nin kapalı olmasıyla çelişir. Böylece, varsayımın aksine (f,F) difonksiyonu (h,H) 'ye göre kapalıdır.

Önerme 3.6. $k = 1,2$ için; $(\mathcal{T}_k, \mathcal{K}_k)$, $(S_k, \mathcal{S}_k)$ üzerinde $(V_k, \mathcal{V}_k)$-dereceli ditopolojiler, $(f,F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$ ve $(h,H) : (V_1, \mathcal{V}_1) \longrightarrow (V_2, \mathcal{V}_2)$ difonksiyonlar olsun. (f,F), (h,H) 'ye göre koaçıktır (kokapalıdır) ancak ve ancak $P_{v_2} \subseteq h^{\rightarrow}P_{v_1}$ koşulunu sağlayan her $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ için $(f,F) : \left(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\right) \longrightarrow \left(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ koaçıktır (kokapalıdır).

Kanıt: Önerme 3.5.'in kanıtına benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 3.7. $k = 1, 2$ için; $(\mathcal{T}_k, \mathcal{K}_k)$, $(S_k, \mathcal{S}_k)$ üzerinde $(V_k, \mathcal{V}_k)$-dereceli ditopolojiler, $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$ ve $(h, H) : (V_1, \mathcal{V}_1) \longrightarrow (V_2, \mathcal{V}_2)$ difonksiyonlar olsun. $\mathcal{B}$ $(\mathcal{B}^*) \subseteq \mathcal{S}_1$ ailesi, $(\mathcal{T}_1, \mathcal{K}_1)$ $(V_1, \mathcal{V}_1)$-dereceli ditopolojik uzayı için sırasıyla bir taban (kotaban) olsun. Bu durumda,

(1) (f, F), (h, H) 'ye göre açıktır $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}$ için $h^{\rightarrow}\mathcal{T}_1(B) \subseteq \mathcal{T}_2(f^{\rightarrow}B)$

(2) (f, F), (h, H) 'ye göre kokapalıdır $\Leftrightarrow \forall B^* \in \mathcal{B}^*$ için $h^{\rightarrow}\mathcal{K}_1(B^*) \subseteq \mathcal{K}_2(F^{\rightarrow}B^*)$

Kanıt: (1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}_1$ olduğundan gereklilik açıktır.

Diğer taraftan, her $B \in \mathcal{B}$ için $h^{\rightarrow}\mathcal{T}_1(B) \subseteq \mathcal{T}_2(f^{\rightarrow}B)$ olsun. Önerme 3.5. gereği; (f, F) nin (h, H) 'ye göre açık olduğunu göstermek için, $P_{v_2} \subseteq h^{\rightarrow}P_{v_1}$ koşulunu sağlayan her $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ için $(f, F) : \left(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\right) \longrightarrow \left(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ nin açık olduğunu göstermek yeterlidir. O halde, $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$; $P_{v_2} \subseteq h^{\rightarrow}P_{v_1}$ koşulunu sağlayan noktalar ve $A \in \mathcal{T}_1^{v_1}$ olsun. $\mathcal{B}$ taban olduğundan, $\exists \{B_j\}_{j \in J} \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathcal{T}^{v_1})$; $A = \bigvee_{j \in J} B_j$ dır. Buradan, Teorem 2.3.30. (5) ve (GT3) göz önüne alınırsa,

$$\mathcal{T}_2(f^{\rightarrow}A) = \mathcal{T}_2\left(f^{\rightarrow}\left(\bigvee_{j \in J} B_j\right)\right) = \mathcal{T}_2\left(\bigvee_{j \in J} f^{\rightarrow}B_j\right) \supseteq \bigcap_{j \in J} \mathcal{T}_2\left(f^{\rightarrow}B_j\right) \supseteq \bigcap_{j \in J} h^{\rightarrow}\mathcal{T}_1(B_j)$$

$$\supseteq h^{\rightarrow}P_{v_1} \supseteq P_{v_2}$$

bulunur. Böylece, $(f, F) : \left(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\right) \longrightarrow \left(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ açıktır.

(2) $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{S}_1$ olduğundan gereklilik açıktır.

Diğer taraftan, her $B^* \in \mathcal{B}^*$ için $h^{\rightarrow}\mathcal{K}_1(B^*) \subseteq \mathcal{K}_2(F^{\rightarrow}B^*)$ olsun. Önerme 3.6. gereği; (f, F) nin (h, H) 'ye göre kokapalı olduğunu göstermek için, $P_{v_2} \subseteq h^{\rightarrow}P_{v_1}$ koşulunu sağlayan her $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ için $(f, F) : \left(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\right) \longrightarrow \left(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ nin kokapalı olduğunu göstermek yeterlidir. O halde, $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$; $P_{v_2} \subseteq h^{\rightarrow}P_{v_1}$ koşulunu sağlayan noktalar ve $A \in \mathcal{K}_1^{v_1}$ olsun. $\mathcal{B}^*$ kotaban olduğundan, $\exists \{B_j^*\}_{j \in J} \subseteq (\mathcal{B}^* \cap \mathcal{K}^{v_1})$; $A = \bigcap_{j \in J} B_j^*$ dır. Buradan, Teorem 2.3.30. (5) ve (GCT3) göz önüne alınırsa,

$$\mathcal{K}_2(F^{\rightarrow}A) = \mathcal{K}_2\left(F^{\rightarrow}\left(\bigcap_{j \in J} B_j^*\right)\right) = \mathcal{K}_2\left(\bigcap_{j \in J} F^{\rightarrow}B_j^*\right) \supseteq \bigcap_{j \in J} \mathcal{K}_2\left(F^{\rightarrow}B_j^*\right) \supseteq \bigcap_{j \in J} h^{\rightarrow}\mathcal{K}_1(B_j^*)$$

$$\supseteq h^{\rightarrow}P_{v_1} \supseteq P_{v_2}$$

bulunur. Böylece, $(f, F) : \left(S_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1^{v_1}, \mathcal{K}_1^{v_1}\right) \longrightarrow \left(S_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2^{v_2}, \mathcal{K}_2^{v_2}\right)$ kokapalıdır.

Örnek 3.8. $(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)_{i=1,2}$ ditopolojik uzaylar ve $(f, F) :\ (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda, $i = 1{,}2$ için; $\left(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i{}^g, \kappa_i{}^g, 1, P(1)\right)$, $(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)$ ye karşılık gelen dereceli ditopolojik doku uzayı olmak üzere, sırasıyla, (f, F), $(\tau_1, \kappa_1) - (\tau_2, \kappa_2)$ açık (koaçık, kapalı, kokapalı) ise (i, I) ye göre $(\tau_1{}^g, \kappa_1{}^g) - (\tau_2{}^g, \kappa_2{}^g)$ açıktır (koaçıktır, kapalıdır, kokapalıdır).

BÖLÜM 4
DERECELİ DİTOPOLOJİLERDE KOMŞULUK SİSTEMLERİ

Komşuluk sistemi, topolojideki temel kavramlardan biridir. Yerel özelliklerin yanı sıra, süreklilik ve açıklık gibi birçok kavram komşuluk sistemi yardımıyla karakterize edilip araştırılabilir. Bu nedenle, Brown ve Šostak (2014) tarafından sunulan dereceli ditopolojik doku uzaylarında da, yerel özelliklerin ve yerel kavramların çalışılabilmesi için, komşuluk sistemlerinin araştırılması, bu teorinin geliştirilmesi açısından önemli ve gereklidir.

Demirci (1997), fuzzy mantığa uygun bir yöntemle, smooth topolojik uzaylar üzerinde iki çeşit komşuluk sistemi tanımlamıştır. Dereceli ditopolojik doku uzayları teorisi, ditopolojik yapının bir anlamda fuzzyleştirilmesine dayanmaktadır. Bu bölümde, Demirci (1997)'nin komşuluk sistemini tanımlarken kullandığı yöntem kullanılarak, dereceli ditopolojik doku uzayları üzerinde iki çeşit komşuluk sistemi oluşturulacak ve bu yeni yapıların diğer yapılarla ilişkisi incelenecektir.

$(S,\mathcal{S})$ ve $(V,\mathcal{V})$ dokular, $K : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ bir dönüşüm olmak üzere, her $v \in V$ için ${}^{v}K$ sembolü ile

$$\{A \in \mathcal{S} \mid K(A) \not\subseteq Q_v\} \tag{4.1}$$

ailesini kastedeceğiz.

4.1. Dereceli Dikomşuluk Sistemleri

Tanım 4.1.1. $(S,\mathcal{S})$ dokusu üzerinde $(\mathcal{T},\mathcal{K})$ bir $(V,\mathcal{V})$-dereceli ditopoloji, $N : S^b \longrightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$, $M : S \longrightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ dönüşümler, her $s \in S^b$ için $N(s) = N_s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ ve her $s \in S$ için $M(s) = M_s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ fonksiyonlar olsun. Eğer her $v \in V^b$ için,

$${}^{v}N_s = \{A \in \mathcal{S} \mid \exists B \in \mathcal{S} : \mathcal{T}(B) \not\subseteq Q_v \text{ ve } P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s\} \tag{4.2}$$

oluyorsa, N_s fonksiyonuna *s noktasının dereceli komşuluk sistemi*; her $v \in V^b$ için,

$${}^{v}M_s = \{A \in \mathcal{S} \mid \exists B \in \mathcal{S} : \mathcal{K}(B) \not\subseteq Q_v \text{ ve } P_s \not\subseteq A \subseteq B \subseteq Q_s\} \tag{4.3}$$

oluyorsa, M_s fonksiyonuna *s noktasının dereceli kokomşuluk sistemi* denir. Eğer her

$s \in S^b$ $(s \in S)$ için N_s (M_s), s noktasının dereceli (ko-) komşuluk sistemi ise, sırasıyla N (M) dönüşümüne $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayının dereceli (ko-) komşuluk sistemi denir. Eğer N, $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayının bir dereceli komşuluk sistemi ve M de bu uzayın bir dereceli kokomşuluk sistemi ise (N, M) ikilisine $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayının dereceli dikomşuluk sistemidir denir.

Önerme 4.1.2. Yukarıdaki gösterimlere bağlı kalarak; (N, M), bir $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayı için bir dereceli dikomşuluk sistemidir ancak ve ancak her $s \in S^b$, $A \in \mathcal{S}$ için

$$N_s(A) = \begin{cases} \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\}, & A \not\subseteq Q_s \\ \emptyset, & A \subseteq Q_s \end{cases} \tag{4.4}$$

ve her $s \in S$, $A \in \mathcal{S}$ için

$$M_s(A) = \begin{cases} \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \not\subseteq A \subseteq B \subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\}, & P_s \not\subseteq A \\ \emptyset, & P_s \subseteq A \end{cases} \tag{4.5}$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt:

(⟹): $s \in S^b$, $A \in \mathcal{S}$ ve N_s s'nin dereceli komşuluk sistemi olsun. $A \subseteq Q_s$ ya da $A \not\subseteq Q_s$dir.

1. durum: $A \subseteq Q_s$ ise (4.2)'den $\forall v \in V^b$ için $A \notin {}^{v}N_s$ ve (4.1)'den $\forall v \in V^b$ için $N_s(A) \subseteq Q_v$ olur. $N_s(A) \neq \emptyset$ olduğu kabul edilirse $\left(N_s(A)\right)^b \neq \emptyset$ ve buradan $t \in \left(N_s(A)\right)^b$ olacak biçimde bir $t \in V^b$ vardır. Böylece $t \in \left(N_s(A)\right)^b$ olduğundan $N_s(A) \not\subseteq Q_t$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $N_s(A) = \emptyset$ dir.

2. durum: $A \not\subseteq Q_s$ olsun ve $N_s(A) \not\subseteq \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\}$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $N_s(A) \not\subseteq Q_v$ ve $P_v \not\subseteq \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\}$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Hatta $Q_v \neq V$ olduğundan $v \in V^b$ dir ve (4.1)'den $A \in {}^{v}N_s$ olur. Buradan, (4.2)'den $\tau(B) \not\subseteq Q_v$ ve $P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır, böylece $\sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\} \not\subseteq Q_v$ olur ki bu, $P_v \not\subseteq \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\}$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlış, yani $N_s(A) \subseteq \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\}$ olur.

Şimdi de $\sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq N_s(A)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v\ ve\ P_v \nsubseteq N_s(A)$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Hatta $Q_v \neq V$ olduğundan $v \in V^b$ ve $N_s(A) \subseteq Q_v$ dir ve (4.1)'den $A \notin {}^vN_s$ olur. $\sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ olduğundan $P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s$ ve $\mathcal{T}(B) \nsubseteq Q_v$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır, bu ise (4.2) nedeniyle $A \notin {}^vN_s$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\} \subseteq N_s(A)$ ve böylece $N_s(A) = \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\}$ elde edilir.

$s \in S$, $A \in \mathcal{S}$ ve M_s s'nin dereceli kokomşuluk sistemi olsun. $P_s \subseteq A$ ya da $P_s \nsubseteq A$ dir.

1*. durum: $P_s \subseteq A$ ise (4.3)'den $\forall v \in V^b$ için $A \notin {}^vM_s$ ve (4.1)'den $\forall v \in V^b$ için $M_s(A) \subseteq Q_v$ olur. $M_s(A) \neq \emptyset$ olduğu kabul edilirse $\left(M_s(A)\right)^b \neq \emptyset$ ve buradan $t \in \left(M_s(A)\right)^b$ olacak biçimde bir $t \in V^b$ vardır. Böylece $t \in \left(M_s(A)\right)^b$ olduğundan $M_s(A) \nsubseteq Q_t$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $M_s(A) = \emptyset$ dir.

2*. durum: $P_s \nsubseteq A$ olsun ve $M_s(A) \nsubseteq \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\}$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $M_s(A) \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\}$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Hatta $Q_v \neq V$ olduğundan $v \in V^b$ ve (4.1)'den $A \in {}^vM_s$ olur. Buradan, (4.3)'den $P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s$ ve $\mathcal{K}(B) \nsubseteq Q_v$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır. Böylece $\sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ olur ki bu, $P_v \nsubseteq \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\}$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlış, yani $M_s(A) \subseteq \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\}$ olur.

Şimdi de $\sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq M_s(A)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq M_s(A)$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Hatta $Q_v \neq V$ olduğundan $v \in V^b$ dir. $P_v \nsubseteq M_s(A)$ olduğundan $M_s(A) \subseteq Q_v$ ve (4.1)'den $A \notin {}^vM_s$ olur. Ayrıca $\sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ olduğundan $P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s$ ve $\mathcal{K}(B) \nsubseteq Q_v$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır. Bu ise (4.3) nedeniyle $A \notin {}^vM_s$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\} \subseteq M_s(A)$ ve böylece $M_s(A) = \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s,\ B \in \mathcal{S}\}$ elde edilir.

($\Leftarrow$)**:** Her $s \in S^b$, $A \in \mathcal{S}$ için (4.4) eşitliği sağlansın. Bu durumda, her $s \in S^b$, $v \in V^b$ için
"$\exists B \in \mathcal{S} : \mathcal{T}(B) \nsubseteq Q_v$ ve $P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s \Leftrightarrow N_s(A) = \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v \Leftrightarrow A \in {}^vN_s$"
olacağından (4.2) eşitliği sağlanır ve böylece N dereceli komşuluk sistemidir.

Şimdi, her $s \in S$, $A \in \mathcal{S}$ için (4.5) eşitliği sağlansın. Bu durumda, her $s \in S, v \in V^b$

için

"$M_s(A) \nsubseteq Q_v \Leftrightarrow M_s(A) = \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{S}$:
$P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s$ ve $\mathcal{K}(B) \nsubseteq Q_v$"

olacağından (4.3) eşitliği sağlanır ve böylece M dereceli kokomşuluk sistemidir.

Teorem 4.1.3. $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ bir $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopoloji olsun. (N, M), $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayının bir dereceli dikomşuluk sistemi ise, her $A, A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Her $s \in S^b$ için;

(N1) $N_s(A) \neq \emptyset \Longrightarrow A \nsubseteq Q_s$

(N2) $N_s(\emptyset) = \emptyset$ ve $N_s(S) = V$

(N3) $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow \ N_s(A_1) \subseteq N_s(A_2)$

(N4) $A_1 \cap A_2 \nsubseteq Q_s$ ise $N_s(A_1) \wedge N_s(A_2) \subseteq N_s(A_1 \cap A_2)$

(N5) $N_s(A) \subseteq \sup\{\bigwedge_{s' \in B^b} N_{s'}(B) : \ P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\}$

(2) Her $s \in S$ için;

(M1) $M_s(A) \neq \emptyset \Longrightarrow P_s \nsubseteq A$

(M2) $M_s(S) = \emptyset$ ve $M_s(\emptyset) = V$

(M3) $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow \ M_s(A_2) \subseteq M_s(A_1)$

(M4) $M_s(A_1) \wedge M_s(A_2) \subseteq M_s(A_1 \cup A_2)$

(M5) $M_s(A) \subseteq \sup\{\bigwedge_{s' \in (S \setminus B)} M_{s'}(B) : \ P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\}$

Kanıt: (1) (N1) $N_s(A) \neq \emptyset \Longrightarrow \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s\} \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists B \in \mathcal{S} : \ P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s \ ve \ \mathcal{T}(B) \neq \emptyset$

$\Longrightarrow A \nsubseteq Q_s$

(N2) $s \notin \emptyset$ olduğundan $P_s \nsubseteq \emptyset$ ve $N_s(\emptyset) = \emptyset$ dir. Ayrıca $s \in S^b$ olduğundan $P_s \subseteq S \nsubseteq Q_s$ olur. Buradan,

$N_s(S) = \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \subseteq B \subseteq S \nsubseteq Q_s\} \supseteq \mathcal{T}(S) = V$, yani $N_s(S) = V$ bulunur.

(N3) $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$, $A_1 \subseteq A_2$ olsun. $A_1 \subseteq Q_s$ ise $N_s(A_1) = \emptyset \subseteq N_s(A_2)$ olur. $A_1 \nsubseteq Q_s$ ise, $A_2 \nsubseteq Q_s$ olduğundan, "$P_s \subseteq B \subseteq A_1 \nsubseteq Q_s \Longrightarrow P_s \subseteq B \subseteq A_2 \nsubseteq Q_s$" olup $N_s(A_1) \subseteq N_s(A_2)$ dir.

(N4) $A_1 \cap A_2 \nsubseteq Q_s$ olsun.

$$N_s(A_1) \wedge N_s(A_2) = \bigvee_{P_s \subseteq B \subseteq A_1 \nsubseteq Q_s} \mathcal{T}(B) \ \wedge \bigvee_{P_s \subseteq C \subseteq A_2 \nsubseteq Q_s} \mathcal{T}(C) = \bigvee_{\substack{P_s \subseteq B \subseteq A_1 \nsubseteq Q_s \\ P_s \subseteq C \subseteq A_2 \nsubseteq Q_s}} \big(\mathcal{T}(B) \cap \mathcal{T}(C)\big)$$

$$\subseteq \bigvee_{\substack{P_s\subseteq B\subseteq A_1\nsubseteq Q_s\\ P_s\subseteq C\subseteq A_2\nsubseteq Q_s}} \mathcal{T}(B\cap C) \subseteq \bigvee_{P_s\subseteq D\subseteq (A_1\cap A_2)\nsubseteq Q_s} \mathcal{T}(D) \ = N_s(A_1\cap A_2)$$

(N5) $A\subseteq Q_s$ ise, $N_s(A)=\emptyset$ olduğundan özellik sağlanır. $A\nsubseteq Q_s$ olsun. Her $B\in\mathcal{S}$ için, (4.4)'den "$\forall s'\in B^b$ için $\mathcal{T}(B)\subseteq N_{s'}(B)$" olduğundan $N_s(A)=\sup\{\mathcal{T}(B)\mid P_s\subseteq B\subseteq A\nsubseteq Q_s, B\in\mathcal{S}\}\subseteq \sup\{\bigwedge_{s'\in B^b} N_{s'}(B)\mid P_{s'}\subseteq B\subseteq A\nsubseteq Q_{s'}, B\in\mathcal{S}\}$ olur.

(2) (M1) $M_s(A)\neq\emptyset$ olsun. $\sup\{\mathcal{K}(B)\mid P_s\nsubseteq A\subseteq B\subseteq Q_s\}\neq\emptyset$ olacağından $P_s\nsubseteq A\subseteq B\subseteq Q_s$ ve $\mathcal{K}(B)\neq\emptyset$ olacak şekilde bir $B\in\mathcal{S}$ vardır. Buradan $P_s\nsubseteq A$ olur.

(M2) Her $s\in S$ için $P_s\subseteq S$ olduğundan $M_s(S)=\emptyset$; ayrıca $P_s\nsubseteq\emptyset\subseteq Q_s$ olduğundan $M_s(\emptyset)=\sup\{\mathcal{K}(B)\mid P_s\nsubseteq\emptyset\subseteq B\subseteq Q_s\}\supseteq\mathcal{K}(\emptyset)=V$ olup $M_s(\emptyset)=V$ dir.

(M3) $A_1,A_2\in\mathcal{S},\ A_1\subseteq A_2$ olsun. $P_s\subseteq A_2$ ise $M_s(A_2)=\emptyset\subseteq M_s(A_1)$ olur. $P_s\nsubseteq A_2$ ise, $P_s\nsubseteq A_1$ olacağından, "$P_s\nsubseteq A_2\subseteq B\subseteq Q_s\Longrightarrow P_s\nsubseteq A_1\subseteq B\subseteq Q_s$" olup $M_s(A_2)=\sup\{\mathcal{K}(B)\mid P_s\nsubseteq A_2\subseteq B\subseteq Q_s, B\in\mathcal{S}\}\subseteq\sup\{\mathcal{K}(B)\mid P_s\nsubseteq A_1\subseteq B\subseteq Q_s, B\in\mathcal{S}\}=M_s(A_1)$ olur.

(M4)

$$M_s(A_1)\wedge M_s(A_2)=\bigvee_{P_s\nsubseteq A_1\subseteq B\subseteq Q_s}\mathcal{K}(B)\ \wedge \bigvee_{P_s\nsubseteq A_2\subseteq C\subseteq Q_s}\mathcal{K}(C)=\bigvee_{\substack{P_s\nsubseteq A_1\subseteq B\subseteq Q_s\\ P_s\nsubseteq A_2\subseteq C\subseteq Q_s}}\big(\mathcal{K}(B)\cap\mathcal{K}(C)\big)$$

$$\subseteq \bigvee_{\substack{P_s\nsubseteq A_1\subseteq B\subseteq Q_s\\ P_s\nsubseteq A_2\subseteq C\subseteq Q_s}}\mathcal{K}(B\cup C)\subseteq\bigvee_{P_s\nsubseteq (A_1\cup A_2)\subseteq D\subseteq Q_s}\mathcal{K}(D)\ =M_s(A_1\cup A_2)$$

(M5) $P_s\subseteq A$ ise, $M_s(A)=\emptyset$ olduğundan özellik sağlanır. $P_s\nsubseteq A$ olsun. Her $B\in\mathcal{S}$ için, (4.5)'den "$\forall s'\in S\backslash B$ için $\mathcal{K}(B)\subseteq M_{s'}(B)$" olduğundan $M_s(A)=\sup\{\mathcal{K}(B)\mid P_s\nsubseteq A\subseteq B\subseteq Q_s, B\in\mathcal{S}\}\subseteq\sup\{\bigwedge_{s'\in(S\backslash B)}M_{s'}(B)\mid P_s\nsubseteq A\subseteq B\subseteq Q_s, B\in\mathcal{S}\}$ olur.

Sonuç 4.1.4. $(S,\mathcal{S})$ ve $(V,\mathcal{V})$ dokularından en az biri sade ise Teorem 4.1.3.'deki $(N5)$ ve $(M5)$ ifadeleri sırasıyla $N_s(A)=\sup\{\bigwedge_{s'\in B^b}N_{s'}(B) : P_s\subseteq B\subseteq A\nsubseteq Q_s, B\in\mathcal{S}\}$ ve $M_s(A)=\sup\{\bigwedge_{s'\in(S\backslash B)}M_{s'}(B) : P_s\nsubseteq A\subseteq B\subseteq Q_s, B\in\mathcal{S}\}$ biçiminde güçlendirilebilir.

Kanıt: $(V,\mathcal{V})$ bir sade doku olsun. Bir $B\in\mathcal{S}$ için $\bigwedge_{s'\in B^b}N_{s'}(B)\nsubseteq\mathcal{T}(B)$ olduğu varsayılırsa eşitlik (4.4) kullanılarak $\bigwedge_{s'\in B^b}\bigvee_{P_{s'}\subseteq C\subseteq B\nsubseteq Q_{s'}}\mathcal{T}(C)\nsubseteq\mathcal{T}(B)$ olur. Buradan, $\bigwedge_{s'\in B^b}\bigvee_{P_{s'}\subseteq C\subseteq B\nsubseteq Q_{s'}}\mathcal{T}(C)\nsubseteq Q_v$ ve $P_v\nsubseteq\mathcal{T}(B)$ olacak biçimde bir $v\in V^b$ vardır. $(V,\mathcal{V})$ sade olduğundan $\mathcal{V}$ de sup ve birleşim işlemleri aynıdır. Dolayısıyla,

$$\bigwedge_{s'\in B^b}\bigvee_{P_{s'}\subseteq C\subseteq B\nsubseteq Q_{s'}}\mathcal{T}(C)\nsubseteq Q_v\Longrightarrow P_v\subseteq\bigwedge_{s'\in B^b}\bigvee_{P_{s'}\subseteq C\subseteq B\nsubseteq Q_{s'}}\mathcal{T}(C)$$

$$\Longrightarrow\forall s'\in B^b,\ P_v\subseteq\bigvee_{P_{s'}\subseteq C\subseteq B\nsubseteq Q_{s'}}\mathcal{T}(C)=\bigcup_{P_{s'}\subseteq C\subseteq B\nsubseteq Q_{s'}}\mathcal{T}(C)$$

$$\Longrightarrow \forall s' \in B^b,\ \exists C_{s'} \in \mathcal{S}\ :\ P_{s'} \subseteq C_{s'} \subseteq B \not\subseteq Q_{s'}\ ve\ P_v \subseteq \mathcal{T}(C_{s'})$$

ve buradan da $P_v \subseteq \bigcap_{s' \in B^b} \mathcal{T}(C_{s'})$ elde edilir. $B = \bigvee_{s' \in B^b} P_{s'} \subseteq \bigvee_{s' \in B^b} C_{s'} \subseteq B$ olduğundan $B = \bigvee_{s' \in B^b} C_{s'}$ olup (GT3)'den, $\mathcal{T}(B) = \mathcal{T}(\bigvee_{s' \in B^b} C_{s'}) \supseteq \bigcap_{s' \in B^b} \mathcal{T}(C_{s'}) \supseteq P_v$ olur ki, bu $P_v \not\subseteq \mathcal{T}(B)$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır, yani $\forall B \in \mathcal{S}$ için $\bigwedge_{s' \in B^b} N_{s'}(B) \subseteq \mathcal{T}(B)$ dir. Böylece $\sup\{\bigwedge_{s' \in B^b} N_{s'}(B) :\ P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} \subseteq \sup\{\mathcal{T}(B) :\ P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} = N_s(A)$ bulunur. Teorem 4.1.3.'deki (N5) göz önüne alınırsa $N_s(A) = \sup\{\bigwedge_{s' \in B^b} N_{s'}(B) :\ P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\}$ elde edilir.

Şimdi, bir $B \in \mathcal{S}$ için $\bigwedge_{s' \in (S \setminus B)} M_{s'}(B) \not\subseteq \mathcal{K}(B)$ olduğu varsayılırsa eşitlik (4.5) kullanılarak $\bigwedge_{s' \in (S \setminus B)} \bigvee_{P_{s'} \not\subseteq B \subseteq C \subseteq Q_{s'}} \mathcal{K}(C) \not\subseteq \mathcal{K}(B)$ olur. Buradan, $\bigwedge_{s' \in (S \setminus B)} \bigvee_{P_{s'} \not\subseteq B \subseteq C \subseteq Q_{s'}} \mathcal{K}(C) \not\subseteq Q_v$ ve $P_v \not\subseteq \mathcal{K}(B)$ olacak biçimde bir $v \in V^b$ vardır. $(V, \mathcal{V})$ sade olduğundan $\mathcal{V}$ de sup ve birleşim işlemleri aynıdır. Dolayısıyla,

$$\bigwedge_{s' \in (S \setminus B)} \bigvee_{P_{s'} \not\subseteq B \subseteq C \subseteq Q_{s'}} \mathcal{K}(C) \not\subseteq Q_v \Longrightarrow P_v \subseteq \bigwedge_{s' \in (S \setminus B)} \bigvee_{P_{s'} \not\subseteq B \subseteq C \subseteq Q_{s'}} \mathcal{K}(C)$$

$$\Longrightarrow \forall s' \in (S \setminus B),\ P_v \subseteq \bigvee_{P_{s'} \not\subseteq B \subseteq C \subseteq Q_{s'}} \mathcal{K}(C) = \bigcup_{P_{s'} \not\subseteq B \subseteq C \subseteq Q_{s'}} \mathcal{K}(C)$$

$$\Longrightarrow \forall s' \in (S \setminus B),\ \exists C_{s'} \in \mathcal{S}\ :\ P_{s'} \not\subseteq B \subseteq C_{s'} \subseteq Q_{s'}\ ve\ P_v \subseteq \mathcal{K}(C_{s'})$$

ve buradan da $P_v \subseteq \bigcap_{s' \in (S \setminus B)} \mathcal{K}(C_{s'})$ elde edilir. $B = \bigcap_{s' \in (S \setminus B)} Q_{s'} \supseteq \bigcap_{s' \in (S \setminus B)} C_{s'} \supseteq B$ olduğundan $B = \bigcap_{s' \in (S \setminus B)} C_{s'}$ olup (GCT3)'den, $\mathcal{K}(B) = \mathcal{K}\left(\bigcap_{s' \in (S \setminus B)} C_{s'}\right) \supseteq \bigcap_{s' \in (S \setminus B)} \mathcal{K}(C_{s'}) \supseteq P_v$ olur ki, bu $P_v \not\subseteq \mathcal{K}(B)$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır, yani $\forall B \in \mathcal{S}$ için $\bigwedge_{s' \in (S \setminus B)} M_{s'}(B) \subseteq \mathcal{K}(B)$ dir. Böylece $\sup\{\bigwedge_{s' \in (S \setminus B)} M_{s'}(B) :\ P_s \not\subseteq A \subseteq B \subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} \subseteq \sup\{\mathcal{K}(B) :\ P_s \not\subseteq A \subseteq B \subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} = M_s(A)$ bulunur. Teorem 4.1.3.'deki (M5) göz önüne alınırsa $M_s(A) = \sup\{\bigwedge_{s' \in (S \setminus B)} M_{s'}(B) :\ P_s \not\subseteq A \subseteq B \subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\}$ elde edilir.

Şimdi de $(S, \mathcal{S})$ nin bir sade doku ve $\sup\{\bigwedge_{s' \in B^b} N_{s'}(B) :\ P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} \not\subseteq N_s(A)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\sup\{\bigwedge_{s' \in B^b} N_{s'}(B) :\ P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} \not\subseteq Q_v$ ve $P_v \not\subseteq N_s(A)$ olacak biçimde bir $v \in V^b$ vardır. $\sup\{\bigwedge_{s' \in B^b} N_{s'}(B) :\ P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} \not\subseteq Q_v$ olduğundan,

$$\exists B \in \mathcal{S} :\ P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s\ ve\ "\ \forall s' \in B^b, N_{s'}(B) \not\subseteq Q_v"$$

sağlanır. $(S, \mathcal{S})$ sade olduğundan, $P_s \not\subseteq Q_s$ yani $B \not\subseteq Q_s$ veya $s \in B^b$ olup $N_s(B) \not\subseteq Q_v$ bulunur ki, bu $P_v \not\subseteq N_s(A)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla varsayım yanlış, yani $\sup\{\bigwedge_{s' \in B^b} N_{s'}(B) :\ P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} \subseteq N_s(A)$ dır. Teorem 4.1.3.'deki (N5) göz önüne alınırsa $\sup\{\bigwedge_{s' \in B^b} N_{s'}(B) :\ P_s \subseteq B \subseteq A \not\subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} = N_s(A)$ elde edilir.

Yine $(S, \mathcal{S})$ nin bir sade doku ve $\sup\{\bigwedge_{s' \in (S \setminus B)} M_{s'}(B) :\ P_s \not\subseteq A \subseteq B \subseteq Q_s, B \in$

$\mathcal{S}\} \nsubseteq M_s(A)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\sup\{\bigwedge_{s'\in(S\setminus B)} M_{s'}(B) : P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq M_s(A)$ olacak biçimde bir $v \in V^b$ vardır. $\sup\{\bigwedge_{s'\in(S\setminus B)} M_{s'}(B) : P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ olduğundan,

$$\exists B \in \mathcal{S} : P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s \; ve \; \text{"} \forall s' \in (S\setminus B), M_{s'}(B) \nsubseteq Q_v \text{"}$$

sağlanır. $(S,\mathcal{S})$ sade olduğundan, $P_s \nsubseteq Q_s$ yani $P_s \nsubseteq B$ veya $s \in S\setminus B$ olup $M_s(B) \nsubseteq Q_v$ bulunur ki, bu $P_v \nsubseteq M_s(A)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla varsayım yanlış, yani $\sup\{\bigwedge_{s'\in(S\setminus B)} M_{s'}(B) : P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} \subseteq M_s(A)$ dır. Teorem 4.1.3.'deki (M5) göz önüne alınırsa $\sup\{\bigwedge_{s'\in(S\setminus B)} M_{s'}(B) : P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s, B \in \mathcal{S}\} = M_s(A)$ elde edilir.

Önerme 4.1.5. $(S,\mathcal{S})$, $(V,\mathcal{V})$ doku uzayları, $N: S^b \longrightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$, $M: S \longrightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ sırasıyla Teorem 4.1.3.'deki özellikleri sağlayan fonksiyonlar olsun. $\mathcal{T}_N, \mathcal{K}_M : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ fonksiyonları her $A \in \mathcal{S}$ için

$$\mathcal{T}_N(A) = \bigcap_{s\in A^b} N_s(A)$$

$$\mathcal{K}_M(A) = \bigcap_{s\in S\setminus A} M_s(A)$$

biçiminde tanımlanırsa; $(\mathcal{T}_N, \mathcal{K}_M)$, $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir $(V,\mathcal{V})$-dereceli ditopolojidir. Ayrıca, $(N^{\mathcal{T}_N}, M^{\mathcal{K}_M})$, $(S,\mathcal{S},\mathcal{T}_N,\mathcal{K}_M,V,\mathcal{V})$ için bir dereceli dikomşuluk sistemi ise $(N,M) \subseteq (N^{\mathcal{T}_N}, M^{\mathcal{K}_M})$ (yani her $A \in \mathcal{S}, s \in S^b$ için $N_s(A) \subseteq {N^{\mathcal{T}_N}}_s(A)$ ve her $A \in \mathcal{S}, s \in S$ için $M_s(A) \subseteq {M^{\mathcal{K}_M}}_s(A)$) olur.

Kanıt:

(GT1) $\mathcal{T}_N(\emptyset) = \bigcap_{s\in\emptyset} N_s(\emptyset) = V$ ve $\mathcal{T}_N(S) = \bigcap_{s\in S^b} N_s(S) = \bigcap_{s\in S^b} V = V$

(GT2) $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ olsun. $(A_1 \cap A_2)^b = \emptyset$ ise $\tau_N(A_1 \cap A_2) = V$ olur ve (GT2) sağlanır. O halde $(A_1 \cap A_2)^b \neq \emptyset$ olsun. $s \in (A_1 \cap A_2)^b$ ise $A_1 \cap A_2 \nsubseteq Q_s$ olup (N4)'den $N_s(A_1) \wedge N_s(A_2) \subseteq N_s(A_1 \cap A_2)$ olduğundan ve $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1 \Longrightarrow (A_1 \cap A_2)^b \subseteq {A_1}^b$, $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2 \Longrightarrow (A_1 \cap A_2)^b \subseteq {A_2}^b$ olduğundan,

$$\mathcal{T}_N(A_1 \cap A_2) = \bigcap_{s\in(A_1\cap A_2)^b} N_s(A_1 \cap A_2) \supseteq \bigcap_{s\in(A_1\cap A_2)^b} \left(N_s(A_1) \wedge N_s(A_2)\right)$$

$$= \left(\bigcap_{s\in(A_1\cap A_2)^b} N_s(A_1)\right) \cap \left(\bigcap_{s\in(A_1\cap A_2)^b} N_s(A_2)\right)$$

$$\supseteq \bigcap_{s\in {A_1}^b} N_s(A_1) \cap \bigcap_{s\in {A_2}^b} N_s(A_2) = \mathcal{T}_N(A_1) \cap \mathcal{T}_N(A_2)$$

olur.

(GT3) J boş olmayan bir indeks kümesi olmak üzere, her $j \in J$ için $A_j \in \mathcal{S}$ olsun. $\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right)^b = \emptyset$ ise $\mathcal{T}_N\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right) = V$ olur ve (GT3) sağlanır. O halde $\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right)^b \neq \emptyset$ olsun. Teorem 2.3.10. (3)'ten $\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right)^b = \bigcup_{j\in J} A_j^b$ dir. Ayrıca her $j \in J$ için $A_j \subseteq \bigvee_{j\in J} A_j$ olduğundan (N3)' den, her $j \in J$ için $N_s(A_j) \subseteq N_s\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right)$ olur. Dolayısıyla,

$$\mathcal{T}_N\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right) = \bigcap_{s\in\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right)^b} N_s\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right) = \bigcap_{s\in\bigcup_{j\in J} A_j^b} N_s\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right) = \bigcap_{j\in J}\bigcap_{s\in A_j^b} N_s\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right)$$

$$\supseteq \bigcap_{j\in J}\bigcap_{s\in A_j^b} N_s(A_j) = \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_N(A_j)$$

olur.

(GCT1) $\mathcal{K}_M(\emptyset) = \bigcap_{s\in(S\setminus\emptyset)} M_s(\emptyset) = \bigcap_{s\in S} V = V$

$\mathcal{K}_M(S) = \bigcap_{s\in(S\setminus S)} M_s(S) = \bigcap_{s\in\emptyset} M_s(S) = V$

(GCT2) $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ olsun. $S\setminus(A_1 \cup A_2) = \emptyset$ ise $\mathcal{K}_M(A_1 \cup A_2) = V$ olur ve (GCT2) sağlanır. O halde $S\setminus(A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$ olsun. $s \in S\setminus(A_1 \cup A_2)$ ise (M4)'den $M_s(A_1) \wedge M_s(A_2) \subseteq M_s(A_1 \cup A_2)$ olduğundan ve $S\setminus(A_1 \cup A_2) \subseteq S\setminus A_1$, $S\setminus(A_1 \cup A_2) \subseteq S\setminus A_2$ olduğundan,

$$\mathcal{K}_M(A_1 \cup A_2) = \bigcap_{s\in S\setminus(A_1\cup A_2)} M_s(A_1 \cup A_2) \supseteq \bigcap_{s\in S\setminus(A_1\cup A_2)} \left(M_s(A_1) \wedge M_s(A_2)\right)$$

$$= \left(\bigcap_{s\in S\setminus(A_1\cup A_2)} M_s(A_1)\right) \cap \left(\bigcap_{s\in S\setminus(A_1\cup A_2)} M_s(A_2)\right)$$

$$\supseteq \bigcap_{s\in S\setminus A_1} M_s(A_1) \cap \bigcap_{s\in S\setminus A_2} M_s(A_2) = \mathcal{K}_M(A_1) \cap \mathcal{K}_M(A_2)$$

olur.

(GCT3) J boş olmayan bir indeks kümesi olmak üzere, her $j \in J$ için $A_j \in \mathcal{S}$ olsun. $S\setminus \bigcap_{j\in J} A_j = \emptyset$ ise $\mathcal{K}_M\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = V$ olur ve (GCT3) sağlanır. O halde $S\setminus \bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$ olsun. $s \in S\setminus \bigcap_{j\in J} A_j$ ise $P_s \nsubseteq \bigcap_{j\in J} A_j$, ayrıca her $i \in J$ için $\bigcap_{j\in J} A_j \subseteq A_i$ olduğundan (M3)' den, her $i \in J$ için $M_s(A_i) \subseteq M_s\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)$ dir. Dolayısıyla,

$$\mathcal{K}_M\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \bigcap_{s\in S\setminus \bigcap_{j\in J} A_j} M_s\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \bigcap_{i\in J}\bigcap_{s\in S\setminus A_i} M_s\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)$$

$$= \bigcap_{i\in J}\left(\bigcap_{s\in S\setminus A_i} M_s\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)\right) \supseteq \bigcap_{i\in J}\left(\bigcap_{s\in S\setminus A_i} M_s(A_i)\right) = \bigcap_{j\in J}\mathcal{K}_M(A_j)$$

olur.

Şimdi, $(N^{\mathcal{T}_N}, M^{\mathcal{K}_M})$, $(S,\mathcal{S},\mathcal{T}_N,\mathcal{K}_M,V,\mathcal{V})$ için bir dereceli dikomşuluk sistemi, $A\in\mathcal{S}$ olsun. $s\in S^b$ için; $A\subseteq Q_s$ ise $N_s(A)=N^{\mathcal{T}_N}{}_s(A)=\emptyset$ ve $A\nsubseteq Q_s$ ise (N5) den $N_s(A)\subseteq \sup\{\bigwedge_{s'\in B^b} N_{s'}(B) : P_s\subseteq B\subseteq A\nsubseteq Q_s, B\in\mathcal{S}\} = \sup\{\mathcal{T}_N(B) : P_s\subseteq B\subseteq A\nsubseteq Q_s, B\in \mathcal{S}\} = N^{\mathcal{T}_N}{}_s(A)$ elde edilir. $s\in S$ için; $P_s\subseteq A$ ise $M_s(A)=M^{\mathcal{K}_M}{}_s(A)=\emptyset$ ve $P_s\nsubseteq A$ ise (M5) den $M_s(A)\subseteq \sup\{\bigwedge_{s'\in(S\setminus B)} M_{s'}(B) : P_s\nsubseteq A\subseteq B\subseteq Q_s, B\in\mathcal{S}\} = \sup\{\mathcal{K}_M(B) : P_s\nsubseteq A\subseteq B\subseteq Q_s, B\in\mathcal{S}\} = M^{\mathcal{K}_M}{}_s(A)$ elde edilir.

Sonuç 4.1.6. (N,M) bir $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayı için bir dereceli dikomşuluk sistemi ise $(\mathcal{T},\mathcal{K})=(\mathcal{T}_N,\mathcal{K}_M)$ dir.

Kanıt: (N,M) bir $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayı için bir dereceli dikomşuluk sistemi ve $A\in\mathcal{S}$ olsun.

$\mathcal{T}_N(A)\nsubseteq\mathcal{T}(A)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $\mathcal{T}_N(A)\nsubseteq Q_v$ ve $P_v\nsubseteq\mathcal{T}(A)$ olacak şekilde bir $v\in V$ vardır.

$$\mathcal{T}_N(A)\nsubseteq Q_v \Longrightarrow \bigcap_{s\in A^b} N_s(A)\nsubseteq Q_v \Longrightarrow \forall s\in A^b\ için\ N_s(A)\nsubseteq Q_v$$

$$\Longrightarrow \forall s\in A^b\ için\ \sup\{\mathcal{T}(B)\mid P_s\subseteq B\subseteq A\nsubseteq Q_s\}\nsubseteq Q_v$$

$$\Longrightarrow \forall s\in A^b\ için\ \exists B_s\in\mathcal{S}\ ;\ P_s\subseteq B_s\subseteq A\nsubseteq Q_s\ ve\ \mathcal{T}(B_s)\nsubseteq Q_v$$

$$\Longrightarrow \forall s\in A^b\ için\ \exists B_s\in\mathcal{S}\ ;\ P_s\subseteq B_s\subseteq A\nsubseteq Q_s\ ve\ \mathcal{T}(B_s)\supseteq P_v$$

Böylece,

$$A=\bigvee_{s\in A^b} P_s\subseteq\bigvee_{s\in A^b} B_s\subseteq A \ \Longrightarrow\ A=\bigvee_{s\in A^b} B_s$$

sağlanır ve (GT3) kullanılarak $\mathcal{T}(A)=\mathcal{T}(\bigvee_{s\in A^b} B_s)\supseteq\bigcap_{s\in A^b}\mathcal{T}(B_s)\supseteq P_v$ çelişkisi elde edilir. O halde $\mathcal{T}_N(A)\subseteq\mathcal{T}(A)$ dir. Ayrıca, her $s\in A^b$ için $P_s\subseteq A\subseteq A\nsubseteq Q_s$ olduğundan $\mathcal{T}(A)\subseteq\sup\{\mathcal{T}(B)\mid P_s\subseteq B\subseteq A\nsubseteq Q_s\}=N_s(A)$ dır. Buradan, $\mathcal{T}_N(A)=\bigcap_{s\in A^b} N_s(A)\supseteq\mathcal{T}(A)$ bulunur. Dolayısıyla $\mathcal{T}_N=\mathcal{T}$ elde edilir.

$\mathcal{K}_M(A)\nsubseteq\mathcal{K}(A)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $\mathcal{K}_M(A)\nsubseteq Q_v$ ve $P_v\nsubseteq\mathcal{K}(A)$ olacak şekilde bir $v\in V$ vardır.

$$\mathcal{K}_M(A) \nsubseteq Q_v \Rightarrow \bigcap_{s\in S\setminus A} M_s(A) \nsubseteq Q_v \Rightarrow \forall s \in S\setminus A \;\; için \; M_s(A) \nsubseteq Q_v$$

$$\Rightarrow \forall s \in S\setminus A \;\; için \; \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s\} \nsubseteq Q_v$$

$$\Rightarrow \forall s \in S\setminus A \; için \; \exists B_s \in \mathcal{S} \; ; \; P_s \nsubseteq A \subseteq B_s \subseteq Q_s \; ve \; \mathcal{K}(B_s) \nsubseteq Q_v$$

$$\Rightarrow \forall s \in S\setminus A \; için \; \exists B_s \in \mathcal{S} \; ; \; P_s \nsubseteq A \subseteq B_s \subseteq Q_s \; ve \; \mathcal{K}(B_s) \supseteq P_v$$

Böylece,

$$A = \bigcap_{P_s\nsubseteq A} Q_s = \bigcap_{s\in S\setminus A} Q_s \supseteq \bigcap_{s\in S\setminus A} B_s \supseteq A \;\; \Rightarrow \;\; A = \bigcap_{s\in S\setminus A} B_s$$

sağlanır ve (GCT3) kullanılarak $\mathcal{K}(A) = \mathcal{K}\left(\bigcap_{s\in S\setminus A} B_s\right) \supseteq \bigcap_{s\in S\setminus A} \mathcal{K}(B_s) \supseteq P_v$ çelişkisi elde edilir. O halde $\mathcal{K}_M(A) \subseteq \mathcal{K}(A)$ dir. Ayrıca, her $s \in S\setminus A$ için $P_s \nsubseteq A \subseteq A \subseteq Q_s$ olduğundan $\mathcal{K}(A) \subseteq \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s\} = M_s(A)$ dır. Buradan, $\mathcal{K}_M(A) = \bigcap_{s\in S\setminus A} M_s(A) \supseteq \mathcal{K}(A)$ bulunur. Dolayısıyla $\mathcal{K}_M = \mathcal{K}$ ve böylece $(\mathcal{T},\mathcal{K}) = (\mathcal{T}_N,\mathcal{K}_M)$ elde edilir.

Sonuç 4.1.7. $(S,\mathcal{S})$ ve $(V,\mathcal{V})$ dokularından en az biri sade ise $(S,\mathcal{S},\mathcal{T}_N,\mathcal{K}_M,V,\mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayı için $(N,M) = (N^{\mathcal{T}_N}, M^{\mathcal{K}_M})$ dir. Yani (N,M), $(S,\mathcal{S},\mathcal{T}_N,\mathcal{K}_M,V,\mathcal{V})$ için dereceli dikomşuluk sistemidir.

Kanıt: Sonuç 4.1.4.'den görülür.

Önerme 4.1.8. $(S,\mathcal{S},\sigma)$ bir tümleyenli çakılı doku uzayı ve $(\mathcal{T},\mathcal{K})$, $(S,\mathcal{S},\sigma)$ üzerinde bir $(V,\mathcal{V})$- dereceli ditopoloji olsun. (N,M), $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayının bir dereceli dikomşuluk sistemi ise, her $A \in \mathcal{S}$ için

$$N_s^*(A) = M_{\sigma(s)}\big(\sigma(A)\big), \;\; s \in S^b$$

$$M_s^*(A) = N_{\sigma(s)}\big(\sigma(A)\big), \;\; s \in S$$

biçiminde tanımlanan $N^*: S^b \longrightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$, $M^*: S \longrightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ fonksiyonları, $(S,\mathcal{S},\mathcal{K}\circ\sigma,\mathcal{T}\circ\sigma,V,\mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayı için bir (N^*,M^*) dereceli dikomşuluk sistemi oluşturur. Ayrıca, $(\mathcal{T},\mathcal{K})$ tümleyensel ise $(N,M) = (N^*,M^*)$ olur.

Kanıt: $s \in S^b$, $v \in V^b$, $A \in \mathcal{S}$ olsun. Tanım 4.1.1.'den ve eşitlik (4.1)'den;

$$A \in {}^vN_s^* \Leftrightarrow N_s^*(A) \nsubseteq Q_v \Leftrightarrow M_{\sigma(s)}\big(\sigma(A)\big) \nsubseteq Q_v \Leftrightarrow \sigma(A) \in {}^vM_{\sigma(s)}$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{S} : \; P_{\sigma(s)} \nsubseteq \sigma(A) \subseteq B \subseteq Q_{\sigma(s)}, \mathcal{K}(B) \nsubseteq Q_v$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{S} : \; P_s \subseteq \sigma(B) \subseteq A \nsubseteq Q_s, \mathcal{K}(B) \nsubseteq Q_v$$

$$\Leftrightarrow \exists B'\big(= \sigma(B)\big) \in \mathcal{S} : \; P_s \subseteq B' \subseteq A \nsubseteq Q_s, \mathcal{K}\big(\sigma(B')\big) \nsubseteq Q_v$$

olur. Böylece ${}^vN_s^* = \{A \in \mathcal{S} \mid \exists B \in \mathcal{S} : \; (\mathcal{K}\circ\sigma)(B) \nsubseteq Q_v \; ve \; P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s\}$ bulunur, yani N^*, $(S,\mathcal{S},\mathcal{K}\circ\sigma,\mathcal{T}\circ\sigma,V,\mathcal{V})$ için bir dereceli komşuluk sistemidir.

Şimdi, $s \in S$, $v \in V^b$, $A \in \mathcal{S}$ olsun. Tanım 4.1.1.'den ve eşitlik (4.1)'den;

$$A \in {}^{v}M_s^* \Leftrightarrow M_s^*(A) \nsubseteq Q_v \Leftrightarrow N_{\sigma(s)}\big(\sigma(A)\big) \nsubseteq Q_v \Leftrightarrow \sigma(A) \in {}^{v}N_{\sigma(s)}$$
$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{S} :\ P_{\sigma(s)} \subseteq B \subseteq \sigma(A) \nsubseteq Q_{\sigma(s)}, \mathcal{T}(B) \nsubseteq Q_v$$
$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{S} :\ P_s \nsubseteq A \subseteq \sigma(B) \subseteq Q_s, \mathcal{T}(B) \nsubseteq Q_v$$
$$\Leftrightarrow \exists B'(= \sigma(B)) \in \mathcal{S} :\ P_s \nsubseteq A \subseteq B' \subseteq Q_s, \mathcal{T}\big(\sigma(B')\big) \nsubseteq Q_v$$

olur. Böylece ${}^{v}M_s^* = \{A \in \mathcal{S} \mid \exists B \in \mathcal{S} :\ (\mathcal{T} \circ \sigma)(B) \nsubseteq Q_v\ ve\ P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s\}$ bulunur, yani M^*, $(S, \mathcal{S}, \mathcal{K} \circ \sigma, \mathcal{T} \circ \sigma, V, \mathcal{V})$ için bir dereceli kokomşuluk sistemidir. Dolayısıyla, (N^*, M^*) $(S, \mathcal{S}, \mathcal{K} \circ \sigma, \mathcal{T} \circ \sigma, V, \mathcal{V})$ için bir dereceli dikomşuluk sistemidir.

$(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ tümleyensel, $s \in S^b$, $A \in \mathcal{S}$ olsun. $A \subseteq Q_s$ ise $N_s(A) = \emptyset$ ve $P_{\sigma(s)} \subseteq \sigma(A)$ olup $N_s^*(A) = M_{\sigma(s)}\big(\sigma(A)\big) = \emptyset$ yani $N_s = N_s^*$ dir. $A \nsubseteq Q_s$ ise $P_{\sigma(s)} \nsubseteq \sigma(A)$ dır ve Önerme 4.1.2.'den,

$$N_s^*(A) = M_{\sigma(s)}\big(\sigma(A)\big) = \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_{\sigma(s)} \nsubseteq \sigma(A) \subseteq B \subseteq Q_{\sigma(s)}, B \in \mathcal{S}\}$$
$$= \sup\big\{\mathcal{K}\big(\sigma(B')\big) \,\big|\, P_{\sigma(s)} \nsubseteq \sigma(A) \subseteq \sigma(B') \subseteq Q_{\sigma(s)}, B' \in \mathcal{S}\big\}$$
$$= \sup\{\mathcal{T}(B') \mid P_s \subseteq B' \subseteq A \nsubseteq Q_s, B' \in \mathcal{S}\} = N_s(A)$$

elde edilir. Yani, $N^* = N$ dir.

$(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ tümleyensel, $s \in S$, $A \in \mathcal{S}$ olsun. $P_s \subseteq A$ ise $M_s(A) = \emptyset$ ve $\sigma(A) \subseteq Q_{\sigma(s)}$ olup $M_s^*(A) = N_{\sigma(s)}\big(\sigma(A)\big) = \emptyset$ yani $M_s = M_s^*$ dir. $P_s \nsubseteq A$ ise $\sigma(A) \nsubseteq Q_{\sigma(s)}$ dır ve Önerme 4.1.2.'den,

$$M_s^*(A) = N_{\sigma(s)}\big(\sigma(A)\big) = \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_{\sigma(s)} \subseteq B \subseteq \sigma(A) \nsubseteq Q_{\sigma(s)}, B \in \mathcal{S}\}$$
$$= \sup\big\{\mathcal{T}\big(\sigma(B')\big) \,\big|\, P_{\sigma(s)} \subseteq \sigma(B') \subseteq \sigma(A) \nsubseteq Q_{\sigma(s)}, B' \in \mathcal{S}\big\}$$
$$= \sup\{\mathcal{K}(B') \mid P_s \nsubseteq A \subseteq B' \subseteq Q_s, B' \in \mathcal{S}\} = M_s(A)$$

elde edilir. Yani, $M^* = M$ dir.

Örnek 4.1.9.

(1) (η, μ), bir $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı için bir dikomşuluk sistemi olsun. Bu durumda, her $A \in \mathcal{S}$ için,

$$N_s(A) = \begin{cases} 1, & A \in \eta(s) \\ \emptyset, & A \notin \eta(s) \end{cases}$$

ve

$$M_s(A) = \begin{cases} 1, & A \in \mu(s) \\ \emptyset, & A \notin \mu(s) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $N : S^b \longrightarrow \mathcal{P}(1)^{\mathcal{S}}$, $M : S \longrightarrow \mathcal{P}(1)^{\mathcal{S}}$ fonksiyonları, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayına karşılık gelen $\big(S, \mathcal{S}, \tau^g, \kappa^g, 1, \mathcal{P}(1)\big)$ dereceli ditopolojik doku uzayı için bir (N, M) dereceli dikomşuluk sistemi oluştururlar.

Diğer taraftan, (N, M), bir $\big(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, 1, \mathcal{P}(1)\big)$ dereceli ditopolojik doku uzayı için bir dereceli dikomşuluk sistemi ise bu durumda,

$$\eta(s) = \{A \in \mathcal{S} \mid N_s(A) = 1\}, \mu(s) = \{A \in \mathcal{S} \mid M_s(A) = 1\}$$

biçiminde tanımlı $\eta(s), s \in S^b$ ve $\mu(s), s \in S$ aileleri, $\big(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, 1, \mathcal{P}(1)\big)$ dereceli ditopolojik doku uzayına karşılık gelen $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}^0, \mathcal{K}^0)$ ditopolojik doku uzayı için bir dikomşuluk sistemidir.

(2) (N, M), bir $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayı için bir dereceli dikomşuluk sistemi ve her $v \in V$ için (η^v, μ^v), $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}^v, \mathcal{K}^v)$ için dikomşuluk sistemi olsun. Bu durumda,

$$s \in S^b, \eta_N^v(s) = \{A \in \mathcal{S} \mid P_v \subseteq N_s(A)\}$$
$$s \in S, \mu_M^v(s) = \{A \in \mathcal{S} \mid P_v \subseteq M_s(A)\}$$

biçiminde tanımlanırsa her $v \in V$ için $(\eta^v, \mu^v) \subseteq (\eta_N^v, \mu_M^v)$ sağlanır. Ayrıca, $(V, \mathcal{V})$ dokusu sade ise her $v \in V$ için $(\eta^v, \mu^v) = (\eta_N^v, \mu_M^v)$ olur.

Dereceli Q-dikomşuluk sistemleri, tümleyensel doku uzayları üzerindeki dereceli ditopolojilerin tam bir karakterizasyonunu vermektedir ancak bu yapı ditopolojik doku uzaylarında tanımlanan dikomşuluk sistemlerinin bir genelleştirmesi değildir. Diğer taraftan, dereceli dikomşuluk sistemleri, ditopolojik doku uzaylarında tanımlanan dikomşuluk sistemlerinin bir genelleştirmesidir ve sade doku uzayları üzerindeki dereceli ditopolojileri karakterize eder. Şimdi, dereceli dikomşuluk sistemleri ve dereceli ditopolojik doku uzayları arasındaki ilişki kategorik olarak incelenecektir. Kategori Teori için Adamek ve ark. (1990) temel alınmıştır.

Tanım 4.1.10. $(S, \mathcal{S})$ ve $(V, \mathcal{V})$ birer doku olmak üzere, Teorem 4.1.3.'deki (N1) – (N5) ve (M1) - (M5) özelliklerini sağlayan bir $N : S^b \longrightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$, $M : S \longrightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ dönüşüm çiftine, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-*dereceli dikomşuluk fonksiyonu* denir ve böylece de, $(S, \mathcal{S}, N, M, V, \mathcal{V})$ 'ye dereceli dikomşuluk doku uzayıdır diyeceğiz.

Tanım 4.1.11. $(S_k, \mathcal{S}_k, N_k, M_k, V_k, \mathcal{V}_k)$, $k = 1,2$ dereceli dikomşuluk doku uzayları, $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$, $(h, H) : (V_1, \mathcal{V}_1) \longrightarrow (V_2, \mathcal{V}_2)$ difonksiyonlar olsun. Eğer her $A \in \mathcal{S}_2$ için

$$H^{\leftarrow}\left(\bigcap_{s \in A^b} N_{2s}(A)\right) \subseteq \bigcap_{s \in (F^{\leftarrow}A)^b} N_{1s}(F^{\leftarrow}A)$$

oluyorsa (f, F) ye (h, H) ye göre *yerel-süreklidir* denir ve her $A \in \mathcal{S}_2$ için

$$h^{\leftarrow}\left(\bigcap_{s\in S_2\setminus A} M_{2s}(A)\right) \subseteq \bigcap_{s\in (S_1\setminus f^{\leftarrow}A)} M_{1s}(f^{\leftarrow}A)$$

oluyorsa (f,F) ye (h,H) ye göre *yerel-kosüreklidir* denir. (f,F), (h,H) ye göre hem yerel-sürekli hem de yerel-kosürekli ise (f,F) ye (h,H) ye göre *yerel-ikili süreklidir* denir.

Örnek 4.1.12. $(S,\mathcal{S},N,M,V,\mathcal{V})$ bir dereceli dikomşuluk doku uzayı, $(i_S,I_S),(i_V,I_V)$ birim difonksiyonlar olmak üzere; her $A\in\mathcal{S}$ için, $I_V{}^{\leftarrow}(\bigcap_{s\in A^b} N_s(A)) = \bigcap_{s\in A^b} N_s(A) = \bigcap_{s\in (I_S{}^{\leftarrow}A)^b} N_s(I_S{}^{\leftarrow}A)$ ve $i_V{}^{\leftarrow}\left(\bigcap_{s\in S\setminus A} M_s(A)\right) = \bigcap_{s\in S\setminus A} M_s(A) = \bigcap_{s\in (S\setminus i_S{}^{\leftarrow}A)} M_s(i_S{}^{\leftarrow}A)$ olur. Dolayısıyla (i_S,I_S), (i_V,I_V) ye göre yerel-ikili süreklidir.

Önerme 4.1.13. Göreli yerel-ikili süreklilik difonksiyonların bileşke işlemi altında korunur.

Kanıt: $(S_k,\mathcal{S}_k,N_k,M_k,V_k,\mathcal{V}_k)$, $k=1,2,3$ dereceli dikomşuluk doku uzayları, $(f,F) : (S_1,\mathcal{S}_1) \longrightarrow (S_2,\mathcal{S}_2)$, $(h,H) : (V_1,\mathcal{V}_1) \longrightarrow (V_2,\mathcal{V}_2)$, $(g,G) : (S_2,\mathcal{S}_2) \longrightarrow (S_3,\mathcal{S}_3)$, $(k,K) : (V_2,\mathcal{V}_2) \longrightarrow (V_3,\mathcal{V}_3)$ difonksiyonlar olmak üzere; (f,F), (h,H) ye göre ve (g,G), (k,K) ye göre yerel-ikili sürekli olsun. Her $A\in\mathcal{S}_3$ için,

$$(K\circ H)^{\leftarrow}\left(\bigcap_{s\in A^b} N_{3s}(A)\right) = H^{\leftarrow}\left(K^{\leftarrow}\left(\bigcap_{s\in A^b} N_{3s}(A)\right)\right) \subseteq H^{\leftarrow}\left(\bigcap_{s\in (G^{\leftarrow}A)^b} N_{2s}(G^{\leftarrow}A)\right)$$
$$\subseteq \bigcap_{s\in (F^{\leftarrow}(G^{\leftarrow}A))^b} N_{1s}\left(F^{\leftarrow}(G^{\leftarrow}A)\right) = \bigcap_{s\in ((G\circ F)^{\leftarrow}A)^b} N_{1s}((G\circ F)^{\leftarrow}A)$$

ve

$$(k\circ h)^{\leftarrow}\left(\bigcap_{s\in S_3\setminus A} M_{3s}(A)\right) = h^{\leftarrow}\left(k^{\leftarrow}\left(\bigcap_{s\in S_3\setminus A} M_{3s}(A)\right)\right) \subseteq h^{\leftarrow}\left(\bigcap_{s\in (S_2\setminus g^{\leftarrow}A)} M_{2s}(g^{\leftarrow}A)\right)$$
$$\subseteq \bigcap_{s\in \left(S_1\setminus f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}A)\right)} M_{1s}\left(f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}A)\right) = \bigcap_{s\in (S_1\setminus (g\circ f)^{\leftarrow}A)} M_{1s}((g\circ f)^{\leftarrow}A)$$

olduğundan, $(g\circ f, G\circ F)$, $(k\circ h, K\circ H)$ ye göre yerel-ikili süreklidir.

Böylece, dereceli dikomşuluk doku uzayları ve aralarındaki göreli yerel-ikili sürekli difonksiyon çiftleri bir kategori oluşturur. Bu kategori **dfGDinhd** ile gösterilecektir. Önerme 4.1.5.'den, her $(S,\mathcal{S},N,M,V,\mathcal{V})\in Ob$**dfGDinhd** için bir dereceli ditopolojik doku uzayı $(S,\mathcal{S},\mathcal{T}_N,\mathcal{K}_M,V,\mathcal{V})\in Ob$**dfGDitop** vardır.

Sonuç 4.1.14. Yukarıdaki gösterimlere bağlı kalarak; eğer (f,F), (h,H) ye göre

$\big((N_1,M_1)-(N_2,M_2)\big)$ yerel-ikili sürekli ise, (h,H) ye göre $\Big(\big(\mathcal{T}_{N_1},\mathcal{K}_{M_1}\big)-\big(\mathcal{T}_{N_2},\mathcal{K}_{M_2}\big)\Big)$ ikili süreklidir. Dolayısıyla, $\mathfrak{F}:\ \mathbf{dfGDinhd}\longrightarrow\mathbf{dfGDitop}$,

$$\mathfrak{F}\Big(\big((f,F),(h,H)\big):\ (S_1,\mathcal{S}_1,N_1,M_1,V_1,\mathcal{V}_1)\longrightarrow(S_2,\mathcal{S}_2,N_2,M_2,V_2,\mathcal{V}_2)\Big)$$
$$=\big((f,F),(h,H)\big):\ \big(S_1,\mathcal{S}_1,\mathcal{T}_{N_1},\mathcal{K}_{M_1},V_1,\mathcal{V}_1\big)\longrightarrow\big(S_2,\mathcal{S}_2,\mathcal{T}_{N_2},\mathcal{K}_{M_2},V_2,\mathcal{V}_2\big)$$

biçiminde tanımlanan $\mathfrak{F}$ funktoru sadık ve doludur.

Kanıt: Önerme 4.1.5.'den $\mathfrak{F}$ iyi tanımlıdır. Ayrıca, $\mathfrak{F}$ bileşke işlemini ve birim difonksiyonu koruduğundan bir funktordur ve tanımı gereği sadık ve doludur.

Önerme 4.1.2.'den, her $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})\in Ob\mathbf{dfGDitop}$ için bir dereceli dikomşuluk doku uzayı $(S,\mathcal{S},N^{\mathcal{T}},M^{\mathcal{K}},V,\mathcal{V})\in Ob\mathbf{dfGDinhd}$ vardır ve Sonuç 4.1.6.'dan $(\mathcal{T},\mathcal{K})=\big(\mathcal{T}_{N^{\mathcal{T}}},\mathcal{K}_{M^{\mathcal{K}}}\big)$ olur.

Sonuç 4.1.15. Yukarıdaki gösterimlere bağlı kalarak; eğer (f,F), (h,H) ye göre $\big((\mathcal{T}_1,\mathcal{K}_1)-(\mathcal{T}_2,\mathcal{K}_2)\big)$ ikili sürekli ise, (h,H) ye göre $\Big((N^{\mathcal{T}_1},M^{\mathcal{K}_1})-(N^{\mathcal{T}_2},M^{\mathcal{K}_2})\Big)$ yerel-ikili süreklidir. Dolayısıyla, $\mathfrak{G}:\ \mathbf{dfGDitop}\longrightarrow\mathbf{dfGDinhd}$,

$$\mathfrak{G}\Big(\big((f,F),(h,H)\big):\ (S_1,\mathcal{S}_1,\mathcal{T}_1,\mathcal{K}_1,V_1,\mathcal{V}_1)\longrightarrow(S_2,\mathcal{S}_2,\mathcal{T}_2,\mathcal{K}_2,V_2,\mathcal{V}_2)\Big)$$
$$=\big((f,F),(h,H)\big):\ (S_1,\mathcal{S}_1,N^{\mathcal{T}_1},M^{\mathcal{K}_1},V_1,\mathcal{V}_1)\longrightarrow(S_2,\mathcal{S}_2,N^{\mathcal{T}_2},M^{\mathcal{K}_2},V_2,\mathcal{V}_2)$$

biçiminde tanımlanan $\mathfrak{G}$ funktoru dolu bir gömmedir. Ayrıca, $\mathfrak{F}\circ\mathfrak{G}=id_{\mathbf{dfGDitop}}$ dir.

Kanıt: Önerme 4.1.2.'den, $\mathfrak{G}$ iyi tanımlıdır. Ayrıca, $\mathfrak{G}$ bileşke işlemini ve birim difonksiyonu koruduğundan bir funktordur. Önerme 4.1.2.'den $(N^{\mathcal{T}_1},M^{\mathcal{K}_1})=(N^{\mathcal{T}_2},M^{\mathcal{K}_2})$ ise $(\mathcal{T}_1,\mathcal{K}_1)=(\mathcal{T}_2,\mathcal{K}_2)$ olduğundan $\mathfrak{G}$ nesneler üzerinde birebirdir ve böylece dolu bir gömmedir.

$$(\mathfrak{F}\circ\mathfrak{G})\Big(\big((f,F),(h,H)\big):\ (S_1,\mathcal{S}_1,\mathcal{T}_1,\mathcal{K}_1,V_1,\mathcal{V}_1)\longrightarrow(S_2,\mathcal{S}_2,\mathcal{T}_2,\mathcal{K}_2,V_2,\mathcal{V}_2)\Big)$$
$$=\mathfrak{F}\Big(\big((f,F),(h,H)\big):\ (S_1,\mathcal{S}_1,N^{\mathcal{T}_1},M^{\mathcal{K}_1},V_1,\mathcal{V}_1)\longrightarrow(S_2,\mathcal{S}_2,N^{\mathcal{T}_2},M^{\mathcal{K}_2},V_2,\mathcal{V}_2)\Big)$$
$$=\big((f,F),(h,H)\big):\ \big(S_1,\mathcal{S}_1,\mathcal{T}_{N^{\mathcal{T}_1}},\mathcal{K}_{M^{\mathcal{K}_1}},V_1,\mathcal{V}_1\big)\longrightarrow\big(S_2,\mathcal{S}_2,\mathcal{T}_{N^{\mathcal{T}_2}},\mathcal{K}_{M^{\mathcal{K}_2}},V_2,\mathcal{V}_2\big)$$
$$=\big((f,F),(h,H)\big):\ (S_1,\mathcal{S}_1,\mathcal{T}_1,\mathcal{K}_1,V_1,\mathcal{V}_1)\longrightarrow(S_2,\mathcal{S}_2,\mathcal{T}_2,\mathcal{K}_2,V_2,\mathcal{V}_2)$$

olduğundan $\mathfrak{F}\circ\mathfrak{G}=id_{\mathbf{dfGDitop}}$ olur.

Problem 4.1.16. $\mathfrak{F}$ funktorunun nesneler üzerinde bire-bir olup olmadığı (yani Önerme 4.1.5.'de $(N,M)=(N^{\mathcal{T}_N},M^{\mathcal{K}_M})$ olup olmadığı), ve bu nedenle, $\mathfrak{G}\circ\mathfrak{F}=id_{\mathbf{dfGDinhd}}$ olup olmadığı açık bir problemdir.

4.2. Dereceli Q-Dikomşuluk Sistemleri

Bu altbölüm boyunca $(S, \mathcal{S})$ dokusunun üzerinde bir σ tümleyen işlemi olduğu varsayılacaktır. Ertürk ve ark. (2009), $\mathcal{S}$ dokusu üzerinde "kuazi-uyumlu" olma bağıntısını tanımlamışlardır. Buna göre, $A, B \in \mathcal{S}$ için $A \not\subseteq \sigma(B)$ ise A ile B kuazi-uyumludur denir ve bu durum AqB ile gösterilir; $A \subseteq \sigma(B)$ ise A ile B kuazi-uyumlu değildir denir ve bu durum $A\bar{q}B$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.1. $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ bir $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopoloji, $\widetilde{N}, \widetilde{M} : S \longrightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ dönüşümler, her $s \in S$ için $\widetilde{N}(s) = \widetilde{N}_s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$, $\widetilde{M}(s) = \widetilde{M}_s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ fonksiyonlar olsun. Eğer her $v \in V^b$ için,

$$^{v}\widetilde{N}_s = \{A \in \mathcal{S} \mid \exists B \in \mathcal{S} : \mathcal{T}(B) \not\subseteq Q_v \text{ ve } P_s qB \subseteq A\} \tag{4.6}$$

oluyorsa, $\widetilde{N}_s$ fonksiyonuna *s noktasının dereceli q-komşuluk sistemi*; her $v \in V^b$ için,

$$^{v}\widetilde{M}_s = \{A \in \mathcal{S} \mid \exists B \in \mathcal{S} : \mathcal{K}(B) \not\subseteq Q_v \text{ ve } P_s \not\subseteq B,\ A \subseteq B\} \tag{4.7}$$

oluyorsa, $\widetilde{M}_s$ fonksiyonuna s *noktasının dereceli q-kokomşuluk sistemi* denir. Eğer her $s \in S$ için $\widetilde{N}_s$ $(\widetilde{M}_s)$, s noktasının dereceli q-(ko-) komşuluk sistemi ise, sırasıyla $\widetilde{N}$ $(\widetilde{M})$ dönüşümüne $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayının bir dereceli q-(ko-) komşuluk sistemi denir. Eğer $\widetilde{N}$, $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayının bir dereceli q-komşuluk sistemi ve $\widetilde{M}$ de bu uzayın bir dereceli q-kokomşuluk sistemi ise, $(\widetilde{N}, \widetilde{M})$ ikilisine $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayının bir dereceli q-dikomşuluk sistemidir denir.

Önerme 4.2.2. Yukarıdaki gösterimlere bağlı kalarak; $(\widetilde{N}, \widetilde{M})$, bir $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayı için bir dereceli q-dikomşuluk sistemidir ancak ve ancak her $s \in S$, $A \in \mathcal{S}$ için

$$\widetilde{N}_s(A) = \begin{cases} \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s qB \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\}, & P_s qA \\ \emptyset, & P_s \bar{q} A \end{cases} \tag{4.8}$$

ve

$$\widetilde{M}_s(A) = \begin{cases} \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\}, & P_s \nsubseteq A \\ \emptyset, & P_s \subseteq A \end{cases} \tag{4.9}$$

sağlanır.

Kanıt:

(⟹): $s \in S$, $A \in \mathcal{S}$ ve $\widetilde{N}_s$, s'nin dereceli q-komşuluk sistemi olsun. $P_s qA$ ya da $P_s \bar{q} A$ dir.

1.durum: $P_s \bar{q} A$ yani $P_s \subseteq \sigma(A)$ olsun. $\forall B \subseteq A\ için\ \sigma(A) \subseteq \sigma(B)$ olduğundan $\forall B \subseteq A\ için\ P_s \subseteq \sigma(B)$ yani $P_s \bar{q} B$ dir. Dolayısıyla, (4.6)'den $\forall v \in V^b\ için\ A \notin {}^{v}\widetilde{N}_s$ ve (4.1)'den $\forall v \in V^b\ için\ \widetilde{N}_s(A) \subseteq Q_v$ olur. $\widetilde{N}_s(A) \neq \emptyset$ olduğu kabul edilirse $\left(\widetilde{N}_s(A)\right)^b \neq \emptyset$ ve buradan $t \in \left(\widetilde{N}_s(A)\right)^b$ olacak biçimde bir $t \in V^b$ vardır. Böylece $t \in \left(\widetilde{N}_s(A)\right)^b$ olduğundan $\widetilde{N}_s(A) \nsubseteq Q_t$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\widetilde{N}_s(A) = \emptyset$ dir.

2. durum: $P_s qA$ yani $P_s \nsubseteq \sigma(A)$ olsun ve $\widetilde{N}_s(A) \nsubseteq \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s qB \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\}$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\widetilde{N}_s(A) \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s qB \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\}$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Hatta $Q_v \neq V$ olduğundan $v \in V^b$ve (4.1)'den $A \in {}^{v}\widetilde{N}_s$ olur. Böylece, (4.6)'den $\mathcal{T}(B) \nsubseteq Q_v$ ve $P_s qB \subseteq A$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır. O halde $\sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s qB \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ olur ki bu, $P_v \nsubseteq \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s qB \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\}$ olması ile çelişir. Dolayısıyla varsayım yanlış, yani $\widetilde{N}_s(A) \subseteq \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s qB \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\}$ olur.

Şimdi de $\sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s qB \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq \widetilde{N}_s(A)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s qB \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq \widetilde{N}_s(A)$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Hatta $Q_v \neq V$ olduğundan $v \in V^b$ dir. $P_v \nsubseteq \widetilde{N}_s(A)$ olduğundan $\widetilde{N}_s(A) \subseteq Q_v$ ve dolayısıyla (4.1)'den $A \notin {}^{v}\widetilde{N}_s$ olur. Ayrıca $\sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s qB \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ olduğundan $\mathcal{T}(B) \nsubseteq Q_v$ ve $P_s qB \subseteq A$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır. Bu ise (4.6) nedeniyle $A \notin {}^{v}\widetilde{N}_s$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s qB \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\} \subseteq \widetilde{N}_s(A)$ ve böylece $\widetilde{N}_s(A) = \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s qB \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\}$ elde edilir.

$s \in S$, $A \in \mathcal{S}$ ve $\widetilde{M}_s$, s'nin bir dereceli q-kokomşuluk sistemi olsun. $P_s \subseteq A$ ya da $P_s \nsubseteq A$ dir.

1*.durum: $P_s \subseteq A$ olsun. Bu durumda, (4.7)'den $\forall v \in V^b\ için\ A \notin {}^{v}\widetilde{M}_s$ ve böylece (4.1) gereği $\forall v \in V^b\ için\ \widetilde{M}_s(A) \subseteq Q_v$ olur. $\widetilde{M}_s(A) \neq \emptyset$ olduğu kabul edilirse $\left(\widetilde{M}_s(A)\right)^b \neq \emptyset$ ve buradan $t \in \left(\widetilde{M}_s(A)\right)^b$ olacak biçimde bir $t \in V^b$ vardır. Böylece $t \in \left(\widetilde{M}_s(A)\right)^b$ olduğundan $\widetilde{M}_s(A) \nsubseteq Q_t$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\widetilde{M}_s(A) = \emptyset$ dir.

2*.durum: $P_s \nsubseteq A$ olsun ve $\widetilde{M}_s(A) \nsubseteq \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\}$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\widetilde{M}_s(A) \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\}$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Hatta $Q_v \neq V$ olduğundan $v \in V^b$ dir ve (4.1)'den $A \in {}^v\widetilde{M}_s$ olur. Böylece, (4.7)'den $\mathcal{K}(B) \nsubseteq Q_v$ ve $P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır. O halde $\sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ olur ki bu, $P_v \nsubseteq \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\}$ olması ile çelişir. Dolayısıyla varsayım yanlış, yani $\widetilde{M}_s(A) \subseteq \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\}$ olur.

Şimdi de $\sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq \widetilde{M}_s(A)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq \widetilde{M}_s(A)$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Hatta $Q_v \neq V$ olduğundan $v \in V^b$ ve $\widetilde{M}_s(A) \subseteq Q_v$ dir, dolayısıyla (4.1)'den $A \notin {}^v\widetilde{M}_s$ olur. $\sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ olduğundan $\mathcal{K}(B) \nsubseteq Q_v$ ve $P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır, buradan (4.7) nedeniyle $A \in {}^v\widetilde{M}_s$ olur ki bu durum $A \notin {}^v\widetilde{M}_s$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} \subseteq \widetilde{M}_s(A)$ ve böylece $\widetilde{M}_s(A) = \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\}$ elde edilir.

($\Leftarrow$)**:** Her $s \in S$, $A \in \mathcal{S}$ için (4.8) eşitliği sağlansın. Bu durumda, her $s \in S$, $v \in V^b$ için

$$"A \in {}^v\widetilde{N}_s \Leftrightarrow \widetilde{N}_s(A) = \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s q B \subseteq A, B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$$
$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{S} :\ \mathcal{T}(B) \nsubseteq Q_v \ ve\ P_s q B \subseteq A"$$

olacağından (4.6) eşitliği sağlanır ve böylece $\widetilde{N}$ dereceli q-komşuluk sistemidir.

Şimdi, her $s \in S$, $A \in \mathcal{S}$ için (4.9) eşitliği sağlansın. Bu durumda, her $s \in S, v \in V^b$ için

$$"A \in {}^v\widetilde{M}_s \Leftrightarrow \widetilde{M}_s(A) \nsubseteq Q_v \Leftrightarrow \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{S} :$$
$$P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B \ ve\ \mathcal{K}(B) \nsubseteq Q_v"$$

olacağından (4.7) eşitliği sağlanır ve böylece $\widetilde{M}$ dereceli q-kokomşuluk sistemidir.

Teorem 4.2.3. $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ bir $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopoloji olsun. $(\widetilde{N}, \widetilde{M})$, $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayının bir dereceli q-dikomşuluk sistemi ise, her $s \in S$, $A, A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $(\widetilde{\mathbf{N}}\mathbf{1})$ $\widetilde{N}_s(A) \neq \emptyset \Longrightarrow P_s q A$

$(\widetilde{\mathbf{N}}\mathbf{2})$ $\widetilde{N}_s(\emptyset) = \emptyset$ ve $\widetilde{N}_s(S) = V$

$(\widetilde{\mathbf{N}}\mathbf{3})$ $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow \widetilde{N}_s(A_1) \subseteq \widetilde{N}_s(A_2)$

$(\widetilde{\mathbf{N}}\mathbf{4})$ $\widetilde{N}_s(A_1) \wedge \widetilde{N}_s(A_2) \subseteq \widetilde{N}_s(A_1 \cap A_2)$

$(\widetilde{\mathbf{N}}\mathbf{5})$ $\widetilde{N}_s(A) = \sup\{\bigwedge_{P_{s'} q B} \widetilde{N}_{s'}(B) :\ P_s q B \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\}$

(2) $(\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{1})$ $\widetilde{M}_s(A) \neq \emptyset \Longrightarrow P_s \nsubseteq A$

$(\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{2})$ $\widetilde{M}_s(S) = \emptyset$ ve $\widetilde{M}_s(\emptyset) = V$

$(\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{3})$ $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \widetilde{M}_s(A_2) \subseteq \widetilde{M}_s(A_1)$

$(\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{4})$ $\widetilde{M}_s(A_1) \wedge \widetilde{M}_s(A_2) \subseteq \widetilde{M}_s(A_1 \cup A_2)$

$(\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{5})$ $\widetilde{M}_s(A) = \sup\{ \wedge_{P_{s'} \nsubseteq B} \widetilde{M}_{s'}(B) : P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\}$

Kanıt: (1) $(\widetilde{\mathbf{N}}\mathbf{1})$ $\widetilde{N}_s(A) \neq \emptyset \Rightarrow \sup\{\mathcal{T}(B) | P_s q B \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{S} : P_s q B \subseteq A \ ve\ \mathcal{T}(B) \neq \emptyset$

$\Rightarrow P_s \nsubseteq \sigma(B),\ \sigma(A) \subseteq \sigma(B)$

$\Rightarrow P_s \nsubseteq \sigma(A) \Rightarrow P_s q A$

$(\widetilde{\mathbf{N}}\mathbf{2})$ Her $s \in S$ için $P_s \subseteq S = \sigma(\emptyset)$ olduğundan $P_s \bar{q} \emptyset$ ve (4.8)'den $\widetilde{N}_s(\emptyset) = \emptyset$ dir. Ayrıca $P_s \nsubseteq \emptyset = \sigma(S)$ olduğundan $P_s q S$ olur. Buradan,

$\widetilde{N}_s(S) = \sup\{\mathcal{T}(B) | P_s q B \subseteq S,\ B \in \mathcal{S}\} \supseteq \mathcal{T}(S) = V$, yani $\widetilde{N}_s(S) = V$ bulunur.

$(\widetilde{\mathbf{N}}\mathbf{3})$ $A_1, A_2 \in \mathcal{S},\ A_1 \subseteq A_2$olsun. $P_s \bar{q} A_1$ ise $\widetilde{N}_s(A_1) = \emptyset \subseteq \widetilde{N}_s(A_2)$ olur. $P_s q A_1$ ise, $P_s \nsubseteq \sigma(A_1)$ olup "$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \sigma(A_2) \subseteq \sigma(A_1)$" olduğu göz önüne alınarak $P_s \nsubseteq \sigma(A_2)$ yani $P_s q A_2$ bulunur. Bu durumda, $P_s q B \subseteq A_1 \Rightarrow P_s q B \subseteq A_2$ olduğundan, $\widetilde{N}_s(A_1) = \sup\{\mathcal{T}(B) | P_s q B \subseteq A_1,\ B \in \mathcal{S}\} \subseteq \sup\{\mathcal{T}(B) | P_s q B \subseteq A_2,\ B \in \mathcal{S}\} = \widetilde{N}_s(A_2)$ olur.

$(\widetilde{\mathbf{N}}\mathbf{4})$ $P_s \bar{q} A_1$ veya $P_s \bar{q} A_2$ ise özellik sağlanır. $P_s q A_1$ ve $P_s q A_2$olsun. $P_s \bar{q}(B \cap C) \Rightarrow P_s \subseteq \sigma(B \cap C) = \sigma(B) \cup \sigma(C) \Rightarrow$ "$P_s \subseteq \sigma(B)\ veya\ P_s \subseteq \sigma(C)$" $\Rightarrow$ "$P_s \bar{q} B\ veya\ P_s \bar{q} C$" olduğundan "$P_s q B \subseteq A_1$ ve $P_s q C \subseteq A_2$ ise $P_s q(B \cap C) \subseteq (A_1 \cap A_2)$" elde edilir. Bu nedenle,

$$\widetilde{N}_s(A_1) \wedge \widetilde{N}_s(A_2) = \bigvee_{P_s q B \subseteq A_1} \mathcal{T}(B) \wedge \bigvee_{P_s q C \subseteq A_2} \mathcal{T}(C) = \bigvee_{\substack{P_s q B \subseteq A_1 \\ P_s q C \subseteq A_2}} \big(\mathcal{T}(B) \cap \mathcal{T}(C)\big)$$

$$\subseteq \bigvee_{\substack{P_s q B \subseteq A_1 \\ P_s q C \subseteq A_2}} \mathcal{T}(B \cap C) \subseteq \bigvee_{P_s q D \subseteq (A_1 \cap A_2)} \mathcal{T}(D) = \widetilde{N}_s(A_1 \cap A_2)$$

olur.

$(\widetilde{\mathbf{N}}\mathbf{5})$ (4.8) eşitliğinden, her $B \in \mathcal{S}$ için "$P_{s'} q B$ ise $\mathcal{T}(B) \subseteq \widetilde{N}_{s'}(B)$" dir. Böylece, $\widetilde{N}_s(A) = \sup\{\mathcal{T}(B) | P_s q B \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\} \subseteq \sup\{ \wedge_{P_{s'} q B} \widetilde{N}_{s'}(B) : P_s q B \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\}$ olur. Şimdi, $\sup\{ \wedge_{P_{s'} q B} \widetilde{N}_{s'}(B) : P_s q B \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq \widetilde{N}_s(A)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\sup\{ \wedge_{P_{s'} q B} \widetilde{N}_{s'}(B) : P_s q B \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq \widetilde{N}_s(A)$ olacak şekilde bir $v \in V^b$ vardır.

$$\sup\left\{ \bigwedge_{P_{s'} q B} \widetilde{N}_{s'}(B) : P_s q B \subseteq A, B \in \mathcal{S} \right\} \nsubseteq Q_v \Rightarrow \exists B \in \mathcal{S} : P_s q B \subseteq A \ ve\ \text{"}P_{s'} q B$$

$$\Rightarrow \widetilde{N}_{s'}(B) \nsubseteq Q_v\text{"}$$

Burada, $P_s q B$ olduğundan $\widetilde{N}_s(B) \nsubseteq Q_v$ bulunur. $B \subseteq A$ olduğundan (Ñ3) özelliği kullanılarak $\widetilde{N}_s(A) \nsubseteq Q_v$ ve böylece $P_v \subseteq \widetilde{N}_s(A)$ çelişkisi elde edilir.

(2) ($\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{1}$) $\widetilde{M}_s(A) \neq \emptyset$ olsun. $\sup\{\mathcal{K}(B) | P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} \neq \emptyset$ olacağından $P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B$ ve $\mathcal{K}(B) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır. Buradan $P_s \nsubseteq A$ olur.

($\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{2}$) Her $s \in S$ için $P_s \subseteq S$ olduğundan $\widetilde{M}_s(S) = \emptyset$; ayrıca $P_s \nsubseteq \emptyset$ olduğundan $\widetilde{M}_s(\emptyset) = \sup\{\mathcal{K}(B) | P_s \nsubseteq B,\ \emptyset \subseteq B\} \supseteq \mathcal{K}(\emptyset) = V$ olup $\widetilde{M}_s(\emptyset) = V$ dir.

($\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{3}$) $A_1, A_2 \in \mathcal{S},\ A_1 \subseteq A_2$ olsun. $P_s \subseteq A_2$ ise $M_s(A_2) = \emptyset \subseteq M_s(A_1)$ olup özellik sağlanır.$P_s \nsubseteq A_2$ ise, $P_s \nsubseteq A_1$olacağından, "$P_s \nsubseteq B,\ A_2 \subseteq B \Longrightarrow P_s \nsubseteq B,\ A_1 \subseteq B$"olup $\widetilde{M}_s(A_2) = \sup\{\mathcal{K}(B) | P_s \nsubseteq B,\ A_2 \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} \subseteq \sup\{\mathcal{K}(B) | P_s \nsubseteq B,\ A_1 \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} = \widetilde{M}_s(A_1)$ olur.

($\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{4}$) $P_s \subseteq A_1$ veya $P_s \subseteq A_2$ ise özellik sağlanır. $P_s \nsubseteq A_1$ ve $P_s \nsubseteq A_2$ olsun.$P_s \nsubseteq B$ ve $P_s \nsubseteq C$ ise $P_s \nsubseteq (B \cup C)$ olduğundan,

$$\widetilde{M}_s(A_1) \wedge \widetilde{M}_s(A_2) = \bigvee_{P_s \nsubseteq B, A_1 \subseteq B} \mathcal{K}(B) \wedge \bigvee_{P_s \nsubseteq C, A_2 \subseteq C} \mathcal{K}(C) = \bigvee_{\substack{P_s \nsubseteq B, A_1 \subseteq B \\ P_s \nsubseteq C, A_2 \subseteq C}} \big(\mathcal{K}(B) \cap \mathcal{K}(C)\big)$$

$$\subseteq \bigvee_{\substack{P_s \nsubseteq B, A_1 \subseteq B \\ P_s \nsubseteq C, A_2 \subseteq C}} \mathcal{K}(B \cup C) \subseteq \bigvee_{P_s \nsubseteq D, (A_1 \cup A_2) \subseteq D} \mathcal{K}(D) = \widetilde{M}_s(A_1 \cup A_2)$$

olur.

($\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{5}$) (4.9) eşitliğinden, her $B \in \mathcal{S}$ için "$P_{s'} \nsubseteq B$ ise $\mathcal{K}(B) \subseteq \widetilde{M}_{s'}(B)$" dir. Böylece, $\widetilde{M}_s(A) = \sup\{\mathcal{K}(B) | P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} \subseteq \sup\{\bigwedge_{P_{s'} \nsubseteq B} \widetilde{M}_{s'}(B) :\ P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,$ $B \in \mathcal{S}\}$ olur. Şimdi, $\sup\{\bigwedge_{P_{s'} \nsubseteq B} \widetilde{M}_{s'}(B) :\ P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq \widetilde{M}_s(A)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\sup\{\bigwedge_{P_{s'} \nsubseteq B} \widetilde{M}_{s'}(B) :\ P_s \nsubseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq \widetilde{M}_s(A)$ olacak şekilde bir $v \in V^b$ vardır.

$$\sup\{\bigwedge_{P_{s'} \nsubseteq B} \widetilde{M}_{s'}(B) :\ P_s \nsubseteq B, \quad A \subseteq B, \quad B \in \mathcal{S}\} \nsubseteq Q_v \Longrightarrow \exists B \in \mathcal{S} :\ P_s \nsubseteq B,$$

$$A \subseteq B \ ve \ "P_{s'} \nsubseteq B \Longrightarrow \widetilde{M}_{s'}(B) \nsubseteq Q_v"$$

Burada, $P_s \nsubseteq B$ olduğundan $\widetilde{M}_s(B) \nsubseteq Q_v$ bulunur. $A \subseteq B$ olduğundan ($\widetilde{\mathrm{M}}$3) özelliği kullanılarak $\widetilde{M}_s(A) \nsubseteq Q_v$ ve böylece $P_v \subseteq \widetilde{M}_s(A)$ çelişkisi elde edilir.

Önerme 4.2.4. $(S, \mathcal{S}),(V, \mathcal{V})$ doku uzayları, $\widetilde{N}, \widetilde{M}: S \longrightarrow \mathcal{V}^S$ Teorem 4.2.3.'deki özellikleri sağlayan fonksiyonlar olsun. $\tau_{\widetilde{N}}, \kappa_{\widetilde{M}} :\ \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ fonksiyonları her $A \in \mathcal{S}$ için

$$\mathcal{T}_{\widetilde{N}}(A) = \bigcap_{P_s q A} \widetilde{N}_s(A)$$

$$\mathcal{K}_{\widetilde{M}}(A) = \bigcap_{P_s \not\subseteq A} \widetilde{M}_s(A)$$

biçiminde tanımlanırsa; $(\mathcal{T}_{\widetilde{N}}, \mathcal{K}_{\widetilde{M}})$,$(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli ditopolojidir. Ayrıca, $(\widetilde{N}, \widetilde{M})$, $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}_{\widetilde{N}}, \mathcal{K}_{\widetilde{M}}, V, \mathcal{V})$ için bir dereceli q-dikomşuluk sistemidir.

Kanıt:

(GT1) $\mathcal{T}_{\widetilde{N}}(\emptyset) = \bigcap_{P_s q \emptyset} \widetilde{N}_s(\emptyset) = \bigcap_{s \in \emptyset} \widetilde{N}_s(\emptyset) = V$ ve $\mathcal{T}_{\widetilde{N}}(S) = \bigcap_{P_s q S} \widetilde{N}_s(S) = \bigcap_{s \in S} V = V$

(GT2) $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ olsun. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ise $\sigma(A_1 \cap A_2) = S$ olup $P_s q(A_1 \cap A_2) \Leftrightarrow s \in \emptyset$ elde edilir, böylece $\tau_{\widetilde{N}}(A_1 \cap A_2) = V$ olur ve (GT2) sağlanır. O halde $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ olsun. Böylece $P_s q(A_1 \cap A_2)$ olacak biçimde bir $s \in S$ vardır. "$P_s q(A_1 \cap A_2) \Longrightarrow P_s q A_1 \; ve \; P_s q A_2$" olduğundan, ($\widetilde{N}$4) özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\widetilde{N}}(A_1 \cap A_2) &= \bigcap_{P_s q(A_1 \cap A_2)} \widetilde{N}_s(A_1 \cap A_2) \supseteq \bigcap_{P_s q(A_1 \cap A_2)} \left(\widetilde{N}_s(A_1) \wedge \widetilde{N}_s(A_2) \right) \\
&= \left(\bigcap_{P_s q(A_1 \cap A_2)} \widetilde{N}_s(A_1) \right) \cap \left(\bigcap_{P_s q(A_1 \cap A_2)} \widetilde{N}_s(A_2) \right) \\
&\supseteq \bigcap_{P_s q A_1} \widetilde{N}_s(A_1) \cap \bigcap_{P_s q A_1} \widetilde{N}_s(A_2) = \mathcal{T}_{\widetilde{N}}(A_1) \cap \mathcal{T}_{\widetilde{N}}(A_2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(GT3) J boş olmayan bir indeks kümesi olmak üzere, her $j \in J$ için $A_j \in \mathcal{S}$ olsun. Eğer $\bigvee_{j \in J} A_j = \emptyset$ ise $\sigma(\bigvee_{j \in J} A_j) = S$ olup $P_s q(\bigvee_{j \in J} A_j) \Leftrightarrow s \in \emptyset$ elde edilir, böylece $\tau_{\widetilde{N}}(\bigvee_{j \in J} A_j) = V$ olur ve (GT3) sağlanır. O halde $\bigvee_{j \in J} A_j \neq \emptyset$ olsun. Böylece $P_s q(\bigvee_{j \in J} A_j)$ olacak biçimde bir $s \in S$ vardır. Her $j \in J$ için $A_j \subseteq \bigvee_{j \in J} A_j$ olduğundan ($\widetilde{N}$3)' den, her $j \in J$ için $\widetilde{N}_s(A_j) \subseteq \widetilde{N}_s(\bigvee_{j \in J} A_j)$ olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\widetilde{N}}\left(\bigvee_{j \in J} A_j \right) &= \bigcap_{P_s q(\bigvee_{j \in J} A_j)} \widetilde{N}_s\left(\bigvee_{j \in J} A_j \right) = \bigcap_{P_s \not\subseteq \bigcap_{j \in J} \sigma(A_j)} \widetilde{N}_s\left(\bigvee_{j \in J} A_j \right) \\
&= \bigcap_{j \in J} \bigcap_{P_s q A_j} \widetilde{N}_s\left(\bigvee_{j \in J} A_j \right) \supseteq \bigcap_{j \in J} \bigcap_{P_s q A_j} \widetilde{N}_s(A_j) = \bigcap_{j \in J} \mathcal{T}_{\widetilde{N}}(A_j)
\end{aligned}$$

olur.

(GCT1) $\mathcal{K}_{\widetilde{M}}(\emptyset) = \bigcap_{P_s \not\subseteq \emptyset} \widetilde{M}_s(\emptyset) = \bigcap_{s \in S} V = V$

$\mathcal{K}_{\widetilde{M}}(S) = \bigcap_{P_s \not\subseteq S} \widetilde{M}_s(S) = \bigcap_{s \in \emptyset} \widetilde{M}_s(S) = V$

(GCT2) $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ olsun. $A_1 \cup A_2 = S$ ise $\mathcal{K}_{\widetilde{M}}(A_1 \cup A_2) = V$ olur ve (GCT2) sağlanır. O halde $A_1 \cup A_2 \neq S$ olsun. $(\widetilde{M}4)$ özelliği kullanılarak,

$$\mathcal{K}_{\widetilde{M}}(A_1 \cup A_2) = \bigcap_{P_s \not\subseteq (A_1 \cup A_2)} \widetilde{M}_s(A_1 \cup A_2) \supseteq \bigcap_{P_s \not\subseteq (A_1 \cup A_2)} \left(\widetilde{M}_s(A_1) \wedge \widetilde{M}_s(A_2)\right)$$

$$= \left(\bigcap_{P_s \not\subseteq (A_1 \cup A_2)} \widetilde{M}_s(A_1)\right) \cap \left(\bigcap_{P_s \not\subseteq (A_1 \cup A_2)} \widetilde{M}_s(A_2)\right)$$

$$\supseteq \bigcap_{P_s \not\subseteq A_1} \widetilde{M}_s(A_1) \cap \bigcap_{P_s \not\subseteq A_2} \widetilde{M}_s(A_2) = \mathcal{K}_{\widetilde{M}}(A_1) \cap \mathcal{K}_{\widetilde{M}}(A_2)$$

olur.

(GCT3) J boş olmayan bir indeks kümesi olmak üzere, her $j \in J$ için $A_j \in \mathcal{S}$ olsun. $\bigcap_{j \in J} A_j = S$ ise $\mathcal{K}_{\widetilde{M}}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = V$ olur ve (GCT3) sağlanır. O halde $\bigcap_{j \in J} A_j \neq S$ olsun. Her $i \in J$ için $\bigcap_{j \in J} A_j \subseteq A_i$ olduğundan $(\widetilde{M}3)$' den, her $i \in J$ için $\widetilde{M}_s(A_i) \subseteq \widetilde{M}_s\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$ dir. Ayrıca, $P_s \not\subseteq \bigcap_{j \in J} A_j \Leftrightarrow s \in S \setminus \bigcap_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J}(S \setminus A_j)$ dir. Dolayısıyla,

$$\mathcal{K}_{\widetilde{M}}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \bigcap_{P_s \not\subseteq \bigcap_{j \in J} A_j} \widetilde{M}_s\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \supseteq \bigcap_{j \in J} \bigcap_{P_s \not\subseteq A_j} \widetilde{M}_s\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right)$$

$$\supseteq \bigcap_{j \in J}\left(\bigcap_{P_s \not\subseteq A_j} \widetilde{M}_s(A_j)\right) = \bigcap_{j \in J} \mathcal{K}_{\widetilde{M}}(A_j)$$

olur.

Şimdi, $\left(\widetilde{N}^{\mathcal{T}_{\widetilde{N}}}, \widetilde{M}^{\mathcal{K}_{\widetilde{M}}}\right)$, $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}_{\widetilde{N}}, \mathcal{K}_{\widetilde{M}}, V, \mathcal{V})$ için dereceli q-dikomşuluk sistemi, $A \in \mathcal{S}$ olsun. $s \in S$ için; $P_s \bar{q} A$ ise $\widetilde{N}_s(A) = \widetilde{N}^{\mathcal{T}_{\widetilde{N}}}{}_s(A) = \emptyset$ ve $P_s q A$ ise $(\widetilde{N}5)$'den $\widetilde{N}_s(A) = \sup\{\bigwedge_{P_{s'} q B} \widetilde{N}_{s'}(B) : P_s q B \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\} = \sup\{\mathcal{T}_{\widetilde{N}}(B) : P_s q B \subseteq A,\ B \in \mathcal{S}\} = \widetilde{N}^{\mathcal{T}_{\widetilde{N}}}{}_s(A)$ elde edilir. $s \in S$ için; $P_s \subseteq A$ ise $\widetilde{M}_s(A) = \widetilde{M}^{\mathcal{K}_{\widetilde{M}}}{}_s(A) = \emptyset$ ve $P_s \not\subseteq A$ ise $(\widetilde{M}5)$'den $\widetilde{M}_s(A) = \sup\{\bigwedge_{P_{s'} \not\subseteq B} \widetilde{M}_{s'}(B) : P_s \not\subseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} = \sup\{\mathcal{K}_{\widetilde{M}}(B) : P_s \not\subseteq B,\ A \subseteq B,\ B \in \mathcal{S}\} = \widetilde{M}^{\mathcal{K}_{\widetilde{M}}}{}_s(A)$ elde edilir. Yani,$(\widetilde{N}, \widetilde{M})$, $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}_{\widetilde{N}}, \mathcal{K}_{\widetilde{M}}, V, \mathcal{V})$ için dereceli q-dikomşuluk sistemidir.

Sonuç 4.2.5. Önerme 4.2.4.'de σ çakılı ise, $\mathcal{T}_{\widetilde{N}}, \mathcal{K}_{\widetilde{M}} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ fonksiyonları her $A \in \mathcal{S}$ için

$$\mathcal{T}_{\widetilde{N}}(A) = \bigcap_{s \in A^b} \widetilde{N}_{\sigma(s)}(A)$$

$$\mathcal{K}_{\widetilde{M}}(A) = \bigcap_{s \in \sigma(A)^b} \widetilde{M}_{\sigma(s)}(A)$$

biçiminde de karakterize edilebilir.

Kanıt: $P_s q A \Leftrightarrow P_s \not\subseteq \sigma(A) \Leftrightarrow A = \sigma\big(\sigma(A)\big) \not\subseteq \sigma(P_s) = Q_{\sigma(s)} \Leftrightarrow \sigma(s) \in A^b$ olduğundan,

$$\mathcal{T}_{\widetilde{N}}(A) = \bigcap_{P_s q A} \widetilde{N}_s(A) = \bigcap_{\sigma(s)\in A^b} \widetilde{N}_s(A) = \bigcap_{\sigma(s)\in A^b} \widetilde{N}_{\sigma(\sigma(s))}(A) = \bigcap_{s\in A^b} \widetilde{N}_{\sigma(s)}(A)$$

olur. Benzer şekilde, $P_s \not\subseteq A \Leftrightarrow \sigma(A) \not\subseteq Q_{\sigma(s)} \Leftrightarrow \sigma(s) \in \big(\sigma(A)\big)^b$ olduğundan,

$$\mathcal{K}_{\widetilde{M}}(A) = \bigcap_{P_s \not\subseteq A} \widetilde{M}_s(A) = \bigcap_{\sigma(s)\in(\sigma(A))^b} \widetilde{M}_s(A) = \bigcap_{s\in\sigma(A)^b} \widetilde{M}_{\sigma(s)}(A)$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.6. $\big(\widetilde{N},\widetilde{M}\big)$, $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayının bir dereceli q-dikomşuluk sistemi ise, $(\mathcal{T},\mathcal{K}) = (\mathcal{T}_{\widetilde{N}},\mathcal{K}_{\widetilde{M}})$ olur.

Kanıt: Teorem 4.2.3. ve Önerme 4.2.4. göz önüne alınarak görülür.

Önerme 4.2.7. $(S,\mathcal{S},\sigma)$ bir tümleyensel doku uzayı ve $(\mathcal{T},\mathcal{K})$, $(S,\mathcal{S},\sigma)$ üzerinde bir $(V,\mathcal{V})$- dereceli ditopoloji olsun. $\big(\widetilde{N},\widetilde{M}\big)$, $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayının bir dereceli q-dikomşuluk sistemi ise, her $A \in \mathcal{S}$ için

$$\widetilde{N}_s^*(A) = \widetilde{M}_s\big(\sigma(A)\big),\ \ \widetilde{M}_s^*(A) = \widetilde{N}_s\big(\sigma(A)\big),\ \ s \in S$$

biçiminde tanımlanan $\widetilde{N}^*,\widetilde{M}^*: S \longrightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ fonksiyonları, $(S,\mathcal{S},\mathcal{K}\circ\sigma,\mathcal{T}\circ\sigma,V,\mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayı için bir $\big(\widetilde{N}^*,\widetilde{M}^*\big)$ dereceli q-dikomşuluk sistemi oluşturur. Ayrıca, $(\mathcal{T},\mathcal{K})$ tümleyensel ise $\big(\widetilde{N},\widetilde{M}\big) = \big(\widetilde{N}^*,\widetilde{M}^*\big)$ olur.

Kanıt: Her $A \in \mathcal{S}, s \in S$ için;

$$\widetilde{N}_s^*(A) = \widetilde{M}_s\big(\sigma(A)\big) = \begin{cases} \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \not\subseteq B, \quad \sigma(A) \subseteq B, \quad B \in \mathcal{S}\}, & P_s \not\subseteq \sigma(A) \\ \emptyset, & P_s \subseteq \sigma(A) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sup\{\mathcal{K}(B) \mid P_s \not\subseteq B, \quad \sigma(B) \subseteq A, \quad \sigma(B) \in \mathcal{S}\}, & P_s q A \\ \emptyset, & P_s \bar{q} A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sup\big\{\mathcal{K}\big(\sigma(B)\big) \big| P_s \not\subseteq \sigma(B), \quad B \subseteq A, \quad B \in \mathcal{S}\}, & P_s q A \\ \emptyset, & P_s \bar{q} A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sup\{(\mathcal{K}\circ\sigma)(B) \mid P_s q B, \quad B \subseteq A, \quad B \in \mathcal{S}\}, & P_s q A \\ \emptyset, & P_s \bar{q} A \end{cases}$$

ve

$$\widetilde{M}_s^*(A) = \widetilde{N}_s(\sigma(A)) = \begin{cases} \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s q B \subseteq \sigma(A), & B \in \mathcal{S}\}, \quad P_s q \sigma(A) \\ & \emptyset, \quad P_s \bar{q} \sigma(A) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sup\{\mathcal{T}(B) \mid P_s \nsubseteq \sigma(B), B \subseteq \sigma(A), & B \in \mathcal{S}\}, \quad P_s \nsubseteq A \\ & \emptyset, \quad P_s \subseteq A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sup\{\mathcal{T}(\sigma(B)) \mid P_s \nsubseteq B, \sigma(B) \subseteq \sigma(A), & \sigma(B) \in \mathcal{S}\}, \quad P_s \nsubseteq A \\ & \emptyset, \quad P_s \subseteq A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sup\{(\mathcal{T} \circ \sigma)(B) \mid P_s \nsubseteq B, A \subseteq B, & B \in \mathcal{S}\}, \quad P_s \nsubseteq A \\ & \emptyset, \quad P_s \subseteq A \end{cases}$$

olduğundan, $(\widetilde{N}^*, \widetilde{M}^*)$ $(S, \mathcal{S}, \mathcal{K} \circ \sigma, \mathcal{T} \circ \sigma, V, \mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayı için bir dereceli q-dikomşuluk sistemidir. Ayrıca, $(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ tümleyensel ise $\mathcal{T} = \mathcal{K} \circ \sigma$ ve $\mathcal{K} = \mathcal{T} \circ \sigma$ olacağından $(\widetilde{N}, \widetilde{M}) = (\widetilde{N}^*, \widetilde{M}^*)$ elde edilir.

Örnek 4.2.8. (X, τ) bir smooth topolojik uzay, $x_m \in \mathbb{I}^X$ bir fuzzy nokta ve $Q_{x_m} : \mathbb{I}^X \to \mathbb{I}$, x_m nin smooth q-komşuluk sistemi, yani her $\mu \in \mathbb{I}^X$ için

$$Q_{x_m}(\mu) = \begin{cases} \sup\{\tau(\eta) : \eta \in \mathbb{I}^X, x_m q \eta, \eta \leq \mu\}, & x_m q \mu \\ 0, & x_m \bar{q} \mu \end{cases}$$

olsun. Örnek 2.3.14. ve Tanım 2.3.16. hatırlanarak, $\mathbb{I}$ fuzzy latisine $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ dokusunun ve $\mathbb{I}^X$ fuzzy latisine de $(W, \mathcal{W}, \omega)$ dokusunun karşılık geldiği göz önüne alınırsa;

$$W = \{x_m \mid x \in X, m \in \mathbb{I}\}$$
$$\varphi : \mathbb{I}^X \to \mathcal{P}(W), \;\; \varphi(\mu) = \{(x, m) \in W \mid x_m \leq \mu\}$$
$$\mathcal{W} = \{\varphi(\mu) \mid \mu \in \mathbb{I}^X\}$$
$$\omega(\varphi(\mu)) = \varphi(\mu^c) = \{(x, m) \mid m \leq \mu(x)'\}$$

olup

$$\mathcal{T}(\varphi(\mu)) = (0, \tau(\mu)], \;\; \mathcal{K}(\varphi(\mu)) = \mathcal{T}\left(\omega(\varphi(\mu))\right), \mu \in \mathbb{I}^X$$

biçiminde tanımlanan $\mathcal{T}, \mathcal{K} : \mathcal{W} \to \mathcal{L}$ fonksiyonları $(W, \mathcal{W}, \omega)$ üzerinde bir tümleyensel $(L, \mathcal{L})$-dereceli ditopoloji oluştururlar. Ayrıca, her $x_m \in \mathbb{I}^X$, $\varphi(\mu) \in \mathcal{W}$ için

$$\widetilde{N}_{x_m}(\varphi(\mu)) = \begin{cases} \sup\{\mathcal{T}(\varphi(\eta)) : \eta \in \mathbb{I}^X, x_m q \varphi(\eta), \varphi(\eta) \subseteq \varphi(\mu)\}, & x_m q \varphi(\mu) \\ \emptyset, & x_m \bar{q} \varphi(\mu) \end{cases}$$

$$\widetilde{M}_{x_m}(\varphi(\mu)) = \widetilde{N}_{x_m}\left(\omega(\varphi(\mu))\right)$$

biçiminde tanımlı $\widetilde{N}, \widetilde{M} : W \to \mathcal{L}^W$ fonksiyonları, $(W, \mathcal{W}, \omega, \mathcal{T}, \mathcal{K}, L, \mathcal{L})$ için bir dereceli q-dikomşuluk sistemi $(\widetilde{N}, \widetilde{M})$ oluştururlar.

BÖLÜM 5
DERECELİ DİTOPOLOJİLERDE YAKINSAMA

Topolojik uzaylarda, kapalı küme ve kompaktlık kavramları, süzgeçler ve süzgeçlerin yakınsaklıkları yardımıyla incelenebilir. Dolayısıyla süzgeçler topoloji içerisinde önemli bir yere sahiptir. Dereceli ditopolojik doku uzayları üzerinde uygun bir süzgeç yapısı oluşturmanın, dereceli ditopolojik doku uzayları teorisinin araştırılmasına ve gelişmesine önemli bir katkı sağlayacağı düşüncesiyle bu bölümdeki çalışmalar yapılmıştır.

Dereceli ditopolojik doku uzayları, Brown ve Šostak (2014) tarafından, ditopolojik doku uzaylarının bir genellemesi olarak sunulmuştur. Bu nedenle, dereceli ditopolojik doku uzaylarında oluşturulacak süzgeç yapısının, ditopolojik doku uzaylarında Özçağ ve ark. (2005) tarafından tanıtılan disüzgeç yapısının bir genellemesi olması beklenir. Bu bölümde, Özçağ ve ark. (2005) tarafından tanıtılan ve bazı özellikleri 2.3. kesimde "Regüler Disüzgeçlerin Yakınsaklığı" başlığı ile verilen disüzgeç yapısı, dereceli ditopolojik doku uzayları üzerine genelleştirilecek ve "dereceli disüzgeç" olarak adlandırılacak bu yeni yapının özellikleri ile ditopolojideki disüzgeç yapısının özellikleri karşılaştırılacaktır.

Tanım 5.1. $(S, \mathcal{S})$ ve $(V, \mathcal{V})$ birer doku olsun.

(1) Boştan farklı bir $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ dönüşümüne, her $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ için

(GF1) $\mathcal{F}(\emptyset) = \emptyset$

(GF2) $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow \mathcal{F}(A_1) \subseteq \mathcal{F}(A_2)$

(GF3) $\mathcal{F}(A_1) \wedge \mathcal{F}(A_2) \subseteq \mathcal{F}(A_1 \cap A_2)$

koşulları sağlanıyorsa $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-*dereceli süzgeç* denir.

(2) Boştan farklı bir $\mathcal{G} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ dönüşümüne, her $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ için

(GCF1) $\mathcal{G}(S) = \emptyset$

(GCF2) $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow \mathcal{G}(A_2) \subseteq \mathcal{G}(A_1)$

(GCF3) $\mathcal{G}(A_1) \wedge \mathcal{G}(A_2) \subseteq \mathcal{G}(A_1 \cup A_2)$

koşulları sağlanıyorsa $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-*dereceli kosüzgeç* denir.

(3) $\mathcal{F}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli süzgeç ve $\mathcal{G}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli kosüzgeç ise $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ikilisine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-*dereceli disüzgeçtir* denir. $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ bir dereceli ditopolojik doku uzayı ve $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli disüzgeç ise kısaca $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ üzerinde bir dereceli disüzgeçtir denecektir.

Önerme 5.2. $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir $(V,\mathcal{V})$-dereceli disüzgeç $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ için aşağıdakiler denktir:

(1) $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\emptyset$ (Yani her $A\in\mathcal{S}$ için $\mathcal{F}(A)\cap\mathcal{G}(A)=\emptyset$)

(2) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\bigcap_{i=1}^{n}\big(\mathcal{F}(A_i)\cap\mathcal{G}(B_i)\big)\neq\emptyset\Longrightarrow\bigcap_{i=1}^{n}A_i\nsubseteq\bigcup_{i=1}^{n}B_i,\ A_i,B_i\in\mathcal{S}$

(3) $\mathcal{F}(A)\cap\mathcal{G}(B)\neq\emptyset\Longrightarrow A\nsubseteq B$

Kanıt: $(1)\Longrightarrow(2):$ $n\in\mathbb{N}$ ve $\bigcap_{i=1}^{n}\big(\mathcal{F}(A_i)\cap\mathcal{G}(B_i)\big)\neq\emptyset$ olsun ve $\bigcap_{i=1}^{n}A_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}B_i$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (1)'den $\mathcal{F}(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)\cap\mathcal{G}(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\emptyset$ olacağından,

$$\emptyset=\mathcal{F}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\cap\mathcal{G}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\supseteq\mathcal{F}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\cap\mathcal{G}\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\supseteq\bigcap_{i=1}^{n}\mathcal{F}(A_i)\cap\bigcap_{i=1}^{n}\mathcal{G}(B_i)$$
$$=\bigcap_{i=1}^{n}\big(\mathcal{F}(A_i)\cap\mathcal{G}(B_i)\big)$$

elde edilir ki, bu durum $\bigcap_{i=1}^{n}\big(\mathcal{F}(A_i)\cap\mathcal{G}(B_i)\big)\neq\emptyset$ olması ile çelişir.

$(2)\Longrightarrow(3)$: Açıktır.

$(3)\Longrightarrow(1):$ $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\emptyset$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $\mathcal{F}(A)\cap\mathcal{G}(A)\neq\emptyset$ olacak biçimde bir $A\in\mathcal{S}$ vardır. Buradan, (3) kullanılarak $A\nsubseteq A$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\emptyset$ dir.

Tanım 5.3. Önerme 5.2.'deki denk koşullardan birini sağlayan bir $(S,\mathcal{S})$ dokusu üzerindeki bir $(V,\mathcal{V})$-dereceli disüzgece *regülerdir* denir.

Örnek 5.4. (1) $F\times G$, bir $(S,\mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir (regüler) disüzgeç olsun. Bu durumda, $1=\{0\}$ ve $\mathcal{P}(1)=\{\emptyset,1\}$ olmak üzere, $\mathcal{F},\mathcal{G}:\mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{P}(1)$ dönüşümleri, her $A\in\mathcal{S}$ için

$$\mathcal{F}(A)=\begin{cases}1, & A\in F\\ \emptyset, & A\notin F\end{cases}$$
$$\mathcal{G}(A)=\begin{cases}1, & A\in G\\ \emptyset, & A\notin G\end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa; $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir (regüler) $(V,\mathcal{V})$-dereceli disüzgeç olur.

Diğer taraftan, $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir (regüler) $(V,\mathcal{V})$-dereceli disüzgeç ise, her bir $v\in V$ için,

$$\mathcal{F}^v=\{A\in\mathcal{S}\mid P_v\subseteq\mathcal{F}(A)\},\qquad\mathcal{G}^v=\{A\in\mathcal{S}\mid P_v\subseteq\mathcal{G}(A)\}$$

biçiminde tanımlanan aileler, $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir $\mathcal{F}^v\times\mathcal{G}^v$ (regüler) disüzgeci olur.

(2) Ditopolojideki dikomşuluk - disüzgeç durumuna paralel olarak; (N,M), bir

$(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayı için bir dereceli dikomşuluk sistemi ise, her $s \in S$ için, M_s $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir $(V,\mathcal{V})$-dereceli kosüzgeç olur ancak genel olarak, $s \in S^b$ için ($A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ için, $A_1 \nsubseteq Q_s$ ve $A_2 \nsubseteq Q_s$ olması $A_1 \cap A_2 \nsubseteq Q_s$ olmasını gerektirmeyeceğinden) N_s $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir $(V,\mathcal{V})$-dereceli süzgeç değildir. $(S,\mathcal{S})$ dokusunun sade olması durumunda, her $s \in S^b = S$ için N_s $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir $(V,\mathcal{V})$-dereceli süzgeç olur. Sonuç olarak, $(S,\mathcal{S})$ dokusu sade ise her $s \in S^b = S$ için (N_s, M_s), $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir $(V,\mathcal{V})$-dereceli disüzgeçtir.

(3) $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ bir dereceli ditopolojik doku uzayı olsun. $N^*: S^b \longrightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$, $M^*: S \longrightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ dönüşümleri, her $s \in S^b$ için $N^*(s) = N_s^*: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ ve her $s \in S$ için $M^*(s) = M_s^*: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ olmak üzere, $A \in \mathcal{S}$ için

$$N_s^*(A) = \begin{cases} \sup\{\bigcap_{k=1}^n \mathcal{T}(B_k) \mid B_k \nsubseteq Q_s,\ 1 \le k \le n,\ B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n \subseteq A\}, & A \nsubseteq Q_s \\ \emptyset, & A \subseteq Q_s \end{cases}$$

ve her $A \in \mathcal{S}$ için

$$M_s^*(A) = \begin{cases} \sup\{\bigcap_{k=1}^n \mathcal{K}(B_k) \mid P_s \nsubseteq B_k,\ 1 \le k \le n,\ A \subseteq B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n\}, & P_s \nsubseteq A \\ \emptyset, & P_s \subseteq A \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa, (N_s^*, M_s^*), $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir regüler $(V,\mathcal{V})$-dereceli disüzgeç olur.

Önerme 5.5. Yukarıdaki gösterimlere bağlı kalarak, $(S,\mathcal{S})$ dokusu sade ise, her $s \in S^b = S$ için $(N_s, M_s) = (N_s^*, M_s^*)$ olur.

Kanıt: Bir $A \in \mathcal{S}, s \in S$ için; $A \subseteq Q_s$ ise $N_s^*(A) = N_s(A) = \emptyset$ eşitliği sağlandığından $A \nsubseteq Q_s$ alınsın.

$N_s(A) \nsubseteq N_s^*(A)$ olduğu kabul edilirse $N_s(A) \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq N_s^*(A)$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. $N_s(A) \nsubseteq Q_v$ olduğundan, $P_s \subseteq B \subseteq A \nsubseteq Q_s$ ve $\mathcal{T}(B) \nsubseteq Q_v$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır. $(S,\mathcal{S})$ sade olduğundan $B \nsubseteq Q_s$ dir. Böylece $\mathcal{T}(B) \subseteq N_s^*(A)$ olup $N_s^*(A) \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \subseteq N_s^*(A)$ bulunur ki, bu sonuç $P_v \nsubseteq N_s^*(A)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $N_s(A) \subseteq N_s^*(A)$ dır.

Şimdi de $N_s^*(A) \nsubseteq N_s(A)$ olduğu kabul edilirse $N_s^*(A) \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq N_s(A)$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. $N_s^*(A) \nsubseteq Q_v$ olduğundan, $1 \le k \le n$ için $B_k \nsubseteq Q_s$, $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n \subseteq A$ ve $\bigcap_{k=1}^n \mathcal{T}(B_k) \nsubseteq Q_v$ olacak şekilde $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{S}$ vardır. $\bigcap_{k=1}^n \mathcal{T}(B_k) \subseteq \mathcal{T}(\bigcap_{k=1}^n B_k)$ olduğundan $\mathcal{T}(\bigcap_{k=1}^n B_k) \nsubseteq Q_v$ ve böylece $P_v \subseteq \mathcal{T}(\bigcap_{k=1}^n B_k)$ olur. Ayrıca, $1 \le k \le n$ için $B_k \nsubseteq Q_s$ olduğundan ve $(S,\mathcal{S})$ sade olduğundan $P_s \subseteq (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \subseteq A \nsubseteq Q_s$ dir. Böylece, $P_v \subseteq \mathcal{T}(\bigcap_{k=1}^n B_k) \subseteq N_s(A)$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $N_s^*(A) \subseteq N_s(A)$ bulunur.

Bir $A \in \mathcal{S}, s \in S$ için; $P_s \subseteq A$ ise $M_s^*(A) = M_s(A) = \emptyset$ eşitliği sağlandığından

$P_s \nsubseteq A$ alınsın.

$M_s(A) \nsubseteq M_s^*(A)$ olduğu kabul edilirse $M_s(A) \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq M_s^*(A)$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. $M_s(A) \nsubseteq Q_v$ olduğundan, $P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s$ ve $\mathcal{K}(B) \nsubseteq Q_v$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır. $(S, \mathcal{S})$ sade olduğundan $P_s \nsubseteq B$ dir. Böylece $\mathcal{K}(B) \subseteq M_s^*(A)$ olup $M_s^*(A) \nsubseteq Q_v$ bulunur ki, bu sonuç $P_v \nsubseteq M_s^*(A)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $M_s(A) \subseteq M_s^*(A)$ dır.

Şimdi de $M_s^*(A) \nsubseteq M_s(A)$ olduğu kabul edilirse $M_s^*(A) \nsubseteq Q_v$ ve $P_v \nsubseteq M_s(A)$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. $M_s^*(A) \nsubseteq Q_v$ olduğundan, $1 \leq k \leq n$ için $P_s \nsubseteq B_k$, $A \subseteq B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ ve $\bigcap_{k=1}^n \mathcal{K}(B_k) \nsubseteq Q_v$ olacak şekilde $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{S}$ vardır. Üstelik, $\bigcap_{k=1}^n \mathcal{K}(B_k) \subseteq \mathcal{K}(\bigcup_1^n B_k)$ olduğu bilindiğinden $P_v \subseteq \mathcal{K}(\bigcup_1^n B_k)$ olur. Ayrıca, $1 \leq k \leq n$ için $P_s \nsubseteq B_k$ ve $(S, \mathcal{S})$ sade olduğundan $P_s \nsubseteq A \subseteq (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) \subseteq Q_s$ dir. Böylece, $P_v \subseteq \mathcal{K}(\bigcup_1^n B_k) \subseteq M_s(A)$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $M_s^*(A) \subseteq M_s(A)$ bulunur.

Tanım 5.6. $\mathcal{F}$ $(\mathcal{G})$, bir dereceli ditopolojik doku uzayı $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ üzerinde bir dereceli (ko-) süzgeç olsun. Eğer $N_s^* \subseteq \mathcal{F}$ $(M_s^* \subseteq \mathcal{G})$ ise, $\mathcal{F}$, s noktasına yakınsar ($\mathcal{G}$, s noktasına yakınsar) denir ve bu durum $\mathcal{F} \longrightarrow s$ $(\mathcal{G} \longrightarrow s)$ biçiminde gösterilir.

Eğer $s, s' \in S$, $P_{s'} \nsubseteq Q_s$ için (ki bu durumda $s \in S^b$ olur) $\mathcal{F} \longrightarrow s$ ve $\mathcal{G} \longrightarrow s'$ ise, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ dereceli disüzgeci *diyakınsaktır* denir. Bu durumda, s (s') noktasına $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ dereceli disüzgecinin bir *limiti (kolimiti)* denir.

Önerme 5.7. $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, bir dereceli ditopolojik doku uzayı $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ üzerinde bir dereceli disüzgeç ise,

a. $\mathcal{F} \longrightarrow s \iff$ "$A \nsubseteq Q_s \Longrightarrow \mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$"

b. $\mathcal{G} \longrightarrow s \iff$ "$P_s \nsubseteq A \Longrightarrow \mathcal{K}(A) \subseteq \mathcal{G}(A)$"

sağlanır.

Kanıt: a) ($\Longrightarrow$): $\mathcal{F} \longrightarrow s$ ve $A \nsubseteq Q_s$ olsun. $\mathcal{F} \longrightarrow s$ olduğundan, $N_s^* \subseteq \mathcal{F}$ ve buradan $N_s^*(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$ olur. $A \nsubseteq Q_s$ olduğundan $\mathcal{T}(A) \subseteq N_s^*(A)$ ve böylece $\mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$ elde edilir.

($\Longleftarrow$): "$A \nsubseteq Q_s \Longrightarrow \mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$" ise $N_s^*(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$ olacağından $\mathcal{F} \longrightarrow s$ olur.

b) ($\Longrightarrow$): $\mathcal{G} \longrightarrow s$ ve $P_s \nsubseteq A$ olsun. $\mathcal{G} \longrightarrow s$ olduğundan, $M_s^* \subseteq \mathcal{G}$ ve buradan $M_s^*(A) \subseteq \mathcal{G}(A)$ olur. $P_s \nsubseteq A$ olduğundan $\mathcal{K}(A) \subseteq M_s^*(A)$ ve böylece $\mathcal{K}(A) \subseteq \mathcal{G}(A)$ elde edilir.

($\Longleftarrow$): "$P_s \nsubseteq A \Longrightarrow \mathcal{K}(A) \subseteq \mathcal{G}(A)$" ise $M_s^*(A) \subseteq \mathcal{G}(A)$ olacağından $\mathcal{G} \longrightarrow s$ olur.

Önerme 5.8. $(S, \mathcal{S})$ bir sade doku olmak üzere; $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, bir dereceli ditopolojik doku uzayı $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ üzerinde bir dereceli disüzgeç ise, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

a. $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ diyakınsaktır.

b. $\exists s \in S\ :\ (N_s, M_s) \subseteq (\mathcal{F},\mathcal{G})$ dir.

Kanıt: $(a \Longrightarrow b)$: $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ diyakınsak ise $(N_s^*, M_s^*) \subseteq (\mathcal{F},\mathcal{G})$, $P_{s'} \nsubseteq Q_s$ olacak şekilde $s, s' \in S$ vardır. $(S,\mathcal{S})$ sade olduğundan, Önerme 5.5.'den $(N_s, M_s) = (N_s^*, M_s^*)$ dır. Ayrıca, $P_{s'} \nsubseteq Q_s$ olduğundan, her $A \in \mathcal{S}$ için; "$P_s \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_s \Longrightarrow P_{s'} \nsubseteq A \subseteq B \subseteq Q_{s'}$" olup $M_s \subseteq M_{s'}$ bulunur. Böylece, $N_s = N_s^* \subseteq \mathcal{F}$ ve $M_s \subseteq M_{s'} = M_s^* \subseteq \mathcal{G}$ olup $(N_s, M_s) \subseteq (\mathcal{F},\mathcal{G})$ bulunur.

$(b \Longrightarrow a)$: $(S,\mathcal{S})$ sade olduğundan, $P_s \nsubseteq Q_s$ ve Önerme 5.5.'den $(N_s, M_s) = (N_s^*, M_s^*)$ olup $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ diyakınsak bulunur.

Tanım 5.9. $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ bir dereceli ditopolojik doku uzay, $A \in \mathcal{S}$ ve $v \in V$ olsun. $\bigcap\{B \in \mathcal{S} \mid A \subseteq B,\ P_v \subseteq \mathcal{K}(B)\} \in \mathcal{S}$ kümesine, A nın *v-kapanışı* denir ve $[A]^v$ ile gösterilir. $\bigvee\{B \in \mathcal{S} \mid B \subseteq A,\ P_v \subseteq \mathcal{T}(B)\} \in \mathcal{S}$ kümesine, A nın *v-içi* denir ve $]A[^v$ ile gösterilir.

$[A]^v$ ve $]A[^v$ kümelerinin, $(S,\mathcal{S},\mathcal{T}^v,\mathcal{K}^v)$ ditopolojik doku uzayında A kümesinin sırasıyla kapanışı ve içi olduğu açıktır.

Önerme 5.10. $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, bir $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ dereceli ditopolojik doku uzayı üzerinde bir dereceli regüler disüzgeç ve $s \in S$ ise,

a. $\mathcal{F} \longrightarrow s \Longrightarrow$ "Her $A \in \mathcal{S}$ için, $v \in \mathcal{G}(A) \Longrightarrow]A[^v \subseteq Q_s$"

b. $\mathcal{G} \longrightarrow s \Longrightarrow$ "Her $A \in \mathcal{S}$ için, $v \in \mathcal{F}(A) \Longrightarrow P_s \subseteq [A]^v$"

sağlanır.

Kanıt: a) $\mathcal{F} \longrightarrow s$ olsun ve bir $A \in \mathcal{S}$ için, $]A[^v \nsubseteq Q_s$ olacak şekilde bir $v \in \mathcal{G}(A)$ nin var olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $B \subseteq A$, $P_v \subseteq \mathcal{T}(B)$ ve $B \nsubseteq Q_s$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır. Önerme 5.7.'den, $\mathcal{F} \longrightarrow s$ ve $B \nsubseteq Q_s$ olduğundan $\mathcal{T}(B) \subseteq \mathcal{F}(B)$ olur. Buradan, $P_v \subseteq \mathcal{T}(B) \subseteq \mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(A)$ gerçeğinin yanı sıra $P_v \subseteq \mathcal{G}(A)$ olduğundan $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(A) \neq \emptyset$ olur ki, bu $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ nin regüler olması ile çelişir.

b) $\mathcal{G} \longrightarrow s$ olsun ve bir $A \in \mathcal{S}$ için, $P_s \nsubseteq [A]^v$ olacak şekilde bir $v \in \mathcal{F}(A)$ nin var olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $A \subseteq B$, $P_v \subseteq \mathcal{K}(B)$ ve $P_s \nsubseteq B$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ vardır. Önerme 5.7.'den, $\mathcal{G} \longrightarrow s$ ve $P_s \nsubseteq B$ olduğundan $\mathcal{K}(B) \subseteq \mathcal{G}(B)$ olur. Buradan, $P_v \subseteq \mathcal{K}(B) \subseteq \mathcal{G}(B) \subseteq \mathcal{G}(A)$ gerçeğinin yanı sıra $P_v \subseteq \mathcal{F}(A)$ olduğundan $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(A) \neq \emptyset$ olur ki, bu $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ nin regüler olması ile çelişir.

Tanım 5.11. $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, bir dereceli ditopolojik doku uzayı $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ üzerinde bir dereceli regüler disüzgeç ve $s \in S$ olsun. Bu durumda;

(1) Eğer "her $A \in \mathcal{S}$ için $v \in \mathcal{F}(A) \Longrightarrow P_s \subseteq [A]^v$" oluyorsa, s ye $\mathcal{F}$ nin bir *değme* *noktasıdır* denir.

(2) Eğer "her $A \in \mathcal{S}$ için $v \in \mathcal{G}(A) \implies]A[^{v} \subseteq Q_s$" oluyorsa, s ye $\mathcal{G}$ nin bir *değme noktasıdır* denir.

(3) Eğer $s, s' \in S$, $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ için, s noktası $\mathcal{F}$ nin ve s' noktası $\mathcal{G}$ nin bir değme noktası ise (s, s') nokta çiftine $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ nin bir *dideğme noktasıdır* denir.

Sonuç 5.12. Bir dereceli ditopolojik doku uzayı $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ üzerinde, diyakınsak her dereceli regüler disüzgecin bir dideğme noktası vardır.

Kanıt: $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $(S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}, V, \mathcal{V})$ üzerinde diyakınsak bir dereceli regüler disüzgeç olsun. $\mathcal{F} \longrightarrow s$, $\mathcal{G} \longrightarrow s'$ ve $P_{s'} \not\subseteq Q_s$ olacak şekilde $s, s' \in S$ vardır. Önerme 5.10. göz önüne alındığında s, $\mathcal{G}$ nin ve s' de $\mathcal{F}$ nin değme noktasıdır. Böylece, $P_{s'} \not\subseteq Q_s$ olduğundan (s', s), $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ nin bir dideğme noktasıdır.

Tanım 5.13. $\mathcal{F}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli süzgeç ve $\mathcal{G}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli kosüzgeç olsun. Eğer, her $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ için $\mathcal{F}(A_1 \cup A_2) \subseteq \mathcal{F}(A_1) \cup \mathcal{F}(A_2)$ oluyorsa $\mathcal{F}$ ye *asaldır* denir. Eğer, her $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ için $\mathcal{G}(A_1 \cap A_2) \subseteq \mathcal{G}(A_1) \cup \mathcal{G}(A_2)$ oluyorsa $\mathcal{G}$ ye *asaldır* denir.

Örnek 5.14. $S = \{1,2\}, \mathcal{S} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, S\}$, $V = \{a, b, c\}, \mathcal{V} = P(V)$ olsun. Bu durumda $(S, \mathcal{S})$ ve $(V, \mathcal{V})$ birer doku uzayıdır. $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ dönüşümleri,

$$\mathcal{F}(\emptyset) = \emptyset, \quad \mathcal{F}(\{1\}) = \{a\}, \quad \mathcal{F}(\{2\}) = \{b\}, \quad \mathcal{F}(S) = \{a, b\}$$

$$\mathcal{G}(\emptyset) = \{a, b\}, \quad \mathcal{G}(\{1\}) = \{b\}, \quad \mathcal{G}(\{2\}) = \{a\}, \quad \mathcal{G}(S) = \emptyset$$

biçiminde tanımlanırsa $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeç olur. Ayrıca $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ asaldır.

Dereceli disüzgeç yapısı, disüzgeç yapısından daha genel bir yapıdır. Dereceli disüzgeçlerin, disüzgeçlerin sağladığı özelliklere paralel özellikler sağlaması beklense de durum her zaman böyle değildir.

$F \times G$, bir $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir regüler disüzgeç ise,

(1) $F \times G$, bir maksimal regüler disüzgeçtir

(2) $F \cup G = \mathcal{S}$

(3) F bir asal $\mathcal{S}$-süzgeç ve $G = \mathcal{S} \setminus F$ dir.

(4) G bir asal $\mathcal{S}$-kosüzgeç ve $F = \mathcal{S} \setminus G$ dir.

ifadeleri birbirine denktir ancak aşağıdaki önerme ve örnekte belirtildiği üzere dereceli regüler disüzgeçler için (1) - (4) ifadelerinin genelleştirilmiş halleri daima birbirine denk değildir.

Örnek 5.15. $S = \{1,2\}, \mathcal{S} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, S\}$, $V = \{a, b, c\}$, $\mathcal{V} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, V\}$ olsun. Bu durumda $(S, \mathcal{S})$ ve $(V, \mathcal{V})$ birer sade doku uzayıdır. $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ dönüşümleri,

$$\mathcal{F}(\emptyset) = \emptyset, \qquad \mathcal{F}(\{1\}) = \{b\}, \qquad \mathcal{F}(\{2\}) = \{c\}, \qquad \mathcal{F}(S) = V$$

$$\mathcal{G}(\emptyset) = V, \qquad \mathcal{G}(\{1\}) = \{c\}, \qquad \mathcal{G}(\{2\}) = \{b\}, \qquad \mathcal{G}(S) = \emptyset$$

biçiminde tanımlanırsa $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeç olur. $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ ve $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeç ise;

1. $\mathcal{F}'(\{1\}) \supseteq \mathcal{F}(\{1\}) = \{b\}$ ve $\mathcal{G}'(\{1\}) \supseteq \mathcal{G}(\{1\}) = \{c\}$ dir. $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ regüler olduğundan $\mathcal{F}'(\{1\}) \cap \mathcal{G}'(\{1\}) = \emptyset$ olmalıdır. Bu ise ancak $\mathcal{F}'(\{1\}) = \{b\}$ ve $\mathcal{G}'(\{1\}) = \{c\}$ olması ile mümkündür.

2. $\mathcal{G}'(\{2\}) \supseteq \mathcal{G}(\{2\}) = \{b\}$ ve $\mathcal{F}'(\{2\}) \supseteq \mathcal{F}(\{2\}) = \{c\}$ dir. $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ regüler olduğundan $\mathcal{F}'(\{2\}) \cap \mathcal{G}'(\{2\}) = \emptyset$ olmalıdır. Bu ise ancak $\mathcal{F}'(\{2\}) = \{c\}$ ve $\mathcal{G}'(\{2\}) = \{b\}$ olması ile mümkündür.

Ayrıca dereceli disüzgeç tanımından, $\mathcal{F}'(\emptyset) = \emptyset$, $\mathcal{G}'(S) = \emptyset$ ve $\mathcal{F}'(S) \supseteq \mathcal{F}(S) = V$, $\mathcal{G}'(\emptyset) \supseteq \mathcal{G}(\emptyset) = V$ olduğundan $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ elde edilir. Dolayısıyla, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir maksimal $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeçtir. Ancak,

$$(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})(\{1\}) = \mathcal{F}(\{1\}) \cup \mathcal{G}(\{1\}) = \{b\} \cup \{c\} = \{b, c\} \neq V$$

olduğundan $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \neq V$ olur.

Önerme 5.16. $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeç ise,

(1) $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, bir maksimal $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeçtir

(2) $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = V$ ($\forall A \in \mathcal{S}$ için $(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})(A) = \mathcal{F}(A) \vee \mathcal{G}(A) = \mathcal{F}(A) \cup \mathcal{G}(A) = V$)

(3) $\mathcal{F}$ bir asal $(V, \mathcal{V})$-dereceli süzgeç ve $\mathcal{G} = V \backslash \mathcal{F}$ ($\forall A \in \mathcal{S}$ için $\mathcal{G}(A) = V \backslash \mathcal{F}(A)$) dir.

(4) $\mathcal{G}$ bir asal $(V, \mathcal{V})$-dereceli kosüzgeç ve $\mathcal{F} = V \backslash \mathcal{G}$ dir.

ifadeleri için aşağıdaki geçişler sağlanır:

$$(1) \Longleftarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4), \quad (1) \not\Rightarrow (2)$$

Kanıt:

$(1) \Longleftarrow (2)$: $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeci için, $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = V$ olsun. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ve $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = V$ olduğundan $\mathcal{G} = V \backslash \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F} = V \backslash \mathcal{G}$ dir. $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeç ve $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ ise, $\mathcal{F}' \cap \mathcal{G}' = \emptyset$ olduğundan her $A \in \mathcal{S}$ için;

$$\mathcal{F}(A) = V \backslash \mathcal{G}(A) \supseteq V \backslash \mathcal{G}'(A) \supseteq \mathcal{F}'(A) \supseteq \mathcal{F}(A)$$

$$\mathcal{G}(A) = V \backslash \mathcal{F}(A) \supseteq V \backslash \mathcal{F}'(A) \supseteq \mathcal{G}'(A) \supseteq \mathcal{G}(A)$$

olup $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ bulunur. Dolayısıyla $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, bir maksimal regüler disüzgeçtir.

$(2) \Leftrightarrow (3)$: $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ regüler olduğundan $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ dir. Bu nedenle $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = V$ ise $\mathcal{G} = V \backslash \mathcal{F}$ olur. $\mathcal{F}$ nin asal olmadığı varsayılsın. Bu durumda, $\mathcal{F}(A_1 \cup A_2) \nsubseteq \mathcal{F}(A_1) \cup \mathcal{F}(A_2)$ olacak biçimde $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ vardır. Böylece,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(A_1) \cap \mathcal{G}(A_2) = V \backslash \mathcal{F}(A_1) \cap V \backslash \mathcal{F}(A_2) = V \backslash \left(\mathcal{F}(A_1) \cup \mathcal{F}(A_2)\right) \nsubseteq V \backslash \mathcal{F}(A_1 \cup A_2) \\ = \mathcal{G}(A_1 \cup A_2)\end{aligned}$$

elde edilir ki bu, (GCF3) ile çelişir, dolayısıyla $\mathcal{F}$ asaldır.

Diğer taraftan, $\mathcal{G} = V \backslash \mathcal{F}$ ise $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = V$ elde edilir.

$(2) \Leftrightarrow (4)$: $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ regüler olduğundan $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ dir. Bu nedenle $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = V$ ise $\mathcal{F} = V \backslash \mathcal{G}$ olur. $\mathcal{G}$ nin asal olmadığı varsayılsın. Bu durumda, $\mathcal{G}(A_1 \cap A_2) \nsubseteq \mathcal{G}(A_1) \cup \mathcal{G}(A_2)$ olacak biçimde $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ vardır. Böylece,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A_1) \cap \mathcal{F}(A_2) = V \backslash \mathcal{G}(A_1) \cap V \backslash \mathcal{G}(A_2) = V \backslash \left(\mathcal{G}(A_1) \cup \mathcal{G}(A_2)\right) \nsubseteq V \backslash \mathcal{G}(A_1 \cap A_2) \\ = \mathcal{F}(A_1 \cap A_2)\end{aligned}$$

elde edilir ki bu, (GF3) ile çelişir, dolayısıyla $\mathcal{G}$ asaldır.

Diğer taraftan, $\mathcal{F} = V \backslash \mathcal{G}$ ise $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = V$ elde edilir.

$(1) \nRightarrow (2)$: Örnek 5.15.

$(V, \mathcal{V})$ bir ayrık doku ise, $A \in \mathcal{V}$ olmak üzere her $v \in V$ için $P_v \nsubseteq A \Longrightarrow P_v \cap A = \emptyset$ dir. Bu özellik, sıradaki önermede belirtildiği gibi sadece ayrık dokularda geçerlidir.

Önerme 5.17. $(V, \mathcal{V})$ bir doku uzayı olsun. $(V, \mathcal{V})$ nin bir ayrık doku olması için gerek ve yeter şart her $v \in V$, $A \in \mathcal{V}$ için $P_v \nsubseteq A \Longrightarrow P_v \cap A = \emptyset$ olmasıdır.

Kanıt: Her $v \in V$, $A \in \mathcal{V}$ için $P_v \nsubseteq A \Longrightarrow P_v \cap A = \emptyset$ olsun ancak $(V, \mathcal{V})$ nin ayrık olmadığı varsayılsın. Bu durumda, $P_v \neq \{v\}$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Buradan da, $t \neq v$, $t \in P_v$ olacak şekilde bir $t \in V$ vardır. Yani $\{v, t\} \subseteq P_v$ dir. Fakat $v \in P_t$ olamaz. Aksi halde $\{v, t\} \subseteq P_t$ olur ki, bu $\{v, t\} \subseteq P_v$ olduğu da göz önüne alındığında, dokularda farklı noktaların ayrılabilirliği ile çelişir. Yani $P_v \nsubseteq P_t$ dir. Buna rağmen, $\{v\} \subseteq P_v \cap P_t \neq \emptyset$ olup bu durumda, $A = P_t$ alınırsa hipotez ile çelişilir. Dolayısıyla, her $v \in V$, $A \in \mathcal{V}$ için $P_v \nsubseteq A \Longrightarrow P_v \cap A = \emptyset$ ise, $(V, \mathcal{V})$ dokusu ayrıktır.

Kanıtın diğer yönü açıktır.

Teorem 5.18. $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeç ve $(V, \mathcal{V})$ bir ayrık doku ise, Önerme 5.16.'daki $(1) - (4)$ ifadeleri birbirine denktir.

Kanıt: $(1) \Longrightarrow (2)$ olduğunun görülmesi yeterlidir. $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, bir maksimal regüler $(V, \mathcal{V})$-dereceli disüzgeç olsun. $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} \neq V$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\mathcal{F}(A_0) \cup \mathcal{G}(A_0) \neq V$ olacak şekilde bir $A_0 \in \mathcal{S}$ vardır ve böylece $P_v \nsubseteq \mathcal{F}(A_0) \cup \mathcal{G}(A_0)$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır.

İki durum söz konusudur: $\forall A, B \in \mathcal{S},\ P_v \nsubseteq \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(B)$ ya da $\exists A, B \in \mathcal{S}$: $P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(B)$.

1. Durum: $\forall A, B \in \mathcal{S}$, $P_v \nsubseteq \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(B)$ olsun. Bu durumda, özel olarak $A = S$ ve $B = \emptyset$ alınırsa $P_v \nsubseteq \mathcal{F}(S) \cap \mathcal{G}(\emptyset)$ dir. Böylece, $P_v \nsubseteq \mathcal{F}(S)$ veya $P_v \nsubseteq \mathcal{G}(\emptyset)$ biçiminde iki durum söz konusudur:

1.1. Durum: $P_v \nsubseteq \mathcal{F}(S)$ olsun. Bu durumda, (GF2)'den her $A \in \mathcal{S}$ için $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(S)$ olduğundan, $P_v \nsubseteq \mathcal{F}(A)$ dır.

$\mathcal{F}^* : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ dönüşümü,

$$\mathcal{F}^*(B) = \begin{cases} \emptyset, & B = \emptyset \\ \mathcal{F}(B), & A_0 \nsubseteq B \\ P_v \cup \mathcal{F}(B), & A_0 \subseteq B \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa $(\mathcal{F}^*, \mathcal{G})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeç olur. Gerçekten:

(GF1) $\mathcal{F}^*(\emptyset) = \emptyset$

(GF2) $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ ve $B_1 \subseteq B_2$ olsun. $B_1 = \emptyset$ ise $\mathcal{F}^*(B_1) = \emptyset \subseteq \mathcal{F}^*(B_2)$ olur. $B_1 \neq \emptyset$ ise $B_2 \neq \emptyset$ olup;

a) $A_0 \subseteq B_1$ ise $A_0 \subseteq B_2$ ve $\mathcal{F}^*(B_1) = P_v \cup \mathcal{F}(B_1) \subseteq P_v \cup \mathcal{F}(B_2) = \mathcal{F}^*(B_2)$ olur.

b) $A_0 \nsubseteq B_1$ ise $\mathcal{F}^*(B_1) = \mathcal{F}(B_1) \subseteq \mathcal{F}(B_2) \subseteq \mathcal{F}^*(B_2)$ olur.

(GF3) $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ olsun. $B_1 = \emptyset$ veya $B_2 = \emptyset$ ise $\mathcal{F}^*(B_1) \wedge \mathcal{F}^*(B_2) = \emptyset \subseteq \mathcal{F}^*(B_1 \cap B_2)$ olur. $B_1, B_2 \neq \emptyset$ ise;

a) $A_0 \nsubseteq B_1, B_2$ ise, $\mathcal{F}^*(B_1) \wedge \mathcal{F}^*(B_2) = \mathcal{F}(B_1) \cap \mathcal{F}(B_2) \subseteq \mathcal{F}(B_1 \cap B_2) = \mathcal{F}^*(B_1 \cap B_2)$ olur.

b) $A_0 \subseteq B_1, B_2$ ise, $A_0 \subseteq B_1 \cap B_2$ olup $\mathcal{F}^*(B_1) \wedge \mathcal{F}^*(B_2) = \big(P_v \cup \mathcal{F}(B_1)\big) \cap \big(P_v \cup \mathcal{F}(B_2)\big) = P_v \cup \big(\mathcal{F}(B_1) \cap \mathcal{F}(B_2)\big) \subseteq P_v \cup \mathcal{F}(B_1 \cap B_2) = \mathcal{F}^*(B_1 \cap B_2)$ bulunur.

c) Genelliği bozmadan, $A_0 \nsubseteq B_1$ ve $A_0 \subseteq B_2$ olsun. Bu durumda, $A_0 \nsubseteq B_1 \cap B_2$ dir, ayrıca her $A \in \mathcal{S}$ için $P_v \nsubseteq \mathcal{F}(A)$ olduğu ve $\mathcal{V}$ nin ayrık olduğu göz önüne alınırsa $\mathcal{F}(B_1) \cap P_v = \emptyset$ olup

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^*(B_1) \wedge \mathcal{F}^*(B_2) &= \mathcal{F}(B_1) \cap \big(P_v \cup \mathcal{F}(B_2)\big) = (\mathcal{F}(B_1) \cap P_v) \cup \big(\mathcal{F}(B_1) \cap \mathcal{F}(B_2)\big) \\ &= \mathcal{F}(B_1) \cap \mathcal{F}(B_2) \subseteq \mathcal{F}(B_1 \cap B_2) = \mathcal{F}^*(B_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

bulunur.

Dolayısıyla $\mathcal{F}^*$ bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli süzgeçtir. Ayrıca, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ nin regüler olduğu göz önüne alındığında, $B \in \mathcal{S}$ olmak üzere;

$A_0 \subseteq B$ ise; $\mathcal{G}(B) \subseteq \mathcal{G}(A_0)$, $P_v \nsubseteq \mathcal{G}(A_0)$ ve $(V, \mathcal{V})$ ayrık olduğundan $P_v \cap\ \mathcal{G}(B) = \emptyset$ olup

$$\mathcal{F}^*(B) \cap \mathcal{G}(B) = \big(P_v \cup \mathcal{F}(B)\big) \cap \mathcal{G}(B) = \big(P_v \cap \mathcal{G}(B)\big) \cup \big(\mathcal{F}(B) \cap \mathcal{G}(B)\big) = \emptyset$$

$A_0 \nsubseteq B$ ise;

$$\mathcal{F}^*(B) \cap \mathcal{G}(B) = \mathcal{F}(B) \cap \mathcal{G}(B) = \emptyset$$

elde edilir.

Böylece, $(\mathcal{F}^*, \mathcal{G})$ bir regüler $(V, \mathcal{V})$-dereceli disüzgeçtir. Ancak, $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subsetneq (\mathcal{F}^*, \mathcal{G})$ olması (en azından $\mathcal{F}^*(A_0) = P_v \cup \mathcal{F}(A_0) \neq \mathcal{F}(A_0)$ dır) $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ nin maksimalliği ile çelişir. O halde, (1) $\Longrightarrow$ (2) sağlanır.

<u>1.2. Durum:</u> $P_v \nsubseteq \mathcal{G}(\emptyset)$ olsun. Bu durumda, (GCF2)'den her $A \in \mathcal{S}$ için $\mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(\emptyset)$ olduğundan, $P_v \nsubseteq \mathcal{G}(A)$ dır.

$\mathcal{G}^* : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ dönüşümü,

$$\mathcal{G}^*(B) = \begin{cases} \emptyset, & B = S \\ \mathcal{G}(B), & B \nsubseteq A_0 \\ P_v \cup \mathcal{G}(B), & B \subseteq A_0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa $(\mathcal{F}, \mathcal{G}^*)$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeç olur. Gerçekten:

(GCF1) $\mathcal{G}^*(S) = \emptyset$

(GCF2) $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ ve $B_1 \subseteq B_2$ olsun. $B_2 = S$ ise $\mathcal{G}^*(B_2) = \emptyset \subseteq \mathcal{G}^*(B_1)$ olur. $B_2 \neq S$ ise $B_1 \neq S$ olup;

a) $B_2 \subseteq A_0$ ise $B_1 \subseteq A_0$ ve $\mathcal{G}^*(B_2) = P_v \cup \mathcal{G}(B_2) \subseteq P_v \cup \mathcal{G}(B_1) = \mathcal{G}^*(B_1)$ olur.

b) $B_2 \nsubseteq A_0$ ise $\mathcal{G}^*(B_2) = \mathcal{G}(B_2) \subseteq \mathcal{G}(B_1) \subseteq \mathcal{G}^*(B_1)$ olur.

(GCF3) $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ olsun. $B_1 = S$ veya $B_2 = S$ ise $\mathcal{G}^*(B_1) \wedge \mathcal{G}^*(B_2) = \emptyset \subseteq \mathcal{G}^*(B_1 \cup B_2)$ olur. $B_1, B_2 \neq S$ ise;

a) $B_1, B_2 \nsubseteq A_0$ ise, $\mathcal{G}^*(B_1) \wedge \mathcal{G}^*(B_2) = \mathcal{G}(B_1) \cap \mathcal{G}(B_2) \subseteq \mathcal{G}(B_1 \cup B_2) = \mathcal{G}^*(B_1 \cup B_2)$ olur.

b) $B_1, B_2 \subseteq A_0$ ise, $B_1 \cup B_2 \subseteq A_0$ olup $\mathcal{G}^*(B_1) \wedge \mathcal{G}^*(B_2) = \big(P_v \cup \mathcal{G}(B_1)\big) \cap \big(P_v \cup \mathcal{G}(B_2)\big) = P_v \cup \big(\mathcal{G}(B_1) \cap \mathcal{G}(B_2)\big) \subseteq P_v \cup \mathcal{G}(B_1 \cup B_2) = \mathcal{G}^*(B_1 \cup B_2)$ bulunur.

c) Genelliği bozmadan, $B_1 \nsubseteq A_0$ ve $B_2 \subseteq A_0$ olsun. Bu durumda, $B_1 \cup B_2 \nsubseteq A_0$ dir, ayrıca her $A \in \mathcal{S}$ için $P_v \nsubseteq \mathcal{G}(A)$ olduğu ve $\mathcal{V}$ nin ayrık olduğu göz önüne alınırsa $\mathcal{G}(B_1) \cap P_v = \emptyset$ olup

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^*(B_1) \wedge \mathcal{G}^*(B_2) &= \mathcal{G}(B_1) \cap \big(P_v \cup \mathcal{G}(B_2)\big) = (\mathcal{G}(B_1) \cap P_v) \cup \big(\mathcal{G}(B_1) \cap \mathcal{G}(B_2)\big) \\ &= \mathcal{G}(B_1) \cap \mathcal{G}(B_2) \subseteq \mathcal{G}(B_1 \cup B_2) = \mathcal{G}^*(B_1 \cup B_2) \end{aligned}$$

bulunur.

Dolayısıyla $\mathcal{G}^*$ bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli kosüzgeçtir. Ayrıca, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ nin regüler olduğu göz önüne alındığında, $B \in \mathcal{S}$ olmak üzere;

$B \subseteq A_0$ ise; $\mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(A_0)$, $P_v \nsubseteq \mathcal{F}(A_0)$ ve $(V, \mathcal{V})$ ayrık olduğundan $P_v \cap \mathcal{F}(B) = \emptyset$ olup

$$\mathcal{F}(B) \cap \mathcal{G}^*(B) = \mathcal{F}(B) \cap \big(P_v \cup \mathcal{G}(B)\big) = (\mathcal{F}(B) \cap P_v) \cup \big(\mathcal{F}(B) \cap \mathcal{G}(B)\big) = \emptyset$$

$B \nsubseteq A_0$ ise;

$$\mathcal{F}(B) \cap \mathcal{G}^*(B) = \mathcal{F}(B) \cap \mathcal{G}(B) = \emptyset$$

elde edilir.

Böylece, $(\mathcal{F}, \mathcal{G}^*)$ bir regüler $(V, \mathcal{V})$-dereceli disüzgeçtir. Ancak, $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subsetneq (\mathcal{F}, \mathcal{G}^*)$ olması (en azından $\mathcal{G}^*(A_0) = P_v \cup \mathcal{G}(A_0) \neq \mathcal{G}(A_0)$ dır) $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ nin maksimalliği ile çelişir. O halde, $(1) \Longrightarrow (2)$ sağlanır.

<u>2. Durum:</u> "$\exists C, D \in \mathcal{S}$: $P_v \subseteq \mathcal{F}(C) \cap \mathcal{G}(D)$" olsun. Bu durumda $A_0 = S$ veya $A_0 = \emptyset$ olamaz. Çünkü $A_0 = S$ olsaydı, $C \subseteq A_0$ olduğundan $\mathcal{F}(C) \subseteq \mathcal{F}(A_0)$ olup $P_v \subseteq \mathcal{F}(C) \subseteq \mathcal{F}(A_0)$ bulunurdu ki bu $P_v \nsubseteq \mathcal{F}(A_0)$ olmasıyla çelişir. Benzer şekilde $A_0 = \emptyset$ olsaydı, $A_0 \subseteq D$ olduğundan $\mathcal{G}(D) \subseteq \mathcal{G}(A_0)$ olup $P_v \subseteq \mathcal{G}(D) \subseteq \mathcal{G}(A_0)$ bulunurdu ki bu $P_v \nsubseteq \mathcal{G}(A_0)$ olmasıyla çelişir.

Her $A, B \in \mathcal{S}$ için; "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A_0 \cap A \nsubseteq B$" veya "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A \nsubseteq A_0 \cup B$" sağlanır. Gerçekten; aksine, "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A_1) \cap \mathcal{G}(B_1)$ ve $A_0 \cap A_1 \subseteq B_1$" ve "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A_2) \cap \mathcal{G}(B_2)$ ve $A_2 \subseteq A_0 \cup B_2$" olacak şekilde $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathcal{S}$ kümelerinin varlıkları kabul edilirse, $P_v \subseteq \mathcal{F}(A_1) \cap \mathcal{F}(A_2) \subseteq \mathcal{F}(A_1 \cap A_2)$ ve $P_v \subseteq \mathcal{G}(B_1) \cap \mathcal{G}(B_2) \subseteq \mathcal{G}(B_1 \cup B_2)$ olup $\mathcal{F}(A_1 \cap A_2) \cap \mathcal{G}(B_1 \cup B_2) \neq \emptyset$ bulunur. $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ regüler olduğundan Önerme 5.2. (3)'ten $A_1 \cap A_2 \nsubseteq B_1 \cup B_2$ olur. Böylece, $s \notin B_1 \cup B_2$ olacak şekilde bir $s \in A_1 \cap A_2$ vardır. $s \in A_2$ ve $s \notin B_2$ ve $A_2 \subseteq A_0 \cup B_2$ olduğundan $s \in A_0$ bulunur. Buradan, $s \in A_0$, $s \in A_1$ ve $A_0 \cap A_1 \subseteq B_1$ olduğundan $s \in B_1$ bulunur ki bu, $s \notin B_1 \cup B_2$ olması ile çelişir.

Dolayısıyla, iki durum söz konusudur:

<u>2.1. Durum:</u> Her $A, B \in \mathcal{S}$ için, "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A_0 \cap A \nsubseteq B$" olsun.

$\mathcal{F}' : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ dönüşümü,

$$\mathcal{F}'(B) = \begin{cases} \emptyset, \ B = \emptyset \\ P_v \cup \mathcal{F}(B), \ B \neq \emptyset \ ve \ "\exists A \in \mathcal{S} : \ P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \ ve \ A_0 \cap A \subseteq B" \\ \mathcal{F}(B), \ B \neq \emptyset \ ve \ "P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \Longrightarrow A_0 \cap A \nsubseteq B" \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa $(\mathcal{F}', \mathcal{G})$ bir regüler $(V, \mathcal{V})$-dereceli disüzgeç olur. Gerçekten:

(GF1) $\mathcal{F}'(\emptyset) = \emptyset$

(GF2) $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ ve $B_1 \subseteq B_2$ olsun. $B_1 = \emptyset$ ise $\mathcal{F}'(B_1) = \emptyset \subseteq \mathcal{F}'(B_2)$ olur. $B_1 \neq \emptyset$ ise;

a) $\exists A \in \mathcal{S} : P_v \subseteq \mathcal{F}(A)\ ve\ A_0 \cap A \subseteq B_1$ olsun. Bu durumda $A_0 \cap A \subseteq B_1 \subseteq B_2$ olacağından, $\mathcal{F}'(B_1) = P_v \cup \mathcal{F}(B_1) \subseteq P_v \cup \mathcal{F}(B_2) = \mathcal{F}'(B_2)$ olur.

b) $P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \Longrightarrow A_0 \cap A \nsubseteq B_1$ olsun. Bu durumda,

$\mathcal{F}'(B_1) = \mathcal{F}(B_1) \subseteq \mathcal{F}(B_2) \subseteq \mathcal{F}'(B_2)$ olur.

(GF3) $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ olsun. $B_1 = \emptyset$ veya $B_2 = \emptyset$ ise $\mathcal{F}'(B_1) \wedge \mathcal{F}'(B_2) = \emptyset \subseteq \mathcal{F}'(B_1 \cap B_2)$ olur. $B_1, B_2 \neq \emptyset$ ise;

a) "$\exists A_1 \in \mathcal{S} : P_v \subseteq \mathcal{F}(A_1)\ ve\ A_0 \cap A_1 \subseteq B_1$" ve "$\exists A_2 \in \mathcal{S} : P_v \subseteq \mathcal{F}(A_2)\ ve\ A_0 \cap A_2 \subseteq B_2$" olsun. Bu durumda, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{S}$, $A_0 \cap (A_1 \cap A_2) \subseteq B_1 \cap B_2$ olup

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(B_1) \wedge \mathcal{F}'(B_2) &= \big(P_v \cup \mathcal{F}(B_1)\big) \cap \big(P_v \cup \mathcal{F}(B_2)\big) = P_v \cup \big(\mathcal{F}(B_1) \cap \mathcal{F}(B_2)\big)\\ &\subseteq P_v \cup \mathcal{F}(B_1 \cap B_2) = \mathcal{F}'(B_1 \cap B_2)\end{aligned}$$

bulunur.

b) "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \Longrightarrow A_0 \cap A \nsubseteq B_1$" ve "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \Longrightarrow A_0 \cap A \nsubseteq B_2$" olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{F}'(B_1) \wedge \mathcal{F}'(B_2) = \mathcal{F}(B_1) \cap \mathcal{F}(B_2) \subseteq \mathcal{F}(B_1 \cap B_2) \subseteq \mathcal{F}'(B_1 \cap B_2)$$

bulunur.

c) Genelliği bozmadan, "$\exists A_1 \in \mathcal{S} : P_v \subseteq \mathcal{F}(A_1)\ ve\ A_0 \cap A_1 \subseteq B_1$" ve "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \Longrightarrow A_0 \cap A \nsubseteq B_2$" olsun. Bu durumda, $P_v \subseteq \mathcal{F}(B_2)$ olsa $A_0 \cap B_2 \nsubseteq B_2$ çelişkisi elde edileceğinden $P_v \nsubseteq \mathcal{F}(B_2)$ dır. Buradan, $(V, \mathcal{V})$ ayrık olduğundan $P_v \cap \mathcal{F}(B_2) = \emptyset$ olur. Ayrıca, "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \Longrightarrow A_0 \cap A \nsubseteq B_2$" olduğundan $P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \Longrightarrow A_0 \cap A \nsubseteq B_1 \cap B_2$ olup $\mathcal{F}'(B_1 \cap B_2) = \mathcal{F}(B_1 \cap B_2)$ dir. Böylece;

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(B_1) \wedge \mathcal{F}'(B_2) &= \big(P_v \cup \mathcal{F}(B_1)\big) \cap \mathcal{F}(B_2) = \big(P_v \cap \mathcal{F}(B_2)\big) \cup \big(\mathcal{F}(B_1) \cap \mathcal{F}(B_2)\big)\\ &= \mathcal{F}(B_1) \cap \mathcal{F}(B_2) \subseteq \mathcal{F}(B_1 \cap B_2) = \mathcal{F}'(B_1 \cap B_2)\end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\mathcal{F}'$ bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli süzgeçtir. Ayrıca, $B \in \mathcal{S}$ olmak üzere, $B = \emptyset$ ise, $\mathcal{F}'(B) \cap \mathcal{G}(B) = \emptyset$ dir. $B \neq \emptyset$ ise;

a) "$\exists A \in \mathcal{S} : P_v \subseteq \mathcal{F}(A)\ ve\ A_0 \cap A \subseteq B$" ise, 2.1. Durum'daki "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A_0 \cap A \nsubseteq B$" kabulümüz gereği $P_v \nsubseteq \mathcal{G}(B)$ elde edilir. Buradan, $(V, \mathcal{V})$ ayrık olduğundan $P_v \cap \mathcal{G}(B) = \emptyset$ olur. Böylece, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ regüler olduğundan,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(B) \cap \mathcal{G}(B) &= \big(P_v \cup \mathcal{F}(B)\big) \cap \mathcal{G}(B) = \big(P_v \cap \mathcal{G}(B)\big) \cup \big(\mathcal{F}(B) \cap \mathcal{G}(B)\big) = \mathcal{F}(B) \cap \mathcal{G}(B)\\ &= \emptyset\end{aligned}$$

elde edilir.

b) "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \Longrightarrow A_0 \cap A \nsubseteq B$" ise, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ regüler olduğundan, $\mathcal{F}'(B) \cap \mathcal{G}(B) = \mathcal{F}(B) \cap \mathcal{G}(B) = \emptyset$ elde edilir.

Böylece, $(\mathcal{F}',\mathcal{G})$ bir regüler $(V,\mathcal{V})$-dereceli disüzgeçtir. Ancak, $P_v \subseteq \mathcal{F}(C)$ ve $A_0 \cap C \subseteq A_0$ olduğundan, $\mathcal{F}'(A_0) = P_v \cup \mathcal{F}(A_0)$ ve $P_v \nsubseteq \mathcal{F}(A_0)$ olduğundan $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}$ dır. $(\mathcal{F},\mathcal{G}) \subsetneq (\mathcal{F}',\mathcal{G})$ olması $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ nin maksimalliği ile çelişir. O halde, (1) $\Longrightarrow$ (2) sağlanır.

<u>2.2. Durum:</u> Her $A,B \in \mathcal{S}$ için, "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A \nsubseteq A_0 \cup B$" olsun.

$\mathcal{G}' : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$ dönüşümü,

$$\mathcal{G}'(A) = \begin{cases} \emptyset, \; A = S \\ P_v \cup \mathcal{G}(A), \; A \neq S \; ve \; "\exists B \in \mathcal{S} : \; P_v \subseteq \mathcal{G}(B) \; ve \; A \subseteq A_0 \cup B" \\ \mathcal{G}(A), \; A \neq S \; ve \; "P_v \subseteq \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A \nsubseteq A_0 \cup B" \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa $(\mathcal{F},\mathcal{G}')$ bir regüler $(V,\mathcal{V})$-dereceli disüzgeç olur. Gerçekten:

(GCF1) $\mathcal{G}'(S) = \emptyset$

(GCF2) $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ ve $A_1 \subseteq A_2$ olsun. $A_2 = S$ ise $\mathcal{G}'(A_2) = \emptyset \subseteq \mathcal{G}'(A_1)$ olur. $A_2 \neq S$ ise;

a) "$\exists B \in \mathcal{S} : \; P_v \subseteq \mathcal{G}(B) \; ve \; A_2 \subseteq A_0 \cup B$" olsun. Bu durumda $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_0 \cup B$ olacağından, $\mathcal{G}'(A_2) = P_v \cup \mathcal{G}(A_2) \subseteq P_v \cup \mathcal{G}(A_1) = \mathcal{G}'(A_1)$ olur.

b) "$P_v \subseteq \mathcal{G}(B) \Longrightarrow \; A_2 \nsubseteq A_0 \cup B$" olsun. Bu durumda,

$\mathcal{G}'(A_2) = \mathcal{G}(A_2) \subseteq \mathcal{G}(A_1) \subseteq \mathcal{G}'(A_1)$ olur.

(GCF3) $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ olsun. $A_1 = S$ veya $A_2 = S$ ise $\mathcal{G}'(A_1) \wedge \mathcal{G}'(A_2) = \emptyset \subseteq \mathcal{G}'(A_1 \cup A_2)$ olur. $A_1, A_2 \neq S$ ise;

a) "$\exists B_1 \in \mathcal{S} : \; P_v \subseteq \mathcal{G}(B_1) \; ve \; A_1 \subseteq A_0 \cup B_1$" ve "$\exists B_2 \in \mathcal{S} : \; P_v \subseteq \mathcal{G}(B_2) \; ve \; A_2 \subseteq A_0 \cup B_2$" olsun. Bu durumda, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{S}, P_v \subseteq \mathcal{G}(B_1) \cap \mathcal{G}(B_2) \subseteq \mathcal{G}(B_1 \cup B_2)$ ve $A_1 \cup A_2 \subseteq (A_0 \cup B_1) \cup (A_0 \cup B_2) = A_0 \cup (B_1 \cup B_2)$ olup

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'(A_1) \wedge \mathcal{G}'(A_2) &= \big(P_v \cup \mathcal{G}(A_1)\big) \cap \big(P_v \cup \mathcal{G}(A_2)\big) = P_v \cup \big(\mathcal{G}(A_1) \cap \mathcal{G}(A_2)\big) \\ &\subseteq P_v \cup \mathcal{G}(A_1 \cup A_2) = \mathcal{G}'(A_1 \cup A_2) \end{aligned}$$

bulunur.

b) "$P_v \subseteq \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A_1 \nsubseteq A_0 \cup B$" ve "$P_v \subseteq \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A_2 \nsubseteq A_0 \cup B$" olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{G}'(A_1) \wedge \mathcal{G}'(A_2) = \mathcal{G}(A_1) \cap \mathcal{G}(A_2) \subseteq \mathcal{G}(A_1 \cup A_2) \subseteq \mathcal{G}'(A_1 \cup A_2)$$

bulunur.

c) Genelliği bozmadan, "$\exists B_1 \in \mathcal{S} : \; P_v \subseteq \mathcal{G}(B_1) \; ve \; A_1 \subseteq A_0 \cup B_1$" ve "$P_v \subseteq \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A_2 \nsubseteq A_0 \cup B$" olsun. Bu durumda, $P_v \subseteq \mathcal{G}(A_2)$ olsa $A_2 \nsubseteq A_0 \cup A_2$ çelişkisi elde edileceğinden $P_v \nsubseteq \mathcal{G}(A_2)$ dır. Buradan, $(V,\mathcal{V})$ ayrık olduğundan $P_v \cap \mathcal{G}(A_2) = \emptyset$ olur. Ayrıca, "$P_v \subseteq \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A_2 \nsubseteq A_0 \cup B$" olduğundan $P_v \subseteq \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A_1 \cup A_2 \nsubseteq A_0 \cup B$ olup $\mathcal{G}'(A_1 \cup A_2) = \mathcal{G}(A_1 \cup A_2)$ dir. Böylece;

$$\mathcal{G}'(A_1) \wedge \mathcal{G}'(A_2) = \big(P_v \cup \mathcal{G}(A_1)\big) \cap \mathcal{G}(A_2) = \big(P_v \cap \mathcal{G}(A_2)\big) \cup \big(\mathcal{G}(A_1) \cap \mathcal{G}(A_2)\big)$$
$$= \mathcal{G}(A_1) \cap \mathcal{G}(A_2) \subseteq \mathcal{G}(A_1 \cup A_2) = \mathcal{G}'(A_1 \cup A_2)$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\mathcal{G}'$ bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli süzgeçtir. Ayrıca, $A \in \mathcal{S}$ olmak üzere, $A = S$ ise, $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}'(A) = \emptyset$ dir. $A \neq S$ ise;

a) "$\exists B \in \mathcal{S} : P_v \subseteq \mathcal{G}(B)\ ve\ A \subseteq A_0 \cup B$" ise, 2.2. Durum'daki "$P_v \subseteq \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A \nsubseteq A_0 \cup B$" kabulümüz gereği $P_v \nsubseteq \mathcal{F}(A)$ elde edilir. Buradan, $(V, \mathcal{V})$ ayrık olduğundan $\mathcal{F}(A) \cap P_v = \emptyset$ olur. Böylece, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ regüler olduğundan,

$$\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}'(A) = \mathcal{F}(A) \cap \big(P_v \cup \mathcal{G}(A)\big) = (\mathcal{F}(A) \cap P_v) \cup \big(\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(A)\big) = \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(A)$$
$$= \emptyset$$

elde edilir.

b) "$P_v \subseteq \mathcal{G}(B) \Longrightarrow A \nsubseteq A_0 \cup B$" ise, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ regüler olduğundan, $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}'(A) = \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{G}(A) = \emptyset$ elde edilir.

Böylece, $(\mathcal{F}, \mathcal{G}')$ bir regüler $(V, \mathcal{V})$-dereceli disüzgeçtir. Ancak, $P_v \subseteq \mathcal{G}(D)$ ve $A_0 \subseteq A_0 \cup D$ olduğundan, $\mathcal{G}'(A_0) = P_v \cup \mathcal{G}(A_0)$ ve $P_v \nsubseteq \mathcal{G}(A_0)$ olduğundan $\mathcal{G}' \neq \mathcal{G}$ dır. $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subsetneq (\mathcal{F}, \mathcal{G}')$ olması $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ nin maksimalliği ile çelişir. O halde, (1) $\Longrightarrow$ (2) sağlanır. Böylece kanıt tamamlanır.

Sonuç 5.19. $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir maksimal $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeç ve $(V, \mathcal{V})$ bir ayrık doku ise, $\mathcal{F}(S) = \mathcal{G}(\emptyset) = V$ dir.

Kanıt: Aksine, $\mathcal{F}(S) \neq V$ veya $\mathcal{G}(\emptyset) \neq V$ olsaydı $\mathcal{F}(S) \cup \mathcal{G}(S) \neq V$ veya $\mathcal{F}(\emptyset) \cup \mathcal{G}(\emptyset) \neq V$ olurdu ki bu Teorem 5.18.'de (1) $\Leftrightarrow$ (2) olması ile çelişir.

Özçağ ve ark. (2005) tarafından belirtildiği gibi; bir $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir F asal süzgeci için $G = \mathcal{S} \backslash F$ de bir asal kosüzgeç olup $(F \times G)$, aynı doku üzerinde bir maksimal regüler disüzgeçtir. Ancak, dereceli yapıda durum böyle değildir. Örnek 5.14.'te, $\mathcal{F}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir asal $(V, \mathcal{V})$-dereceli süzgeç ve $(V, \mathcal{V})$ ayrık olmasına karşın $\mathcal{F}(S) \neq V$ olduğundan $V \backslash \mathcal{F}$ bir $(V, \mathcal{V})$-dereceli kosüzgeç olmayacağı gibi, Sonuç 5.19. gereği $(S, \mathcal{S})$ üzerinde birinci bileşeni $\mathcal{F}$ olan bir maksimal $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeç yoktur.

Önerme 5.20. $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde regüler $(V, \mathcal{V})$-dereceli disüzgeç olsun. Bu durumda, $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{F}^M, \mathcal{G}^M)$ olacak şekilde $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $(\mathcal{F}^M, \mathcal{G}^M)$ maksimal $(V, \mathcal{V})$-dereceli regüler disüzgeç vardır.

Kanıt: $(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j)_{j \in J}$, her $j \in J$ için $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j)$ koşulunu sağlayan (yani her $j \in J$ için $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_j$ ve $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_j$ olan), regüler $(V, \mathcal{V})$-dereceli disüzgeçlerin bir zinciri olsun.

$\mathcal{F}', \mathcal{G}' : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}$, $\mathcal{F}' = \bigvee_{j\in J} \mathcal{F}_j$ ve $\mathcal{G}' = \bigvee_{j\in J} \mathcal{G}_j$ biçiminde tanımlanırsa $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde regüler $(V, \mathcal{V})$-dereceli disüzgeç olur. Gerçekten;

(GF1) $\mathcal{F}'(\emptyset) = \bigvee_{j\in J} \mathcal{F}_j(\emptyset) = \emptyset$

(GF2) $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ ve $A_1 \subseteq A_2$ olsun. Buradan, her $j \in J$ için $\mathcal{F}_j(A_1) \subseteq \mathcal{F}_j(A_2)$ olduğundan, $\mathcal{F}'(A_1) = \bigvee_{j\in J} \mathcal{F}_j(A_1) \subseteq \bigvee_{j\in J} \mathcal{F}_j(A_2) = \mathcal{F}'(A_2)$ bulunur.

(GF3) $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ olsun. Her $i \in J$ için $J_{i_1} = \left\{\{j \in J \mid (\mathcal{F}_i, \mathcal{G}_i) \subseteq \left(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j\right)\right\}$ ve $J_{i_2} = \left\{\{j \in J \mid (\mathcal{F}_i, \mathcal{G}_i) \supsetneq \left(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j\right)\right\}$ kümeleri oluşturulursa, $\left(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j\right)_{j\in J}$ bir zincir olduğundan $J_{i_1} \cup J_{i_2} = J$ olup

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(A_1) \wedge \mathcal{F}'(A_2) &= \bigvee_{i\in J} \mathcal{F}_i(A_1) \wedge \bigvee_{j\in J} \mathcal{F}_j(A_2) = \bigvee_{i\in J} \left(\mathcal{F}_i(A_1) \wedge \bigvee_{j\in J} \mathcal{F}_j(A_2) \right) \\
&= \bigvee_{i\in J} \left(\bigvee_{j\in J} \left(\mathcal{F}_i(A_1) \wedge \mathcal{F}_j(A_2) \right) \right) \\
&= \bigvee_{i\in J} \left(\bigvee_{j\in J_{i_1}} \left(\mathcal{F}_i(A_1) \wedge \mathcal{F}_j(A_2) \right) \vee \bigvee_{j\in J_{i_2}} \left(\mathcal{F}_i(A_1) \wedge \mathcal{F}_j(A_2) \right) \right) \\
&\subseteq \bigvee_{i\in J} \left(\bigvee_{j\in J_{i_1}} \left(\mathcal{F}_j(A_1) \wedge \mathcal{F}_j(A_2) \right) \vee \bigvee_{j\in J_{i_2}} \left(\mathcal{F}_i(A_1) \wedge \mathcal{F}_i(A_2) \right) \right) \\
&\subseteq \bigvee_{i\in J} \left(\bigvee_{j\in J_{i_1}} \mathcal{F}_j(A_1 \cap A_2) \vee \bigvee_{j\in J_{i_2}} \mathcal{F}_i(A_1 \cap A_2) \right) \subseteq \bigvee_{i\in J} \mathcal{F}_i(A_1 \cap A_2) \\
&= \mathcal{F}'(A_1 \cap A_2)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

(GCF1) $\mathcal{G}'(S) = \bigvee_{j\in J} \mathcal{G}_j(S) = \emptyset$

(GCF2) $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ ve $A_1 \subseteq A_2$ olsun. Buradan, her $j \in J$ için $\mathcal{G}_j(A_2) \subseteq \mathcal{G}_j(A_1)$ olduğundan, $\mathcal{G}'(A_2) = \bigvee_{j\in J} \mathcal{G}_j(A_2) \subseteq \bigvee_{j\in J} \mathcal{G}_j(A_1) = \mathcal{G}'(A_1)$ bulunur.

(GCF3) $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ olsun. Her $i \in J$ için $J_{i_1} = \left\{\{j \in J \mid (\mathcal{F}_i, \mathcal{G}_i) \subseteq \left(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j\right)\right\}$ ve $J_{i_2} = \left\{\{j \in J \mid (\mathcal{F}_i, \mathcal{G}_i) \supsetneq \left(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j\right)\right\}$ kümeleri oluşturulursa, $\left(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j\right)_{j\in J}$ bir zincir olduğundan $J_{i_1} \cup J_{i_2} = J$ olup

$$\mathcal{G}'(A_1) \wedge \mathcal{G}'(A_2) = \bigvee_{i \in J} \mathcal{G}_i(A_1) \wedge \bigvee_{j \in J} \mathcal{G}_j(A_2) = \bigvee_{i \in J} \left(\mathcal{G}_i(A_1) \wedge \bigvee_{j \in J} \mathcal{G}_j(A_2) \right)$$

$$= \bigvee_{i \in J} \left(\bigvee_{j \in J} \left(\mathcal{G}_i(A_1) \wedge \mathcal{G}_j(A_2) \right) \right)$$

$$= \bigvee_{i \in J} \left(\bigvee_{j \in J_{i_1}} \left(\mathcal{G}_i(A_1) \wedge \mathcal{G}_j(A_2) \right) \vee \bigvee_{j \in J_{i_2}} \left(\mathcal{G}_i(A_1) \wedge \mathcal{G}_j(A_2) \right) \right)$$

$$\subseteq \bigvee_{i \in J} \left(\bigvee_{j \in J_{i_1}} \left(\mathcal{G}_j(A_1) \wedge \mathcal{G}_j(A_2) \right) \vee \bigvee_{j \in J_{i_2}} \left(\mathcal{G}_i(A_1) \wedge \mathcal{G}_i(A_2) \right) \right)$$

$$\subseteq \bigvee_{i \in J} \left(\bigvee_{j \in J_{i_1}} \mathcal{G}_j(A_1 \cup A_2) \vee \bigvee_{j \in J_{i_2}} \mathcal{G}_i(A_1 \cup A_2) \right) \subseteq \bigvee_{i \in J} \mathcal{G}_i(A_1 \cup A_2)$$

$$= \mathcal{G}'(A_1 \cup A_2)$$

bulunur.

Şimdi, $A \in \mathcal{S}$ olsun. Her $i \in J$ için $J_{i_1} = \left\{ \{ j \in J \mid (\mathcal{F}_i, \mathcal{G}_i) \subseteq \left(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j\right) \right\}$ ve $J_{i_2} = \left\{ \{ j \in J \mid (\mathcal{F}_i, \mathcal{G}_i) \supsetneq \left(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j\right) \right\}$ kümeleri oluşturulursa, $\left(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j\right)_{j \in J}$ bir zincir olduğundan $J_{i_1} \cup J_{i_2} = J$ olur. Ayrıca, her $i \in J$ için $\left(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j\right)$ nin regüler olduğu göz önüne alınırsa,

$$\mathcal{F}'(A) \cap \mathcal{G}'(A) = \bigvee_{i \in J} \mathcal{F}_i(A) \cap \bigvee_{j \in J} \mathcal{G}_j(A) = \bigvee_{i \in J} \left(\mathcal{F}_i(A) \cap \bigvee_{j \in J} \mathcal{G}_j(A) \right)$$

$$= \bigvee_{i \in J} \left(\bigvee_{j \in J} \left(\mathcal{F}_i(A) \cap \mathcal{G}_j(A) \right) \right)$$

$$= \bigvee_{i \in J} \left(\bigvee_{j \in J_{i_1}} \left(\mathcal{F}_i(A) \cap \mathcal{G}_j(A) \right) \vee \bigvee_{j \in J_{i_2}} \left(\mathcal{F}_i(A) \cap \mathcal{G}_j(A) \right) \right)$$

$$= \bigvee_{i \in J} \left(\bigvee_{j \in J_{i_1}} \left(\mathcal{F}_i(A) \cap \mathcal{G}_j(A) \right) \vee \bigvee_{j \in J_{i_2}} \left(\mathcal{F}_i(A) \cap \mathcal{G}_j(A) \right) \right)$$

$$\subseteq \bigvee_{i \in J} \left(\bigvee_{j \in J_{i_1}} \left(F_j(A) \cap \mathcal{G}_j(A) \right) \vee \bigvee_{j \in J_{i_2}} \left(\mathcal{F}_i(A) \cap \mathcal{G}_i(A) \right) \right) = \emptyset$$

bulunur. Dolayısıyla $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ yi içeren $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki regüler $(V, \mathcal{V})$-dereceli disüzgeçler kümesinde, $\left(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j\right)_{j \in J}$ zincirinin bir üst sınırıdır. Zorn Lemma'dan, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ yi içeren $(S,\mathcal{S})$ üzerindeki regüler $(V,\mathcal{V})$-dereceli disüzgeçler kümesinin bir $(\mathcal{F}^M,\mathcal{G}^M)$ maksimal elemanı vardır. Böylece $(\mathcal{F},\mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{F}^M,\mathcal{G}^M)$ olup $(\mathcal{F}^M,\mathcal{G}^M)$, $(S,\mathcal{S})$ üzerindeki regüler $(V,\mathcal{V})$-dereceli disüzgeçler kümesinin bir maksimal elemanıdır.

Önerme 5.21. $(V,\mathcal{V})$ bir ayrık doku ve $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ üzerinde bir maksimal regüler dereceli disüzgeç olsun. Bu durumda, $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ nin diyakınsak olması için gerek ve yeter şart dideğme noktasının olmasıdır.

Kanıt: Sonuç 5.12.'den $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, diyakınsak ise dideğme noktası vardır. Diğer taraftan, (s,s'), $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ nin bir dideğme noktası olsun. Bu durumda, $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ olup her $A \in \mathcal{S}$ için $v \in \mathcal{F}(A) \implies P_s \subseteq [A]^v$ ve her $A \in \mathcal{S}$ için $v \in \mathcal{G}(A) \implies]A[^v \subseteq Q_{s'}$ dir.

$A \in \mathcal{S}$, $A \not\subseteq Q_{s'}$ olsun. Bu durumda, Teorem 5.18.'den $\mathcal{F}(A) \cup \mathcal{G}(A) = V$ olup $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ nin regülerliği göz önüne alındığında $v \notin \mathcal{F}(A) \Rightarrow v \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow]A[^v \subseteq Q_{s'}$ olur. Buradan, $v \notin \mathcal{T}(A)$ dır, çünkü aksi halde $P_v \subseteq \mathcal{T}(A)$ olup $A =]A[^v \subseteq Q_{s'}$ çelişkisi elde edilirdi. Yani, "$v \notin \mathcal{F}(A) \Rightarrow v \notin \mathcal{T}(A)$", bir başka ifadeyle $\mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$ ve böylece Önerme 5.7.'den $\mathcal{F} \longrightarrow s'$ bulunur.

Şimdi, $A \in \mathcal{S}$, $P_s \not\subseteq A$ olsun. Bu durumda, Teorem 5.18.'den $\mathcal{F}(A) \cup \mathcal{G}(A) = V$ olup $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ nin regülerliği göz önüne alındığında $v \notin \mathcal{G}(A) \Rightarrow v \in \mathcal{F}(A) \Rightarrow P_s \subseteq [A]^v$ olur. Buradan, $v \notin \mathcal{K}(A)$ dır, çünkü aksi halde $P_v \subseteq \mathcal{K}(A)$ olup $A = [A]^v \supseteq P_s$ çelişkisi elde edilirdi. Yani, "$v \notin \mathcal{G}(A) \Rightarrow v \notin \mathcal{K}(A)$", bir başka ifadeyle $\mathcal{K}(A) \subseteq \mathcal{G}(A)$ ve böylece Önerme 5.7.'den $\mathcal{G} \longrightarrow s$ bulunur.

Ayrıca, $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ olduğundan, $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ diyakınsaktır.

Önerme 5.22. $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ bir dereceli ditopolojik doku uzayı olmak üzere;

(a) $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ üzerinde her regüler dereceli disüzgecin bir dideğme noktası vardır.

(b) $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ üzerinde her maksimal regüler dereceli disüzgeç diyakınsaktır.

ifadeleri için, $(b) \Rightarrow (a)$ ve $(V,\mathcal{V})$ ayrık olması halinde $(a) \Rightarrow (b)$ gerektirmeleri vardır.

Kanıt: $(a) \Rightarrow (b)$: $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ üzerinde bir maksimal regüler dereceli disüzgeç olsun. (a) kabulü gereği $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ nin bir dideğme noktası vardır ve $(V,\mathcal{V})$ ayrık olduğundan, Önerme 5.21.'den $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ diyakınsaktır.

$(b) \Rightarrow (a)$: $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ üzerinde bir regüler dereceli disüzgeç olsun. Önerme 5.20.'den $(\mathcal{F},\mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{F}^M,\mathcal{G}^M)$ olacak şekilde $(S,\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{K},V,\mathcal{V})$ üzerinde bir $(\mathcal{F}^M,\mathcal{G}^M)$ maksimal regüler dereceli disüzgeç vardır. (b) kabulü gereği $\mathcal{F}^M \longrightarrow s$, $\mathcal{G}^M \longrightarrow s'$ ve $P_{s'} \not\subseteq Q_s$ olacak şekilde $s, s' \in S$ vardır. $A \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{G}^M \longrightarrow s'$ olduğundan Önerme 5.10.'dan, $v \in \mathcal{F}(A) \Rightarrow v \in \mathcal{F}^M(A) \Rightarrow P_{s'} \subseteq [A]^v$ olup s' nin $\mathcal{F}$ nin bir değme noktası olduğu bulunur. Benzer şekilde, $\mathcal{F}^M \longrightarrow s$ olduğundan Önerme 5.10.'dan, $v \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow v \in \mathcal{G}^M(A) \Rightarrow]A[^v \subseteq Q_s$ olup s nin $\mathcal{G}$ nin bir değme noktası olduğu bulunur. Ayrıca $P_{s'} \nsubseteq Q_s$ olduğundan, (s', s) çifti $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ nin bir dideğme noktasıdır.

BÖLÜM 6
SONUÇ VE ÖNERİLER

Matematiksel yapıların araştırılmasında yerel yapıların önemli bir rolü vardır. Örneğin, topolojik uzaylarda komşuluk sistemleri, açık kümeleri (yani topolojiyi) noktalarının komşulukları yardımıyla karakterize eder. Benzer şekilde, süzgeçler de topolojiyi ve kompaktlığı belirlemede kullanılır. Dördüncü bölümde, dereceli ditopolojik doku uzayları için yerel incelemeye imkan sağlayan ve dereceli ditopolojik doku uzayları teorisine farklı bir bakış açısı sunan iki çeşit komşuluk sistemi oluşturulmuş ve incelenmiştir. Beşinci bölümde ise, dereceli ditopolojik doku uzaylarını araştırmada yardımcı olan dereceli disüzgeçler sunulmuş ve yakınsaklıkları incelenmiştir. Dördüncü ve beşinci bölümdeki bulgular sırasıyla Ekmekçi ve Ertürk (2015), Ekmekçi ve Ertürk (2016) olarak yayımlanmıştır.

Beklendiği gibi, dereceli dikomşuluk sistemleri dikomşuluk sistemlerinden daha geneldir. Her $(\mathcal{T},\mathcal{K})$ dereceli ditopolojisi için bir $(N_{\mathcal{T}},M_{\mathcal{K}})$ dereceli dikomşuluk sistemi vardır ve bu dereceli dikomşuluk sistemi $(\mathcal{T},\mathcal{K})$ dereceli ditopolojisini üretir, yani $(\mathcal{T},\mathcal{K})=\left(\mathcal{T}_{N_{\mathcal{T}}},\mathcal{K}_{M_{\mathcal{K}}}\right)$ dir. $(N1)-(N5)$ ve $(M1)-\ (M5)$ koşullarını sağlayan her (N,M) dereceli dikomşuluk sistemi bir $(\mathcal{T}_N,\mathcal{K}_M)$ dereceli ditopolojisi üretir. Üzerinde tanımlandığı veya değerlerini aldığı dokunun sade olması durumunda, $(N,M)=(N^{\mathcal{T}_N},M^{\mathcal{K}_M})$ eşitliği sağlanır. Ancak sadelik koşulu olmadan bu eşitliğin doğru olup olmadığı açık bir problemdir. Dördüncü bölümün ilk kısmında dereceli dikomşuluk sistemleri incelenmiş ve yukarıda söz edilen açık problem kategorik olarak ortaya konmuştur. Ayrıca dördüncü bölümün ikinci kısmında, tümleyenli dokular üzerinde tanımlı olan "kuazi uyumluluk" kavramı yardımıyla, "dereceli Q-dikomşuluk" adıyla alternatif bir komşuluk yapısı sunulmuştur. Dereceli dikomşuluk sistemlerinin aksine, bu yapıda $(\mathcal{T},\mathcal{K})=\left(\mathcal{T}_{\widetilde{N}_{\mathcal{T}}},\mathcal{K}_{\widetilde{M}_{\mathcal{K}}}\right)$ ve $\left(\widetilde{N},\widetilde{M}\right)=\left(\widetilde{N}^{\mathcal{T}_{\widetilde{N}}},\widetilde{M}^{\mathcal{K}_{\widetilde{M}}}\right)$ eşitlikleri sağlanır. Ama diğer taraftan, bu yapının dereceli dikomşuluk sistemine göre iki handikapı vardır: dereceli Q-dikomşuluk sistemleri dikomşuluk sistemlerinin bir genellemesi değildir ve sadece tümleyenli dokularda tanımlıdırlar.

Yine beklendiği gibi, dereceli disüzgeç yapısı dereceli dikomşuluk sistemleri üzerine kurulmuştur. Dereceli dikomşuluk sistemleri genel olarak dereceli disüzgeç olmak zorunda değildir, dolayısıyla Özçağ ve ark. (2005) tarafından kullanılan metod kullanılarak dereceli disüzgeçlerin yakınsaklığı tanımlanmıştır. Açıkça, dereceli disüzgeçler disüzgeçlerden daha geneldir ve doğal olarak disüzgeçlerin bazı özelliklerinin dereceli duruma uyarlanan hali dereceli disüzgeçler için geçerli değildir.

Dereceli dikomşuluklar, dereceli disüzgeçler ve dereceli disüzgeçlerin yakınsaklıkları dereceli ditopolojik doku uzaylarını anlamada kullanışlı olacaktır. Tezde geliştirilen bu kavramların, ditopolojik doku uzaylarında düzgünlük ve kompaktlık gibi yapıların tanımlanmasına ve araştırılmasına imkan sağlayacağı öngörülmektedir. Bu öngörü ışığında çalışmalar planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

Adamek J., Herrlich H., Strecer G.E. 1990. Abstract and Concrete Categories. John Wiley & Sons, Inc.

Brown L.M., 1993a. Ditopological Fuzzy Structures I. Fuzzy Systems and A.I. Magazine. 3

Brown L.M., 1993b. Ditopological Fuzzy Structures II. Fuzzy Systems and A.I. Magazine. 3

Brown L.M., Diker M., 1998. Ditopological Texture Spaces and Intuitionistic Sets. Fuzzy Sets and Systems. 98: 217-224.

Brown L.M., Ertürk R., 2000a. Fuzzy Sets as Texture Spaces, I. Representation Theorems. Fuzzy Sets and Systems. 110: 227-236.

Brown L.M., Ertürk R., 2000b. Fuzzy Sets as Texture Spaces, II. Subtextures and Quotient Textures. Fuzzy Sets and Systems. 110: 237-245.

Brown L.M., Ertürk R., Dost Ş., 2004a. Ditopological Texture Spaces and Fuzzy Topology, I. Basic Concepts. Fuzzy Sets and Systems. 147(2): 171-199.

Brown L.M., Ertürk R., Dost Ş., 2004b. Ditopological Texture Spaces and Fuzzy Topology, II. Topological Considerations. Fuzzy Sets and Systems. 147(2): 201-231.

Brown L.M., Ertürk R., Dost Ş., 2006. Ditopological Texture Spaces and Fuzzy Topology, III. Separation Axioms. Fuzzy Sets and Systems. 157(14): 1886-1912.

Brown L.M., Šostak A., 2014. Categories of Fuzzy Topology in the Context of Graded Ditopologies on Textures. Iranian Journal of Fuzzy Systems. 11(6): 1-20.

Chang C.L., 1968. Fuzzy Topological Spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 24 : 182-190.

Chattopadhyay K.C., Hazra R.N., 1992. Gradation of Openness: Fuzzy Topology. Fuzzy Sets and Systems. 49: 237-242.

Demirci M., 1997. Neighborhood Structures of Smooth Topological Spaces. Fuzzy Sets and Systems. 92: 123-128.

Ekmekçi R., Ertürk R., 2015. Neighborhood Structures of Graded Ditopological Texture Spaces. Filomat. 29(7): 1445-1459.

Ekmekçi R., Ertürk R., 2016. Convergence in Graded Ditopological Texture Spaces. Applied General Topology. 17(1): 17-35.

Ertürk R., Dost Ş., Özçağ S., 2009. Generalization Some Fuzzy Separation Axioms to Ditopological Texture Spaces. The Journal of Nonlinear Sciences and Applications. 2: 234-242.

Kubiak T., 1985. On Fuzzy Topologies. PhD Dissertation (Doktora Tezi). A. Mickiewicz University, Poznan, Poland.

Özçağ S., Brown L.M., 2011. The Prime Dicompletion of a Di-uniformity on a Plain Texture. Topology and its Applications. 158: 1584-1594.

Özçağ S., Yıldız F., Brown L.M., 2005. Convergence of Regular Difilters and the Completeness of Di-uniformities. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. 34S: 53-68.

Ramadan A.A., 1992. Smooth Topological Spaces. Fuzzy Sets and Systems. 48: 371-375.

Šostak A., 1985. On a Fuzzy Topological Structure. Rendiconti Circolo Matematico Palermo Serie II. 11: 89-103.

Šostak A., 1989. Two Decates of Fuzzy Topology: Basic Ideas, Notions and Results. Russian Mathematical Surveys. 44(6): 125-186.

Tiryaki İ.U., Brown L.M., 2011. Plain Ditopological Texture Spaces. Topology and its Applications. 158: 2005-2015.

Yıldız G., 2005. Doku Uzaylarında Ditopolojik Uzaylar. Yüksek Lisans Tezi. Hacettepe Üniversitesi, Türkiye.

Zadeh L.A., 1965. Fuzzy Sets. Information and Control. 8: 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ramazan EKMEKÇİ

Doğum Yeri : Antakya

Doğum Tarihi : 20.12.1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Hacettepe Üniveristesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi ABD (2008)

Yüksek Lisans Öğrenimi : ÇOMÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ABD (2010)

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce, Almanca.

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar -SCI -Diğer

1. Ekmekçi Ramazan, Ertürk Rıza (2016). Convergence in graded ditopological texture spaces. Applied General Topology, 17(1), 17-35.
2. Ekmekçi Ramazan, Ertürk Rıza (2015). Neighborhood structures of graded ditopological texture spaces. Filomat, 29(7), 1445-1459.

b) Bildiriler -Uluslararası

1. Ekmekçi Ramazan, Ertürk Rıza (2015). Q-Convergence of Graded Difilters. Int. Conference on Pure and Applied Mathematics, Van, Türkiye. (Özet bildiri)
2. Ekmekçi Ramazan, Ertürk Rıza (2014). Graded Difilters. 3rd Int. Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Appl., Viyana, Avusturya. (Özet bildiri)
3. Ertürk Rıza, Ekmekçi Ramazan (2013). Neighborhood Structures of Graded Ditopological Texture Spaces. 2nd Int. Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Appl., Saraybosna, Bosna Hersek. (Özet bildiri)

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : ÇOMÜ Matematik Bölümü (Araştırma Görevlisi) 2009-...

İLETİŞİM

E-posta Adresi : ekmekci@comu.edu.tr, ekmekciramazan@yahoo.com