

**T.C.**  
**ANAkkALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**DOKTORA TEZİ**

**İDEAL YAPISINDA**  
**YENİ BİR ARAŞTIRMA**  
**Ayşe Nur TUNÇ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Tezin Sunulduğu Tarih: 06/01/2017**

**Tez Danışmanı:**  
**Prof. Dr. Erdal EKİCİ**

**ANAkkALE**

Ayşe Nur TUNÇ tarafından Prof. Dr. Erdal EKİCİ yönetiminde hazırlanan ve **06/01/2017** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan “**İdeal Yapısında Yeni Bir Araştırma**” başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **DOKTORA TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

**JÜRİ**

Prof. Dr. Erdal EKİCİ .....

**Başkan**

Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR .....

**Üye**

Doç. Dr. Bekir TANAY .....

**Üye**

Yrd. Doç. Dr. Sena ÖZEN .....

**Üye**

Yrd. Doç. Dr. Burcu MESTAV .....

**Üye**

Prof. Dr. Levent GENÇ

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:.....

## İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI



**Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.**

Ayşe Nur TUNÇ

## TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleŐtirilmesinde, çalıŐmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Erdal EKİCİ'ye, tecrübelerinden faydalandığım Yrd. Doç. Dr. Sena ÖZEN'e ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli annem Fethiye TUNÇ, babam Mehmet TUNÇ ve kardeŐim Furkan Talha TUNÇ'a sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

Ayşe Nur TUNÇ  
anakkale, Ocak 2017



## ÖZET

### İDEAL YAPISINDA YENİ BİR ARAŞTIRMA

Ayşe Nur TUNÇ

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi

Danışman : Prof. Dr. Erdal EKİCİ

06/01/2017, 54

Bu tezde ideallerdeki kümeler kullanılarak tanımlanan  $P^*$ -kapalı kümeler sunulmaktadır. Bu kavram ideal uzaylardaki kümeler üzerinde yeni bir yaklaşımdır.  $P^*$ -kapalı kümelerin sınıfı  $*$ -operfect kümelerin ve  $*$ -açık  $ön_1^*$ -kapalı kümelerin bir üst sınıfıdır.

Üstelik, bu tezde  $PC^*$ -kapalı kümeler kavramı tanıtılmaktadır.  $PC^*$ -kapalı kümeler,  $ön_1^*$ -açık ve  $ön_1^*$ -kapalı kümeleri,  $\mathcal{RPC}_1$  ve  $ön_1^*$ -kapalı kümeleri,  $\mathcal{RPC}_1$  ve zayıf  $I_{rg}$ -kapalı kümeleri kapsamaktadır.

**Anahtar sözcükler:**  $P^*$ -kapalı Küme,  $P^*$ -açık Küme,  $PC^*$ -kapalı Küme,  $PC^*$ -açık Küme.

## ABSTRACT

### A NEW INVESTIGATION IN THE STRUCTURE OF IDEAL

Ayşe Nur TUNÇ

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Doctoral Dissertation in Mathematics Science

Advisor : Prof. Dr. Erdal EKİCİ

06/01/2017, 54

This thesis presents  $P^*$ -closed sets defined by using the sets in ideal. This concept is a new approach on the sets of ideal spaces. The class of  $P^*$ -closed sets is a superclass of  $*$ -operfect sets and  $\star$ -open  $\text{pre}_I^*$ -closed sets.

In this thesis , the concept of  $PC^*$ -closed sets is introduced.  $PC^*$ -closed sets contain  $\text{pre}_I^*$ -open and  $\text{pre}_I^*$ -closed sets,  $\mathcal{RPC}_I$  and  $\text{pre}_I^*$ -closed sets,  $\mathcal{RPC}_I$  and weakly  $I_{rg}$ -closed sets.

**Keywords:**  $P^*$ -closed Set,  $P^*$ -open Set,  $PC^*$ -closed Set,  $PC^*$ -open Set.

## İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEZ SINAVI SONUÇ FORMU.....	ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
ÖZET .....	v
ABSTRACT.....	vi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ .....	1
BÖLÜM 2	
ÖN BİLGİLER .....	4
BÖLÜM 3	
P*-KAPALI KÜMELER .....	7
BÖLÜM 4	
DİĞER ÖZELLİKLER.....	24
BÖLÜM 5	
PC*-KAPALI KÜMELER VE ÖN <sub>1</sub> *-CLOPEN KÜMELER .....	32
BÖLÜM 6	
PC*-AÇIK KÜMELER VE ÖZELLİKLERİ.....	41
KAYNAKLAR .....	52
ÖZGEÇMİŞ .....	I

# BÖLÜM 1

## GİRİŞ

Çeşitli topolojik özellikler ve önemli topolojik konular; kompaktlık, aşırı bağlantılılık, bağlantısızlık vb. için, ideal uzaylar aracılığı ile çeşitli küme teorileri şu ana kadar çalışılmıştır (örneğin Ekici ve Noiri, 2008, 2009a, 2010a; Ekici, 2011c, 2012; Ekici ve Noiri, 2012b; Das ve Chandra, 2013; Li ve Lu, 2014; Ekici ve Elmalı, 2015; Das ve ark., 2016).

Bu yüzden ideal uzaylardaki kümeler çeşitli topolojik problemler için önemli rollere sahiptirler. Öte yandan, 2010'da Açıkgöz ve arkadaşları (2010) \*-operfect kümeler kavramını sundular.

2011'de Ekici (2011a), sürekliliğin ayrışmalarını kurmak için  $\text{ön}_1^*$ -açık kümeler kavramını sundu.

Bu tezde,  $P^*$ -kapalı kümeler olarak adlandırılan ideal uzaylardaki kümeler üzerine yeni bir yaklaşım sunulmaktadır.

$P^*$ -kapalı kümelerin sınıfı \*-operfect kümeler ve \*-açık  $\text{ön}_1^*$ -kapalı kümelerin bir üst sınıfıdır.  $P^*$ -kapalı kümelerin karakterizasyonları elde edilmiştir.

Birçok makalede, topolojik uzaylardaki kümeler ile çeşitli problemlerin ana karakterizasyonları çalışılmıştır, örneğin Ekici (2007a,b, 2008a,b,c, 2009); Ekici ve Noiri (2009b, 2010b); Ekici (2013); Lee ve Lee (2014); Ray ve Bhowmick (2014).

2011'de  $\text{ön}_1^*$ -açık kümeler kavramı sunulmuştur (Ekici, 2011a). Öte yandan,  $\text{ön}_1^*$ -açık kümeler ve  $\text{ön}_1^*$ -kapalı kümeler problemlerin ana karakterizasyonları için kullanılmıştır (Ekici, 2011a; Ekici ve Özen, 2013).

Bundan sonra 2015'de  $\text{ön}_1^*$ -açık ve  $\text{ön}_1^*$ -kapalı kümeler bazı ayrışmaların ve de bazı karakterizasyonların kurulmasında dikkate alınmıştır (Ekici ve Elmalı, 2015).

Bu tezde,  $PC^*$ -kapalı kümeler tanıtılmaktadır.  $PC^*$ -kapalı kümeler,  $\text{ön}_1^*$ -açık ve  $\text{ön}_1^*$ -kapalı kümeleri,  $\mathcal{RPC}_1$  ve  $\text{ön}_1^*$ -kapalı kümeleri,  $\mathcal{RPC}_1$  ve zayıf  $I_{rg}$ -kapalı kümeleri kapsamaktadır.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde tez ile ilgili genel bilgiler verilmektedir.

İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve bilgiler verilmektedir. Ayrıca tez çalışmasında kullanılan temel teoremler ifade edilmektedir.

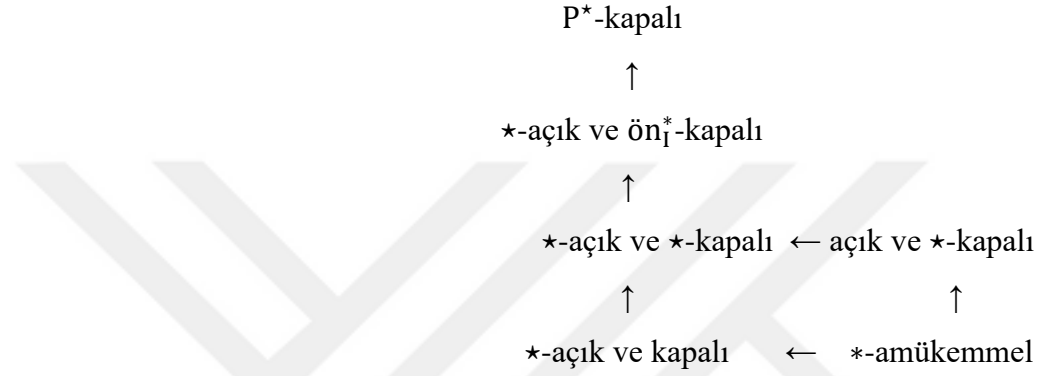


Üçüncü bölümde,  $P^*$ -kapalı kümeler olarak adlandırılan ideal uzaylarda kümeler üzerine yeni bir yaklaşım sunulmaktadır.

$P^*$ -kapalı kümeler sınıfı,  $*$ -perfect kümeler ve  $*$ -açık  $\text{ön}_1^*$ -kapalı kümelerin bir üst sınıfıdır.

Bu bölümde,  $P^*$ -kapalılığa denk ifadeler sunulmuştur.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında bir  $A$  kümesi için aşağıdaki gerektirmelerin sağlandığı ancak terslerinin doğru olmadığı örneklerle gösterilmektedir.



Ayrıca  $P^*$ -açıklılığa denk ifadeler sunulmuştur.

$*$ -hiçbiryerde yoğun olmayan bir küme ile  $P^*$ -kapalı kümeler arasındaki geçiş ispatlanmaktadır.

Dördüncü bölümde,  $P^*$ -kapalı ve  $P^*$ -açık kümelerin çeşitli özellikleri ile bir fonksiyon altındaki bir  $P^*$ -kapalı  $A$  kümesi için  $f(A)$  kümesinin de  $P^*$ -kapalı küme olması araştırılarak ispatlanmaktadır.

Beşinci bölümde,  $PC^*$ -kapalı kümeler tanıtılmaktadır.

Bir ideal topolojik uzayında bir  $U$  kümesi  $\text{ön}_1^*$ -açık ve  $\text{ön}_1^*$ -kapalı küme ise  $U$  kümesinin  $PC^*$ -kapalı küme olduğu gösterilmektedir.

$PC^*$ -kapalı kümelerin  $\text{ön}_1^*$ -açık ve  $\text{ön}_1^*$ -kapalı kümeleri,  $\mathcal{RPC}_1$  ve  $\text{ön}_1^*$ -kapalı kümeleri,  $\mathcal{RPC}_1$  ve zayıf  $I_{rg}$ -kapalı kümeleri içerdikleri gösterilmektedir.

$PC^*$ -kapalı kümelerin çeşitli denk ifadeleri ispatlanmaktadır.

Bu bölümde, aynı zamanda  $PC^*$ -kapalı kümelerin özellikleri çalışılmaktadır.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında bir  $U$  kümesinin,  $PC^*$ -kapalı küme olmasının denk koşulları verilmektedir.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında bir  $U$  kümesi,  $\text{ön}_1^*$ -açık ve  $\text{ön}_1^*$ -kapalı küme ise  $U$  kümesinin  $PC^*$ -kapalı küme olduğu ifadesinin tersinin sağlanmadığı örnekle gösterilmektedir.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her bir  $U$  kümesinin,  $PC^*$ -kapalı küme olmasının denk koşulları gösterilmektedir.

Altıncı bölümde,  $PC^*$ -açık kümeler kavramı sunuldu ve özellikleri çalışıldı.  $PC^*$ -açık kümelerin çeşitli denk ifadeleri ispatlanmaktadır.

$PC^*$ -açık küme olmanın denk koşulları sunulmaktadır.



## BÖLÜM 2

### ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve bilgiler verilmektedir. Ayrıca tez çalışmasında kullanılan temel teoremler ifade edilmektedir.

$(T, \sigma)$  ile topolojik uzayı göstereceğiz.  $(T, \sigma)$  topolojik uzayı için,  $A \subset T$  kümesinin, sırasıyla kapanışını ve içini  $\mathcal{C}l(A)$  ve  $\mathcal{I}nt(A)$  ile göstereceğiz.

#### Tanım 2.1.

$T$  boştan farklı bir küme ve  $\mathfrak{S}$  da  $T$  kümesinin kuvvet kümesi  $P(T)$ 'nin bir alt koleksiyonu olsun. Eğer

(i)  $A_1, A_2 \subset T$  için  $A_1 \subset A_2 \in \mathfrak{S}$  ise  $A_1 \in \mathfrak{S}$ ,

(ii)  $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}$  ise  $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{S}$

oluyorsa,  $T$  kümesinin kuvvet kümesi  $P(T)$ 'nin alt koleksiyonu  $\mathfrak{S}$ 'ya  $T$  üzerinde bir ideal denir (Kuratowski, 1966).

#### Not 2.2.

İdeal topolojik uzay,  $T$  kümesi üzerinde  $\mathfrak{S}$  ideali ile  $(T, \sigma)$  topolojik uzayıdır ve  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ile gösterilecektir (Kuratowski, 1966).

#### Tanım 2.3.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $A \subset T$  olsun.  $(.)^*: P(T) \rightarrow P(T)$  olmak üzere  $A$  kümesinin yerel fonksiyonu ( $\mathfrak{S}$  ve  $\sigma$ 'ya göre)

$$A^*(\mathfrak{S}, \sigma) \text{ (ya da } A^*) = \{t \in T: A \cap B \notin \mathfrak{S}, t \in B \in \sigma\}$$

şeklinde tanımlanır (Kuratowski, 1966).

#### Not 2.4.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $A \subset T$  olsun.

$$\mathcal{C}l^*(A) = A \cup A^*,$$

kapanış operatörü  $\sigma^*$  ile gösterilecek olan ve  $\star$ -topolojisi olarak adlandırılan  $\sigma^*$  için Kuratowski kapanış operatörüdür (Janković ve Hamlett, 1990).

**Tanım 2.5.**

$(T, \sigma)$  topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. Eğer

$$A \subset \mathcal{CI}(\mathfrak{Int}(A))$$

ise  $(T, \sigma)$  topolojik uzayında  $A$  kümesine yarı-açıktır denir (Levine, 1963).

**Tanım 2.6.**

$(T, \sigma)$  topolojik uzay olsun. Yarı-açık kümenin tümleyenine yarı-kapalıdır denir (Crossley ve Hildebrand, 1971).

**Tanım 2.7.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.

$$A \subset \mathfrak{Int}^*(\mathcal{CI}(A))$$

ise  $A$  kümesine ön<sub>1</sub><sup>\*</sup>-açıktır denir (Ekici, 2011a).

**Tanım 2.8.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. Eğer  $T \setminus A$  kümesi ön<sub>1</sub><sup>\*</sup>-açık ise  $A$  kümesine ön<sub>1</sub><sup>\*</sup>-kapalıdır denir (Ekici, 2011a; Ekici ve Özen, 2013).

**Tanım 2.9.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. Eğer

$$A = A^*$$

ise  $A$  kümesine \*-perfecttir (\*-mükemmel) denir (Hayashi, 1964).

**Tanım 2.10.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. Eğer  $A$  kümesi açık \*-mükemmel ise  $A$  kümesine \*-operfecttir (\*-amükemmel) denir (Acikgoz ve ark., 2010).

**Tanım 2.11.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. Eğer  $A$  kümesi ön<sub>1</sub><sup>\*</sup>-açık ve ön<sub>1</sub><sup>\*</sup>-kapalı ise  $A$  kümesine ön<sub>1</sub><sup>\*</sup>-clopen küme denir (Ekici ve Elmalı, 2015).

**Tanım 2.12.**

$(T, \sigma)$  topolojik uzay ve  $U \subset T$  olsun. Eğer

$$U = \mathfrak{Int}(\mathfrak{Cl}(U))$$

ise  $U$  kümesine düzenli açık denir (Stone, 1937).

**Tanım 2.13.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer

$$U = V_1 \cap V_2$$

olacak biçimde,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında düzenli açık  $V_1$  kümesi ve  $\text{ön}_1^*$ -clopen  $V_2$  kümesi varsa,  $U$  kümesine  $\mathcal{R}\mathcal{P}\mathcal{C}_1$ -küme denir (Ekici ve Elmalı, 2015).

**Tanım 2.14.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

Eğer

$$U \subset V$$

ve  $V$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında düzenli açık küme iken

$$(\mathfrak{Int}(U))^* \subset V$$

oluyorsa,  $U$  kümesine zayıf  $I_{rg}$ -kapalı küme denir (Ekici ve Özen, 2013).

**Teorem 2.15.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.  $U$  kümesi için aşağıdakiler denktir (Ekici ve Elmalı, 2015).

- (1)  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $\text{ön}_1^*$ -clopen kümedir.
- (2)  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $\mathcal{R}\mathcal{P}\mathcal{C}_1$ -küme ve  $\text{ön}_1^*$ -kapalı kümedir.
- (3)  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $\mathcal{R}\mathcal{P}\mathcal{C}_1$ -küme ve zayıf  $I_{rg}$ -kapalı kümedir.

### BÖLÜM 3

#### P\*-KAPALI KÜMELER

Bu bölümde, P\*-kapalı kümeler olarak adlandırılan ideal uzaylarda kümeler üzerine yeni bir yaklaşım sunuldu. P\*-kapalı kümeler sınıfı, \*-amükmel kümeler ve \*-açık ön\*-kapalı kümelerin bir üst sınıfıdır.

#### Tanım 3.1.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.

$$A \subset B$$

olan her yarı-açık B kümesi için

$$(\mathfrak{S}nt(A))^* \subset \mathfrak{S}nt^*(B) \cup C$$

olacak biçimde bir  $C \in \mathfrak{S}$  varsa A kümesine P\*-kapalı küme denir.

#### Tanım 3.2.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. Eğer  $T \setminus A$  kümesi P\*-kapalı küme ise A kümesine P\*-açık küme denir.

#### Teorem 3.3.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. A kümesi için aşağıdaki koşullar denktir:

(a) A kümesi, P\*-kapalıdır.

(b)  $A \subset B$  olan her yarı-açık B kümesi için

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(A)) \\ \subset \mathfrak{S}nt^*(B) \cup C \end{aligned}$$

olacak biçimde bir  $C \in \mathfrak{S}$  vardır.

(c)  $A \subset B$  olan her yarı-açık B kümesi için

$$(\mathfrak{S}nt(A))^* \setminus \mathfrak{S}nt^*(B) \in \mathfrak{S}$$

olur.

(d)  $A \subset B$  olan her yarı-açık B kümesi için

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(A)) \setminus \mathfrak{S}nt^*(B) \in \mathfrak{S}$$

olur.

**İspat:**

(c)  $\Rightarrow$  (d) ve (d)  $\Rightarrow$  (c) :  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay,

$$A \subset B \subset T$$

ve  $B$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-açık küme olsun. Sonra

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(A)) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(B))$$

kümesi

$$(\mathfrak{I}nt(A))^* \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(B))$$

ve

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I}nt(A) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(B)) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

kümelerinin birleşimidir.

O halde

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(A)) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(B)) \in \mathfrak{S}$$

ve

$$(\mathfrak{I}nt(A))^* \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(B)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

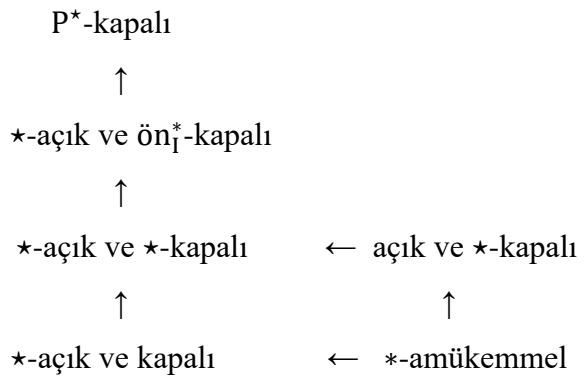
(a)  $\Leftrightarrow$  (b) ve (b)  $\Leftrightarrow$  (c) :  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay,

$$A \subset B \subset T$$

ve  $B$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-açık küme olsun. Buradan istenilen sonuca ulaşılır.

**Uyarı 3.4.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.  $A$  alt kümesi için aşağıdaki gerektirmeler sağlanır:



**Uyarı 3.5.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.

A alt kümesi için Uyarı 3.4.'de yer alan gerektirmelerin terslerinin doğru olmadığı aşağıdaki Örnek 3.6., Örnek 3.7. ve Örnek 3.8.'de gösterilmektedir:

**Örnek 3.6.**

$$T = \{k, l, m, n\},$$

$$\sigma = \{\{k, l, n\}, \{k, n\}, \{k\}, \{n\}, \{k, l\}, \emptyset, T\}$$

ve

$$\mathfrak{S} = \{\{m\}, \emptyset\}$$

olsun.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında,

$$A = \{l, n\}$$

kümesi,  $P^*$ -kapalı kümedir, A kümesi  $\star$ -açık küme değildir ve A kümesi  $\text{ön}_1^*$ -kapalı küme değildir.

**Örnek 3.7.**

$$T = \{k, l, m, n\},$$

$$\sigma = \{\{k, l, n\}, \{k, n\}, \{k\}, \{n\}, \{k, l\}, \emptyset, T\}$$

ve

$$\mathfrak{S} = \{\{k\}, \emptyset\}$$

olsun.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında,

$$A = \{l\}$$

kümesi,  $\star$ -açık ve  $\text{ön}_1^*$ -kapalı kümedir, A kümesi  $\star$ -kapalı küme değildir.

$$B = \{l, m, n\}$$

kümesi,  $\star$ -açık ve  $\star$ -kapalı kümedir, B kümesi açık küme değildir.

**Örnek 3.8.**

$$T = \{k, l, m, n\},$$

$$\sigma = \{\{k, l, n\}, \{k, n\}, \{k\}, \{n\}, \{k, l\}, \emptyset, T\}$$

ve

$$\mathfrak{S} = \{\{k, m\}, \{m\}, \emptyset, \{k\}\}$$



olsun.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında,

$$A = \{k\}$$

kümesi, açık ve  $\star$ -kapalı kümedir, A kümesi kapalı küme değildir ve

$$A^* \neq A$$

olur.

$$B = \{l, m, n\}$$

kümesi,  $\star$ -açık kapalı kümedir, B kümesi açık küme değildir.

T kümesi,  $\star$ -açık ve kapalı kümedir ve  $T^* \neq T$  olur.

### **Teorem 3.9.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında, A kümesi için (i) ve (ii) özellikleri denktirler:

(i) A kümesi  $P^*$ -açıktır,

(ii)  $B \subset A$  olan her yarı-kapalı B kümesi için

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}I^*(B) \setminus C \\ \subset \mathfrak{S}nt^*(\mathfrak{C}I(A)) \end{aligned}$$

olacak biçimde  $\mathfrak{S}$  idealinde bir C kümesi vardır.

### **İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Kabul edelim ki; A kümesi  $P^*$ -açık küme ve B kümesi,

$$B \subset A$$

olan yarı-kapalı küme olsun. O halde

$$\begin{aligned} T \setminus A \\ \subset T \setminus B \end{aligned}$$

olur,  $T \setminus B$  kümesi yarı-açık kümedir ve  $T \setminus A$  kümesi  $P^*$ -kapalı kümedir.

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(T \setminus A)) \setminus \mathfrak{S}nt^*(T \setminus B) \in \mathfrak{S}$$

ve

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(T \setminus A)) \setminus (T \setminus \mathfrak{C}I^*(B)) \in \mathfrak{S}$$

ifadelerini elde ederiz.

$$C = \mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(T \setminus A)) \setminus (T \setminus \mathfrak{C}I^*(B))$$

diyelim.

O halde

$$C \in \mathfrak{S}$$

ve

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(T \setminus A)) \\ & \subset (T \setminus \mathcal{C}I^*(B)) \cup C \end{aligned}$$

olur.

Bu nedenle,

$$T \setminus (T \setminus \mathcal{C}I^*(B))$$

ve

$$T \setminus C$$

kümelerinin kesişimi,

$$T \setminus \mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(T \setminus A))$$

kümesinin alt kümesidir.

Böylece

$$\mathcal{C}I^*(B) \cap (T \setminus C)$$

kümesi,  $\mathfrak{S}nt^*(\mathcal{C}I(A))$  kümesinin alt kümesidir.

Dolayısı ile

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}I^*(B) \setminus C \\ & \subset \mathfrak{S}nt^*(\mathcal{C}I(A)) \end{aligned}$$

olur.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Kabul edelim ki;

$$B \subset A$$

olan her yarı-kapalı B kümesi için

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}I^*(B) \setminus C \\ & \subset \mathfrak{S}nt^*(\mathcal{C}I(A)) \end{aligned}$$

olacak biçimde  $\mathfrak{S}$  idealinde bir C kümesi olsun.

$$T \setminus A \subset D \subset T$$

ve D kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-açık küme olsun.

Bu yüzden,

$$\begin{aligned} & T \setminus D \\ & \subset A \end{aligned}$$

ve  $T \setminus D$  kümesi yarı-kapalı kümedir.

$$\mathcal{C}I^*(T \setminus D) \setminus C$$

$$\subset \mathfrak{Int}^*(\mathcal{C}I(A))$$

olacak biçimde  $\mathfrak{I}$  idealinde  $C$  kümesi vardır ve bu yüzden

$$T \setminus \mathfrak{Int}^*(D)$$

ve

$$T \setminus C$$

kümelerinin kesişimi

$$\mathfrak{Int}^*(\mathcal{C}I(A))$$

kümesinin alt kümesidir.

Sonra

$$T \setminus \mathfrak{Int}^*(\mathcal{C}I(A))$$

kümesi,

$$T \setminus ((T \setminus \mathfrak{Int}^*(D)) \setminus C)$$

kümesinin alt kümesidir.

Bu nedenle,

$$\begin{aligned} T \setminus (T \setminus \mathcal{C}I^*(T \setminus \mathcal{C}I(A))) \\ \subset \mathfrak{Int}^*(D) \cup C \end{aligned}$$

olur.

Bunun üzerine,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}I^*(T \setminus \mathcal{C}I(A)) \\ \subset \mathfrak{Int}^*(D) \cup C \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{C}I^*(\mathfrak{Int}(T \setminus A)) \setminus \mathfrak{Int}^*(D) \\ \subset C \\ \in \mathfrak{I} \end{aligned}$$

olur.

Sonuç olarak  $T \setminus A$  kümesi  $P^*$ -kapalı kümedir. Böylece  $A$  kümesi  $P^*$ -açık kümedir.

### **Tanım 3.10.**

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. Eğer

$$\mathfrak{Int}(\mathcal{C}I^*(A)) = \emptyset$$

ise  $A$  kümesine,  $\star$ -hiçbir yerde yoğun olmayan küme denir (Ekici ve Noiri, 2012a).

**Teorem 3.11.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.  $A$  kümesi,  $\star$ -hiçbir yerde yoğun olmayan bir küme ise  $A$  kümesi  $P^*$ -kapalı kümedir.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.  $A$   $\star$ -hiçbir yerde yoğun olmayan küme,

$$A \subset B \subset T$$

ve  $B$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-açık küme olsun.

$$\mathfrak{S}nt(A) = \emptyset$$

olduğundan dolayı,

$$\mathfrak{C}l^*(\mathfrak{S}nt(A)) \setminus \mathfrak{S}nt^*(B) \in \mathfrak{S}$$

olur.

Böylece  $A$  kümesi,  $P^*$ -kapalı kümedir.

**Uyarı 3.12.**

Herhangi bir  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayı için,  $\star$ -hiçbir yerde yoğun olmayan küme olma özelliğini taşımayan  $P^*$ -kapalı küme vardır.

**Örnek 3.13.**

$$T = \{k, l, m, n\},$$

$$\sigma = \{\{k, l, n\}, \{k, n\}, \{k\}, \{n\}, \{k, l\}, \emptyset, T\}$$

ve

$$\mathfrak{S} = \{\{m\}, \emptyset\}$$

olsun.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında,

$$A = \{l, n\}$$

kümesi  $P^*$ -kapalı kümedir ama  $A$  kümesi  $\star$ -hiçbir yerde yoğun olmayan küme değildir.

**Teorem 3.14.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun. Aşağıdaki (i) ve (ii) özellikleri denktir:

(i)  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında, her küme  $P^*$ -kapalı kümedir,

(ii)  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında, her yarı-açık  $A$  kümesi için

$$\mathfrak{C}l^*(\mathfrak{S}nt(A)) \setminus \mathfrak{S}nt(A) \in \mathfrak{S}$$

olur.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Kabul edelim ki;  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her küme  $P^*$ -kapalı küme olsun.  $A \subset T$  yarı-açık küme olsun.

$\mathfrak{I}nt(A)$  kümesi,  $P^*$ -kapalı küme ve  $\mathfrak{I}nt(A)$  kümesi, yarı-açık küme olduğundan

$$\begin{aligned} & \mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(\mathfrak{I}nt(A))) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{I}nt(A))) \\ &= \mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(A)) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt(A)) \\ &\in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

olur.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) :  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında, her yarı-açık  $A$  kümesi için

$$\mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(A)) \setminus \mathfrak{I}nt(A) \in \mathfrak{S}$$

olsun.

$$B \subset A \subset T$$

ve  $A$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-açık küme olsun.

O halde,

$$\begin{aligned} & \mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(B)) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(A)) \\ &\subset \mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(A)) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(A)) \\ &\subset \mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(A)) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt(A)) \end{aligned}$$

olur.

Bu yüzden

$$\mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(A)) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt(A)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

Dolayısıyla

$$\mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(B)) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(A)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

Sonuç olarak  $B$  kümesi,  $P^*$ -kapalı kümedir.

**Teorem 3.15.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun. Aşağıdaki (i) ve (ii) özellikleri denktir:

(i)  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında, her küme  $P^*$ -kapalı kümedir,

(ii)  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında, her yarı-açık  $A$  kümesi için

$$(\mathfrak{Snt}(A))^* \setminus \mathfrak{Snt}(A) \in \mathfrak{S}$$

olur.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun. Teorem 3.14.'te  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her küme  $P^*$ -kapalı kümedir ancak ve ancak  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her yarı-açık  $A$  kümesi için

$$\mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Snt}(A)) \setminus \mathfrak{Snt}(A) \in \mathfrak{S}$$

olur denilmektedir.

Buradan eğer  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her küme  $P^*$ -kapalı küme ise

$$(\mathfrak{Snt}(A))^* \setminus \mathfrak{Snt}(A) \in \mathfrak{S}$$

olur.

Tersine  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her yarı-açık  $A$  kümesi için

$$(\mathfrak{Snt}(A))^* \setminus \mathfrak{Snt}(A) \in \mathfrak{S}$$

ise

$$\mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Snt}(A)) \setminus \mathfrak{Snt}(A) \in \mathfrak{S}$$

olur ve her küme  $P^*$ -kapalı küme olur.

**Teorem 3.16.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.  $A$  kümesi,  $P^*$ -kapalı küme olsun. Eğer

$$B \subset \mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Snt}(A)) \setminus A$$

olacak biçimde  $B$  kümesi yarı-kapalı küme ise  $\mathfrak{Cl}^*(B) \in \mathfrak{S}$  olur.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. Kabul edelim ki  $A$  kümesi  $P^*$ -kapalı küme olsun.

$$B \subset \mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Snt}(A)) \setminus A$$

olan  $B$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-kapalı küme olsun.

O halde

$$B \subset T \setminus A$$

ve de

$$A \subset T \setminus B$$

ve  $T \setminus B$  kümesi yarı-açık kümedir.

A kümesi,  $P^*$ -kapalı küme olduğundan

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(A)) \text{ ve } (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(T \setminus B))$$

kümelerinin kesişimi,  $\mathfrak{I}$  idealinin elemanıdır.

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(A)) \setminus (T \setminus \mathcal{C}I^*(B)) \in \mathfrak{I}$$

ifadesine sahibiz.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}I^*(B) & \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(A)) \setminus (T \setminus \mathcal{C}I^*(B)) \\ & \in \mathfrak{I} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\mathcal{C}I^*(B) \in \mathfrak{I}$$

olur.

### Sonuç 3.17.

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. A kümesi,  $P^*$ -kapalı küme olsun. B kümesi,

$$B \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(A)) \setminus A$$

olacak biçimde yarı-kapalı küme ise

$$B \in \mathfrak{I}$$

olur.

### İspat:

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. A kümesi,  $P^*$ -kapalı küme olsun. B kümesi,

$$B \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(A)) \setminus A$$

olacak biçimde yarı-kapalı küme olsun. Teorem 3.16.'da  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  kümesi  $P^*$ -kapalı küme iken

$$B \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(A)) \setminus A$$

olacak biçimde B kümesi yarı-kapalı küme ise

$$\mathcal{C}I^*(B) \in \mathfrak{S}$$

olduğunu vermiştik.

Buradan da

$$B \in \mathfrak{S}$$

olduğu anlaşılır.

### **Teorem 3.18.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. A kümesi,  $P^*$ -kapalı küme olsun. Eğer B kümesi,

$$B \subset (\mathfrak{S}nt(A))^* \setminus A$$

olacak biçimde yarı-kapalı küme ise  $B \in \mathfrak{S}$  olur.

### **İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. A kümesi,  $P^*$ -kapalı küme olsun. Kabul edelim ki B kümesi,

$$B \subset (\mathfrak{S}nt(A))^* \setminus A$$

olacak biçimde  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-kapalı küme olsun. Bu yüzden

$$\begin{aligned} B \\ \subset T \setminus A \end{aligned}$$

olur.

O halde

$$\begin{aligned} A \\ \subset T \setminus B \end{aligned}$$

ve  $T \setminus B$  kümesi yarı-açık kümedir. A kümesi,  $P^*$ -kapalı küme olduğundan

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(A)) \setminus \mathfrak{S}nt^*(T \setminus B) \in \mathfrak{S}$$

olur.

Böylece

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(A)) \setminus (T \setminus \mathcal{C}I^*(B)) \in \mathfrak{S}$$

ve

$$(\mathfrak{S}nt(A))^* \setminus (T \setminus \mathcal{C}I^*(B)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

B



$$\begin{aligned} & \subset (\mathfrak{Int}(A))^* \setminus (T \setminus \mathfrak{Cl}^*(B)) \\ & \in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

olduğundan

$$B \in \mathfrak{S}$$

olur.

**Uyarı 3.19.**

Teorem 3.16.'da  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay,  $A \subset T$ ,  $A$  kümesi  $P^*$ -kapalı küme ve

$$B \subset \mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Int}(A)) \setminus A$$

olacak biçimde  $B$  kümesi yarı-kapalı küme iken

$$\mathfrak{Cl}^*(B) \in \mathfrak{S}$$

olduğunu belirttik.

Ayrıca Teorem 3.18.'de  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay,  $A \subset T$ ,  $A$  kümesi  $P^*$ -kapalı küme ve  $B$  kümesi

$$B \subset (\mathfrak{Int}(A))^* \setminus A$$

olacak biçimde yarı-kapalı küme ise

$$B \in \mathfrak{S}$$

olduğunu da belirttik.

Ancak Örnek 3.20., bize  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $A \subset T$  ve  $B$  kümesi

$$B \subset \mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Int}(A)) \setminus A$$

ve

$$B \subset (\mathfrak{Int}(A))^* \setminus A$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-kapalı küme iken eğer  $A$  kümesi  $P^*$ -kapalı küme değil ise Teorem 3.16.'nın ve Teorem 3.18.'in sağlanmadığını göstermektedir.

**Örnek 3.20.**

$$T = \{k, l, m, n\},$$

$$\sigma = \{\{k, l, n\}, \{k, n\}, \{k\}, \{k, l\}, \{n\}, \emptyset, T\}$$

ve

$$\mathfrak{S} = \{\{l, n\}, \{n\}, \{l\}, \emptyset\}$$

olsun.  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında

$$A = \{k\}$$

ve

$$B = \{l, m\}$$

olsun.

O halde A kümesi  $P^*$ -kapalı küme değildir, B kümesi yarı-kapalı kümedir,

$$B \subset (\mathfrak{I}nt(A))^* \setminus A$$

olur ve

$$B \subset \mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(A)) \setminus A$$

olur.

Fakat

$$B \notin \mathfrak{S} \text{ ve } \mathfrak{C}l^*(B) \notin \mathfrak{S}$$

olur.

**Teorem 3.21.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. A kümesi,  $P^*$ -kapalı küme ise

$$\mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(A)) \setminus A$$

kümesi,  $P^*$ -açık kümedir.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. A kümesinin  $P^*$ -kapalı küme olduğunu farzedelim.

$$B \subset \mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(A)) \setminus A$$

ve B kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-kapalı küme olsun. Teorem 3.16.'da  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında,  $A \subset T$  kümesi  $P^*$ -kapalı küme ve

$$B \subset \mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(A)) \setminus A$$

olacak biçimde B kümesi yarı-kapalı küme ise

$$\mathfrak{C}l^*(B) \in \mathfrak{S}$$

olur demiştik.

Yani Teorem 3.16.'dan

$$\mathfrak{C}l^*(B) \in \mathfrak{S}$$

olur.

Böylece

$$\mathfrak{C}l^*(B) \setminus C$$

$$\subset \mathfrak{Int}^*(\mathfrak{Cl}(\mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Int}(A)) \cap (T \setminus A)))$$

olacak biçimde

$$\begin{aligned} C \\ &= \mathfrak{Cl}^*(B) \\ &\in \mathfrak{I} \end{aligned}$$

kümesi vardır.

$$\begin{aligned} C \\ &= \mathfrak{Cl}^*(B) \\ &\in \mathfrak{I} \end{aligned}$$

olan C kümesini ele alalım.

Teorem 3.9.'da A kümesi  $P^*$ -açıktır ancak ve ancak

$$B \subset A$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayındaki her yarı-kapalı B kümesi için

$$\begin{aligned} \mathfrak{Cl}^*(B) \setminus C \\ \subset \mathfrak{Int}^*(\mathfrak{Cl}(A)) \end{aligned}$$

olacak biçimde  $\mathfrak{I}$  idealinde bir C kümesi vardır demiştik.

Bunun sonucu olarak

$$\mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Int}(A)) \cap (T \setminus A)$$

kümesi,  $P^*$ -açık kümedir.

### **Teorem 3.22.**

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  kümesi,  $P^*$ -açık küme olsun. Eğer

$$\mathfrak{Int}^*(\mathfrak{Cl}(A)) \cup (T \setminus A) \subset B$$

ve B kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında yarı-açık küme ise

$$T \setminus B \in \mathfrak{I}$$

olur.

### **İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. A kümesinin  $P^*$ -açık küme olduğunu farzedelim.

$$\mathfrak{Int}^*(\mathfrak{Cl}(A)) \cup (T \setminus A) \subset B$$

ve B kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında yarı-açık küme olsun.

Bu yüzden,

$$\begin{aligned} & T \setminus [\mathfrak{Int}^*(\mathfrak{Cl}(A)) \cup (T \setminus A)] \\ &= (T \setminus \mathfrak{Int}^*(\mathfrak{Cl}(A))) \cap A \\ &= \mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Int}(T \setminus A)) \cap A \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} & T \setminus [\mathfrak{Int}^*(\mathfrak{Cl}(A)) \cup (T \setminus A)] \\ &= (T \setminus \mathfrak{Int}^*(\mathfrak{Cl}(A))) \cap A \\ &= \mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Int}(T \setminus A)) \cap A \end{aligned}$$

ifadesini ele alalım.

O halde,  $T \setminus B$  kümesi, yarı-kapalı kümedir ve

$$\begin{aligned} & T \setminus B \\ & \subset \mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Int}(T \setminus A)) \setminus (T \setminus A) \end{aligned}$$

olur ve  $T \setminus A$  kümesi,  $P^*$ -kapalı kümedir.

Teorem 3.16.'da  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $A \subset T$  kümesi,  $P^*$ -kapalı küme iken

$$\begin{aligned} & B \\ & \subset \mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Int}(A)) \setminus A \end{aligned}$$

olacak biçimde  $B$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-kapalı küme ise

$$\mathfrak{Cl}^*(B) \in \mathfrak{S}$$

olur demiştik.

O halde,  $T \setminus B$  kümesi, yarı-kapalı kümedir ve

$$\begin{aligned} & T \setminus B \\ & \subset \mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Int}(T \setminus A)) \setminus (T \setminus A) \end{aligned}$$

olur ve  $T \setminus A$  kümesi,  $P^*$ -kapalı küme olması elimizde vardır.

Bu ifadenin sonucu olarak

$$\mathfrak{Cl}^*(T \setminus B) \in \mathfrak{S}$$

olur ve

$$T \setminus B \in \mathfrak{S}$$

olur.

**Teorem 3.23.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında, her bir  $t \in T$  için;  $\{t\}$  kümesi, yarı-kapalı kümedir veya  $\{t\}$  kümesi,  $P^*$ -açık kümedir.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal uzayında,  $t \in T$  için  $\{t\}$  kümesinin yarı-kapalı küme olmadığını farzedelim.

$$B \subset \{t\}$$

ve  $B$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-kapalı küme olsun.

O halde

$$B = \emptyset$$

ve de

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}I^*(B) \setminus B \\ \subset \mathfrak{S}nt^*(\mathfrak{C}I(\{t\})) \end{aligned}$$

olacak biçimde

$$B \in \mathfrak{S}$$

vardır.

Teorem 3.9.'da  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında,  $A \subset T$  kümesi  $P^*$ -açık kümedir ancak ve ancak

$$B \subset A$$

olan her yarı-kapalı  $B$  kümesi için,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}I^*(B) \setminus C \\ \subset \mathfrak{S}nt^*(\mathfrak{C}I(A)) \end{aligned}$$

olacak biçimde  $\mathfrak{S}$  idealinde bir  $C$  kümesi vardır demiştik.

Buradan  $\{t\}$  kümesi,  $P^*$ -açık kümedir.

**Tanım 3.24.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun. Eğer  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında, her açık küme  $\star$ -kapalı küme ise  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayına,  $F^*$ -uzay denir (Acikgoz ve ark., 2008).

**Teorem 3.25.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayı  $F^*$ -uzay ise  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında, her küme  $P^*$ -kapalı kümedir.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayı  $F^*$ -uzay olsun.

$$C \subset B \subset T$$

ve  $B$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-açık küme olsun.

O halde,

$$\begin{aligned} & \mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(C)) \cap (T \setminus \mathfrak{S}nt^*(B)) \\ &= \mathfrak{S}nt(C) \cap (T \setminus \mathfrak{S}nt^*(B)) \\ &= \emptyset \\ &\in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

olur.

Bu yüzden  $C$  kümesi,  $P^*$ -kapalı kümedir.

Sonuç olarak,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her  $C$  kümesi  $P^*$ -kapalı kümedir.

## BÖLÜM 4

### DİĞER ÖZELLİKLER

Bu bölümde,  $P^*$ -kapalı kümelerin diğer özellikleri çalışılmaktadır.

Ayrıca bir  $P^*$ -kapalı  $A$  kümesi için bir  $f$  fonksiyonu altında  $f(A)$  kümesinin de  $P^*$ -kapalı küme olması durumu ispatlanmaktadır.

#### **Teorem 4.1.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A$  ve  $B$  kümeleri,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında kümeler olsun (Janković ve Hamlett, 1990).

(i)  $A \subset B$  ise  $A^* \subset B^*$ ,

(ii)  $(A^*)^* \subset A^*$ .

#### **Teorem 4.2.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.  $A$  kümesi,  $P^*$ -kapalı küme ve

$$A \subset B \subset (\mathfrak{S}nt(A))^*$$

olsun. O halde  $B$  kümesi,  $P^*$ -kapalı kümedir.

#### **İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay,  $A \subset T$ ,  $A$  kümesi  $P^*$ -kapalı küme ve

$$A \subset B \subset (\mathfrak{S}nt(A))^*$$

olsun.

$$B \subset C$$

olacak biçimde  $C$  kümesinin  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-açık küme olduğunu varsayalım.

Böylece

$$\begin{aligned} A \\ \subset C \end{aligned}$$

olur.

$A$  kümesi  $P^*$ -kapalı küme olduğundan,

$$(\mathfrak{S}nt(A))^* \setminus \mathfrak{S}nt^*(C) \in \mathfrak{S}$$

olur.

$$B$$

$$\subset (\mathfrak{I}nt(A))^*$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{I}nt(B))^* \\ & \subset \left( (\mathfrak{I}nt(A))^* \right)^* \\ & \subset (\mathfrak{I}nt(A))^* \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{I}nt(B))^* \setminus \mathfrak{I}nt^*(C) \\ & \subset (\mathfrak{I}nt(A))^* \setminus \mathfrak{I}nt^*(C) \\ & \in \mathfrak{I} \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

O halde

$$(\mathfrak{I}nt(B))^* \setminus \mathfrak{I}nt^*(C) \in \mathfrak{I}$$

olur.

Sonuç olarak B kümesi,  $P^*$ -kapalı kümedir.

**Teorem 4.3.**

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında A kümesi,  $P^*$ -kapalı küme ve eğer

$$A \subset B \subset \mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(A))$$

ise B kümesi,  $P^*$ -kapalı kümedir.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında A kümesinin  $P^*$ -kapalı küme,

$$A \subset B \subset \mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(A))$$

ve C kümesinin,

$$B \subset C$$

olacak biçimde  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında yarı-açık küme olduğunu varsayalım. A kümesi,  $P^*$ -kapalı küme olduğundan

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(A)) \setminus \mathfrak{I}nt^*(C) \in \mathfrak{I}$$

olur.

O halde,



$$\begin{aligned} & \mathcal{CI}^*(\mathfrak{Int}(B)) \setminus \mathfrak{Int}^*(C) \\ & \subset \mathcal{CI}^*(\mathfrak{Int}(A)) \setminus \mathfrak{Int}^*(C) \\ & \in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

olur.

Bu yüzden,

$$\mathcal{CI}^*(\mathfrak{Int}(B)) \setminus \mathfrak{Int}^*(C) \in \mathfrak{S}$$

ve B kümesi,  $P^*$ -kapalı kümedir.

**Teorem 4.4.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her açık  $P^*$ -kapalı A kümesi için,  $\mathcal{CI}^*(A)$  kümesi  $P^*$ -kapalı kümedir.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. Kabul edelim ki  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında A kümesi açık  $P^*$ -kapalı küme olsun. Teorem 4.3.'te  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında A kümesi  $P^*$ -kapalı küme ve

$$A \subset B \subset \mathcal{CI}^*(\mathfrak{Int}(A))$$

iken B kümesinin de  $P^*$ -kapalı küme olduğunu gösterdik.

Böylece  $\mathcal{CI}^*(A)$  kümesi  $P^*$ -kapalı kümedir.

**Teorem 4.5.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. A kümesi  $P^*$ -açık küme,

$$\mathfrak{Int}^*(\mathcal{CI}(A)) \subset B \text{ ve } B \subset A$$

ise B kümesi,  $P^*$ -açık kümedir.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun. A kümesinin  $P^*$ -açık küme,

$$\mathfrak{Int}^*(\mathcal{CI}(A)) \subset B$$

ve

$$B \subset A$$

olduğunu varsayalım.

Böylece

$$T \setminus A$$

$$\begin{aligned} &\subset T \setminus B \\ &\subset T \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}l(A)) \end{aligned}$$

ve  $T \setminus A$  kümesi,  $P^*$ -kapalı kümedir.

$$\begin{aligned} &T \setminus A \\ &\subset T \setminus B \\ &\subset \mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(T \setminus A)) \end{aligned}$$

olduğundan ve Teorem 4.3.'te  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında  $A \subset T$  kümesi  $P^*$ -kapalı küme ve

$$A \subset B \subset \mathfrak{C}l^*(\mathfrak{I}nt(A))$$

ise  $B$  kümesi  $P^*$ -kapalı kümedir dediğimizden,  $T \setminus B$  kümesi  $P^*$ -kapalı kümedir.

Bu yüzden  $B$  kümesi,  $P^*$ -açık kümedir.

#### **Teorem 4.6.**

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.  $A$  kümesinin, kapalı  $P^*$ -açık küme olduğunu farzedelim. O halde  $\mathfrak{I}nt^*(A)$  kümesi,  $P^*$ -açık kümedir.

#### **İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset T$  olsun.  $A$  kümesinin, kapalı  $P^*$ -açık küme olduğunu farzedelim. Teorem 4.5.'te  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında  $A \subset T$  kümesi  $P^*$ -açık küme,

$$\mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}l(A)) \subset B$$

ve

$$B \subset A$$

ise  $B$  kümesi,  $P^*$ -açık kümedir demiştik.

Buradan  $\mathfrak{I}nt^*(A)$  kümesi,  $P^*$ -açık kümedir.

#### **Uyarı 4.7.**

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $A, B \subset T$  olsun.  $A$  ve  $B$  kümeleri,  $P^*$ -kapalı kümeler iken  $A \cup B$  kümesi,  $P^*$ -kapalı küme olmayabilir.

#### **Örnek 4.8.**

$$\begin{aligned} T &= \{k, l, m, n\}, \\ \sigma &= \{\{k, l, n\}, \{k, n\}, \{k\}, \{k, l\}, \{n\}, \emptyset, T\} \end{aligned}$$

ve

$$\mathfrak{S} = \{\{k\}, \emptyset\}$$

olsun.  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında

$$A = \{k\}$$

ve

$$B = \{l\}$$

kümeleri,  $P^*$ -kapalı kümelerdir ama  $A \cup B$  kümesi,  $P^*$ -kapalı küme değildir.

#### **Uyarı 4.9.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $A, B \subset T$  olsun.  $A$  ve  $B$  kümeleri,  $P^*$ -kapalı kümeler iken  $A \cap B$  kümesi,  $P^*$ -kapalı küme olmayabilir.

#### **Örnek 4.10.**

$$T = \{k, l, m, n, o\},$$

$$\sigma = \{\{k, l, n\}, \{k, n\}, \{n\}, \{k, l\}, \{k\}, \emptyset, T\}$$

ve

$$\mathfrak{S} = \{\{l\}, \emptyset\}$$

olsun.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında

$$A = \{k, m, n, o\}$$

ve

$$B = \{l, m, n, o\}$$

kümeleri,  $P^*$ -kapalı kümelerdir ama  $A \cap B$  kümesi,  $P^*$ -kapalı küme değildir.

#### **Tanım 4.11.**

$(T_1, \sigma, \mathfrak{S})$  ve  $(T_2, \rho, \mathcal{J})$  ideal topolojik uzaylar ve  $f: (T_1, \sigma, \mathfrak{S}) \rightarrow (T_2, \rho, \mathcal{J})$  fonksiyon olsun.

Eğer  $(T_1, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her  $\star$ -kapalı  $A$  kümesi için  $f(A)$  kümesi,  $\star$ -kapalı küme ise  $f: (T_1, \sigma, \mathfrak{S}) \rightarrow (T_2, \rho, \mathcal{J})$  fonksiyonuna  $\star$ -kapalı denir (Ekici, 2011b).

#### **Tanım 4.12.**

$(T_1, \sigma)$  ve  $(T_2, \rho)$  topolojik uzaylar ve  $f: (T_1, \sigma) \rightarrow (T_2, \rho)$  fonksiyon olsun. Eğer her  $t \in T_1$  ve  $f(t)$  elemanını içeren her yarı-açık  $A$  kümesi için

$$f(B) \subset A$$

olacak biçimde  $t$  elemanını içeren  $(T_1, \sigma)$  topolojik uzayında  $B$  açık kümesi varsa,  $f: (T_1, \sigma) \rightarrow (T_2, \rho)$  fonksiyonuna  $s$ -sürekli denir (Cameron ve Woods).

**Teorem 4.13.**

$(T_1, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay,  $f: (T_1, \sigma) \rightarrow (T_2, \rho)$  fonksiyon,  $f(\mathfrak{S}) = \{f(I): I \in \mathfrak{S}\}$  olmak üzere  $(T_2, \rho, f(\mathfrak{S}))$  ideal topolojik uzay ve  $f: (T_1, \sigma, \mathfrak{S}) \rightarrow (T_2, \rho, f(\mathfrak{S}))$  fonksiyon olsun.

$f: (T_1, \sigma, \mathfrak{S}) \rightarrow (T_2, \rho, f(\mathfrak{S}))$  fonksiyonu birebir, örten,  $\star$ -kapalı ve  $s$ -sürekli fonksiyon ise  $(T_1, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $P^*$ -kapalı  $A$  kümesi için,  $f(A)$  kümesi  $P^*$ -kapalı kümedir.

**İspat:**

$(T_1, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay,  $f: (T_1, \sigma) \rightarrow (T_2, \rho)$  fonksiyon,  $f(\mathfrak{S}) = \{f(I): I \in \mathfrak{S}\}$  olmak üzere  $(T_2, \rho, f(\mathfrak{S}))$  ideal topolojik uzay ve  $f: (T_1, \sigma, \mathfrak{S}) \rightarrow (T_2, \rho, f(\mathfrak{S}))$  fonksiyon olsun.

$f: (T_1, \sigma, \mathfrak{S}) \rightarrow (T_2, \rho, f(\mathfrak{S}))$  fonksiyonu birebir, örten,  $\star$ -kapalı ve  $s$ -sürekli fonksiyon olsun.  $A \subset T_1$  kümesi,  $P^*$ -kapalı küme olsun.

$B$  kümesi,  $(T_2, \rho, f(\mathfrak{S}))$  ideal topolojik uzayında yarı-açık küme olacak biçimde

$$f(A) \subset B$$

olsun.

Bu nedenle

$$A \subset f^{-1}(B)$$

ve

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(A)) \setminus \mathfrak{S}nt^*(f^{-1}(B)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

Buna binaen,

$$f(\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(A))) \setminus f(\mathfrak{S}nt^*(f^{-1}(B))) \in f(\mathfrak{S})$$

olur.

$f: (T_1, \sigma, \mathfrak{S}) \rightarrow (T_2, \rho, f(\mathfrak{S}))$  fonksiyonu birebir, örten,  $\star$ -kapalı fonksiyon ve  $s$ -sürekli olduğundan,

$$f(\mathcal{C}l^*(\mathfrak{I}nt(A))) \setminus \mathfrak{I}nt^*(B) \in f(\mathfrak{I})$$

olur ve

$$\mathcal{C}l^*(\mathfrak{I}nt(f(A)))$$

kümesi,

$$f(\mathcal{C}l^*(\mathfrak{I}nt(A)))$$

kümesinin alt kümesi olur.

Bu sebeple,

$$\mathcal{C}l^*(\mathfrak{I}nt(f(A))) \setminus \mathfrak{I}nt^*(B) \in f(\mathfrak{I})$$

ve  $f(A)$  kümesi,  $P^*$ -kapalı kümedir.

#### **Tanım 4.14.**

$(T_1, \sigma, \mathfrak{I})$  ve  $(T_2, \rho, \mathcal{J})$  ideal topolojik uzay olsunlar.  $f: (T_1, \sigma, \mathfrak{I}) \rightarrow (T_2, \rho, \mathcal{J})$  fonksiyon olsun.

$(T_1, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında her  $\star$ -açık  $A$  kümesi için eğer  $f(A)$  kümesi  $\star$ -açık küme ise  $f: (T_1, \sigma, \mathfrak{I}) \rightarrow (T_2, \rho, \mathcal{J})$  fonksiyonuna  $\star$ -açık denir (Ekici ve Özen, 2012).

#### **Sonuç 4.15.**

$(T_1, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay,  $f: (T_1, \sigma) \rightarrow (T_2, \rho)$  fonksiyon,  $f(\mathfrak{I}) = \{f(I) : I \in \mathfrak{I}\}$  olmak üzere  $(T_2, \rho, f(\mathfrak{I}))$  ideal topolojik uzay ve  $f: (T_1, \sigma, \mathfrak{I}) \rightarrow (T_2, \rho, f(\mathfrak{I}))$  fonksiyon olsun.

$f: (T_1, \sigma, \mathfrak{I}) \rightarrow (T_2, \rho, f(\mathfrak{I}))$  fonksiyonu birebir, örten,  $\star$ -açık ve  $s$ -süreklili fonksiyon ise  $(T_1, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında her bir  $P^*$ -kapalı  $A$  kümesi için  $f(A)$  kümesi  $P^*$ -kapalı kümedir.

#### **İspat:**

$(T_1, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay,  $f: (T_1, \sigma) \rightarrow (T_2, \rho)$  fonksiyon,  $f(\mathfrak{I}) = \{f(I) : I \in \mathfrak{I}\}$  olmak üzere  $(T_2, \rho, f(\mathfrak{I}))$  ideal topolojik uzay ve  $f: (T_1, \sigma, \mathfrak{I}) \rightarrow (T_2, \rho, f(\mathfrak{I}))$  fonksiyon olsun.

$f: (T_1, \sigma, \mathfrak{I}) \rightarrow (T_2, \rho, f(\mathfrak{I}))$  fonksiyonu birebir, örten,  $\star$ -açık ve  $s$ -süreklili fonksiyon olsun. Farzedelim ki  $(T_1, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında  $A$  kümesi bir  $P^*$ -kapalı küme olsun.

Teorem 4.13.'te  $(T_1, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay,  $f: (T_1, \sigma) \rightarrow (T_2, \rho)$  fonksiyon,  $f(\mathfrak{I}) = \{f(I) : I \in \mathfrak{I}\}$  olmak üzere;  $(T_2, \rho, f(\mathfrak{I}))$  ideal topolojik uzay ve  $f: (T_1, \sigma, \mathfrak{I}) \rightarrow (T_2, \rho, f(\mathfrak{I}))$  fonksiyon olsun.

$f: (T_1, \sigma, \mathfrak{I}) \rightarrow (T_2, \rho, f(\mathfrak{I}))$  fonksiyonu birebir, örten,  $\star$ -kapalı ve s-sürekli fonksiyon ise  $(T_1, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında  $P^*$ -kapalı  $A$  kümesi için,  $f(A)$  kümesi  $P^*$ -kapalı kümedir demiştik.

Bunun sonucu olarak  $f(A)$  kümesi,  $P^*$ -kapalı kümedir.



## BÖLÜM 5

### PC\*-KAPALI KÜMELER VE ÖN<sub>1</sub>\*-CLOPEN KÜMELER

Bu bölümde, PC\*-kapalı kümeler tanıtılmaktadır.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında bir  $U$  kümesinin, PC\*-kapalı küme olmasının denk koşulları verilmektedir.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında bir  $U$  kümesi, ön<sub>1</sub>\*-açık ve ön<sub>1</sub>\*-kapalı küme ise  $U$  kümesinin PC\*-kapalı küme olduğu ancak tersinin sağlanmadığı örneklerle gösterilmektedir.

PC\*-kapalı kümelerin  $\mathcal{RPC}_1$  ve ön<sub>1</sub>\*-kapalı kümeleri,  $\mathcal{RPC}_1$  ve zayıf  $I_{rg}$ -kapalı kümeleri içerdikleri gösterilmektedir.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her bir  $U$  kümesinin, PC\*-kapalı küme olmasının denk koşulları gösterilmektedir.

#### Tanım 5.1.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer

$$U \subset V$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık  $V$  alt kümesi için

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(U)) \setminus \mathfrak{S}nt^*(\mathfrak{C}I(V)) \in \mathfrak{S}$$

oluyorsa,  $U$  kümesine PC\*-kapalı küme denir.

#### Teorem 5.2.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.  $U$  kümesi PC\*-kapalı kümedir ancak ve ancak

$$U \subset V$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık  $V$  alt kümesi için

$$(\mathfrak{S}nt(U))^* \setminus \mathfrak{S}nt^*(\mathfrak{C}I(V)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

#### İspat:

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

( $\Rightarrow$ ) : U kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesi olsun.

Kabul edelim ki;

$$U \subset V$$

ve V kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayının yarı-açık alt kümesi olsun.

U kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesi olduğundan

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(V)) \in \mathfrak{I}$$

olur.

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U))$$

kümesinin,

$$\mathfrak{I}nt(U) \cup (\mathfrak{I}nt(U))^*$$

kümesine eşit olduğu biliniyor.

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(V)) \in \mathfrak{I}$$

oldüğundan,

$$(\mathfrak{I}nt(U) \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(V)))$$

kümesi ve

$$((\mathfrak{I}nt(U))^* \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(V)))$$

kümesinin birleşimi,  $\mathfrak{I}$  idealinin elemanıdır.

Bu yüzden,

$$((\mathfrak{I}nt(U))^* \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(V)))$$

kümesi,

$$(\mathfrak{I}nt(U) \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(V)))$$

kümesi ve

$$((\mathfrak{I}nt(U))^* \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(V)))$$

kümesinin birleşiminin alt kümesidir.

Bunun sonucu olarak,

$$(\mathfrak{I}nt(U))^* \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(V)) \in \mathfrak{I}$$

olur.

( $\Leftarrow$ ) : Kabul edelim ki;

$$U \subset V$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık V alt kümesi için

$$(\mathfrak{I}nt(U))^* \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(V)) \in \mathfrak{I}$$



olsun.

$$U \subset Y$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-açık alt kümesi olsun.

O halde

$$(\mathfrak{Snt}(U))^* \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(Y)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

$$\begin{aligned} \mathfrak{Snt}(U) \\ \subset \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(Y)) \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

Bu ifade,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Snt}(U) \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(Y)) \\ = \emptyset \\ \in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

ifadesini gerektirir.

Ayrıca

$$\mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Snt}(U)) \cap (T \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(Y)))$$

kümesi,

$$((\mathfrak{Snt}(U))^* \cup \mathfrak{Snt}(U)) \cap (T \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(Y)))$$

kümesine eşittir ve de

$$((\mathfrak{Snt}(U))^* \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(Y)))$$

ve

$$(\mathfrak{Snt}(U) \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(Y))) \in \mathfrak{S}$$

kümelerinin birleşimine eşittir.

Böylece  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesidir.

### **Teorem 5.3.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer  $U$  kümesi,  $\text{ön}_1^*$ -açık ve  $\text{ön}_1^*$ -kapalı küme ise  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesidir.

### **İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

$U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $\text{ön}_1^*$ -açık ve  $\text{ön}_1^*$ -kapalı alt kümesi olsun.

$$U \subset V$$

olan,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $V$  yarı-açık alt kümesini alalım.

$$\begin{aligned} T \setminus U \\ \subset \mathfrak{S}_{\text{nt}}^*(\mathfrak{C}I(T \setminus U)) \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

O zaman

$$\begin{aligned} T \setminus \mathfrak{S}_{\text{nt}}^*(\mathfrak{C}I(T \setminus U)) \\ \subset U \end{aligned}$$

olur.

Bu ifade

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}I^*(T \setminus \mathfrak{C}I(T \setminus U)) \\ \subset U \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}_{\text{nt}}(U)) \\ \subset U \end{aligned}$$

ifadelerini gerektirir.

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}_{\text{nt}}(U)) \\ \subset U \\ \subset \mathfrak{S}_{\text{nt}}^*(\mathfrak{C}I(U)) \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

$$U \subset V$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}_{\text{nt}}(U)) \\ \subset \mathfrak{S}_{\text{nt}}^*(\mathfrak{C}I(U)) \\ \subset \mathfrak{S}_{\text{nt}}^*(\mathfrak{C}I(V)) \end{aligned}$$

olur.

Bu yüzden

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}_{\text{nt}}(U)) \setminus \mathfrak{S}_{\text{nt}}^*(\mathfrak{C}I(V)) \\ = \emptyset \\ \in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

ve de  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesi olur.

**Uyarı 5.4.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesinin,  $\text{ön}_1^*$ -kapalı ve  $\text{ön}_1^*$ -açık küme olması gerekmemektedir:

**Örnek 5.5.**

$$T = \{a, b, c, d, e\},$$

$$\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, T\}$$

ve

$$\mathfrak{S} = \{\emptyset, \{b\}\}$$

olsun.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında

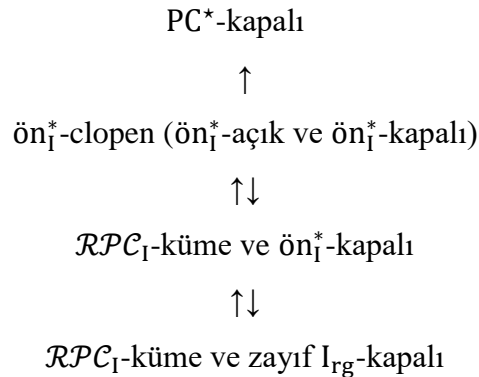
$$U = \{b, d\}$$

kümesi,  $PC^*$ -kapalı kümedir ama  $U$  kümesi,  $\text{ön}_1^*$ -kapalı ve  $\text{ön}_1^*$ -açık küme değildir.

**Uyarı 5.6.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

$U$  kümesi için, Teorem 2.15. ve Teorem 5.3.'ten, Uyarı 5.4.'ten ve Örnek 5.5.'ten aşağıdaki gerektirmeler elde edilir.



**Teorem 5.7.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.  $U$  kümesi,  $PC^*$ -kapalı kümedir ancak ve ancak

$$U \subset V$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık  $V$  alt kümesi için,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{Snt}(U))^* \\ & \subset \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(V)) \cup Y \end{aligned}$$

olacak biçimde

$$Y \in \mathfrak{S}$$

vardır.

### İspat:

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

Teorem 5.2.'de  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $U$  kümesi, bir alt kümesi iken;  $U$  kümesi,  $PC^*$ -kapalı kümedir ancak ve ancak

$$U \subset V$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık  $V$  alt kümesi için,

$$(\mathfrak{Snt}(U))^* \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(V)) \in \mathfrak{S}$$

olur demiştik.

Bu teoremden sonuca ulaşılır.

### Teorem 5.8.

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

$U$  kümesi,  $PC^*$ -kapalı kümedir ancak ve ancak

$$U \subset V$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık  $V$  alt kümesi için,

$$\mathfrak{Cl}^*(\mathfrak{Snt}(U)) \subset \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(V)) \cup Y$$

olacak biçimde

$$Y \in \mathfrak{S}$$

vardır.

### İspat:

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

Teorem 5.7.'de  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının bir  $U$  alt kümesi,  $PC^*$ -kapalı kümedir ancak ve ancak

$$U \subset V$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık  $V$  alt kümesi için

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{S}nt(U))^* \\ & \subset \mathfrak{S}nt^*(\mathfrak{C}I(V)) \cup Y \end{aligned}$$

olacak biçimde

$$Y \in \mathfrak{S}$$

vardır demiştik.

Bu teoremden istenilen neticeye ulaşılır.

### **Teorem 5.9.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her küme  $PC^*$ -kapalı kümedir ancak ve ancak  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık  $V$  alt kümesi için,

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(V)) \setminus \mathfrak{S}nt^*(\mathfrak{C}I(V)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

### **İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.

$(\Rightarrow)$  : Kabul edelim ki;  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her küme,  $PC^*$ -kapalı küme olsun.  $V$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-açık alt kümesi olsun.

Bu ifade

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(V)) \setminus \mathfrak{S}nt^*(\mathfrak{C}I(V)) \in \mathfrak{S}$$

ifadesini gerektirir.

$(\Leftarrow)$  : Kabul edelim ki;  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık  $Y$  alt kümesi için,

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(Y)) \setminus \mathfrak{S}nt^*(\mathfrak{C}I(Y)) \in \mathfrak{S}$$

olsun.

$$U \subset V$$

ve  $V$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-açık alt kümesi olsun.

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{S}nt(U)) \cap (T \setminus \mathfrak{S}nt^*(\mathfrak{C}I(V)))$$

$$\begin{aligned} &\subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(V)) \cap (T \setminus \mathfrak{S}nt^*(\mathcal{C}I(V))) \\ &\in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

Böylece

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(U)) \cap (T \setminus \mathfrak{S}nt^*(\mathcal{C}I(V))) \in \mathfrak{S}$$

olur.

Sonuç olarak U kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesidir.

**Teorem 5.10.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her küme  $PC^*$ -kapalı kümedir ancak ve ancak  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık alt kümesi V için,

$$(\mathfrak{S}nt(V))^* \setminus \mathfrak{S}nt^*(\mathcal{C}I(V)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.

$(\Rightarrow)$  :  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında her bir kümenin,  $PC^*$ -kapalı küme olduğunu varsayalım. V kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-açık alt kümesi olsun.

Teorem 5.2.'de  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının U kümesi bir alt kümesi iken; U kümesi  $PC^*$ -kapalı kümedir ancak ve ancak

$$U \subset V$$

olan,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık V alt kümesi için

$$(\mathfrak{S}nt(U))^* \setminus \mathfrak{S}nt^*(\mathcal{C}I(V)) \in \mathfrak{S}$$

olur demiştik. V kümesi,  $PC^*$ -kapalı küme olduğundan ve yarı-açık küme olduğundan Teorem 5.2.'den

$$(\mathfrak{S}nt(V))^* \setminus \mathfrak{S}nt^*(\mathcal{C}I(V)) \in \mathfrak{S}$$

ifadesini elde ederiz.

$(\Leftarrow)$  :  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık alt kümesi Y için,

$$(\mathfrak{S}nt(Y))^* \cap (T \setminus \mathfrak{S}nt^*(\mathcal{C}I(Y))) \in \mathfrak{S}$$

olsun.

$$U \subset V \subset T$$

ve  $V$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-açık alt kümesi olsun.

Bu ifade

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{Snt}(U))^* \cap (T \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(V))) \\ & \subset (\mathfrak{Snt}(V))^* \cap (T \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(V))) \\ & \in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

ifadesini gerektirir.

Buradan

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{Snt}(U))^* \cap (T \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(V))) \\ & \subset (\mathfrak{Snt}(V))^* \cap (T \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(V))) \\ & \in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

ifadesini ele alalım.

Dolayısıyla

$$(\mathfrak{Snt}(U))^* \cap (T \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(V))) \in \mathfrak{S}$$

olur. Teorem 5.2.'de  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $U$  kümesi bir alt kümesi iken;  $U$  kümesi  $PC^*$ -kapalı kümedir ancak ve ancak

$$U \subset V$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-açık  $V$  alt kümesi için

$$(\mathfrak{Snt}(U))^* \setminus \mathfrak{Snt}^*(\mathfrak{Cl}(V)) \in \mathfrak{S}$$

olur demiştik.

Böylece  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesidir.

## BÖLÜM 6

### PC\*-AÇIK KÜMELER VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, PC\*-açık kümeler kavramı sunuldu ve özellikleri çalışıldı.

PC\*-açık küme olmanın denk koşulları sunulmaktadır.

#### **Tanım 6.1.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının alt kümesi olsun.

Eğer  $T \setminus U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının PC\*-kapalı alt kümesi ise  $U$  kümesine, PC\*-açık küme denir.

#### **Teorem 6.2.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $U$  kümesi  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında bir küme olsun.  $U$  kümesi, PC\*-açık kümedir ancak ve ancak

$$V \subset U$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-kapalı alt kümesi  $V$  için

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(V)) \setminus Y \subset \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(U))$$

olacak biçimde

$$Y \in \mathfrak{S}$$

kümesi vardır.

#### **İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay olsun.  $U$  kümesi  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında bir küme olsun.

$(\Rightarrow)$  :  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $U$  kümesi, PC\*-açık küme olsun ve

$$V \subset U$$

olacak biçimde  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $V$  kümesi yarı-kapalı alt küme olsun.

Bu ifade

$$T \setminus U$$

$$\subset T \setminus V$$

ifadesini,  $T \setminus V$  kümesinin yarı-açık küme olduğunu ve  $T \setminus U$  kümesinin  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının PC\*-kapalı alt kümesi olduğunu gerektirir.



$T \setminus U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesi olduğundan,

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(T \setminus U)) \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(T \setminus V)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(T \setminus U)) \cap \mathcal{C}I^*(T \setminus \mathcal{C}I(T \setminus V)) \\ &= \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(T \setminus U)) \cap \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(V)) \\ &\in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

$$\begin{aligned} & Y \\ &= \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(T \setminus U)) \cap \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(V)) \end{aligned}$$

alalım.

O halde

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(T \setminus U)) \\ &\subset \mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(T \setminus V)) \cup Y \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} & (T \setminus Y) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(T \setminus V))) \\ &\subset T \setminus (\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(T \setminus U))) \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

Böylece

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(V)) \setminus Y \\ &\subset T \setminus \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(T \setminus U)) \\ &= \mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(U)) \end{aligned}$$

olur.

En sonunda

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(V)) \setminus Y \\ &\subset \mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(U)) \end{aligned}$$

olacak biçimde

$$Y \in \mathfrak{S}$$

vardır.

$(\Leftarrow)$  :

$$D \subset U$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-kapalı  $D$  alt kümesi için,

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{T}nt(D)) \setminus Y \subset \mathfrak{T}nt^*(\mathcal{C}I(U))$$

olacak biçimde

$$Y \in \mathfrak{S}$$

kümesinin var olduğunu farzedelim.

$$T \setminus U \subset V$$

ve  $V$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-açık alt kümesi olsun.

O halde

$$\begin{aligned} T \setminus V \\ \subset U \end{aligned}$$

ve  $T \setminus V$  kümesi, yarı-kapalı kümedir.

Bu gerektirir ki;

$$\begin{aligned} \mathcal{C}I^*(\mathfrak{T}nt(T \setminus V)) \setminus Y \\ \subset \mathfrak{T}nt^*(\mathcal{C}I(U)) \end{aligned}$$

olacak biçimde

$$Y \in \mathfrak{S}$$

kümesi vardır.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}I^*(\mathfrak{T}nt(T \setminus V)) \cap (T \setminus Y) \\ \subset \mathfrak{T}nt^*(\mathcal{C}I(U)) \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

Ayrıca

$$\begin{aligned} T \setminus (\mathfrak{T}nt^*(\mathcal{C}I(U))) \\ \subset T \setminus (\mathcal{C}I^*(\mathfrak{T}nt(T \setminus V)) \setminus Y) \end{aligned}$$

olur.

O halde

$$\begin{aligned} \mathcal{C}I^*(\mathfrak{T}nt(T \setminus U)) \\ \subset \mathfrak{T}nt^*(\mathcal{C}I(V)) \cup Y \end{aligned}$$

olur.

Bu ifade gerektirir ki;

$$\begin{aligned} \mathcal{C}I^*(\mathfrak{T}nt(T \setminus U)) \setminus \mathfrak{T}nt^*(\mathcal{C}I(V)) \\ \subset Y \end{aligned}$$

olur.

Dolayısıyla

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(T \setminus U)) \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(V)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

Son olarak  $T \setminus U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $PC^*$ -kapalı kümedir ve  $U$  kümesi,  $PC^*$ -açık kümedir.

**Teorem 6.3.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesi olsun.

$$Y \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-kapalı alt kümesi olsun.

O halde

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesi olsun.

$$Y \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-kapalı alt kümesi olsun.

Bu durum

$$\begin{aligned} Y \\ \subset T \setminus U \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} U \\ \subset T \setminus Y \end{aligned}$$

ifadelerini gerektirir.

$U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesi olduğundan,

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(T \setminus Y)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus (T \setminus \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y))) \in \mathfrak{S}$$

ifadesini elde ederiz.

Ayrıca

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y))$$

$$\subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(U)) \setminus (T \setminus \mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(Y)))$$

olur.

Dolayısıyla

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(Y)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

#### **Sonuç 6.4.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesi olsun.

$$Y \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(U)) \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-kapalı alt kümesi olsun.

O halde

$$\mathfrak{S}nt(Y) \in \mathfrak{S}$$

olur.

#### **İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesi olsun.

$$Y \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(U)) \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-kapalı alt kümesi olsun.

Teorem 6.3.'te  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $U$  kümesi  $PC^*$ -kapalı alt küme,

$Y$

$$\subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(U)) \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-kapalı alt kümesi iken

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(Y)) \in \mathfrak{S}$$

olur demiştik.

Buradan

$$\mathfrak{S}nt(Y) \in \mathfrak{S}$$

elde edilir.

#### **Uyarı 6.5.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay,  $U$  kümesi  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesi,

$$Y \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayının yarı-kapalı alt kümesi olsun.

Bu koşullar her zaman

$$\mathcal{C}I^*(Y) \in \mathfrak{I}$$

veya

$$Y \in \mathfrak{I}$$

ifadelerini gerektirmez:

### Örnek 6.6.

$$T = \{a, b, c, d, e\},$$

$$\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, T\}$$

ve

$$\mathfrak{I} = \{\emptyset, \{c\}\}$$

olsun.

O halde  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında

$$U = \{a, b\}$$

kümesi,  $PC^*$ -kapalı kümedir.

Ayrıca

$$Y = \{c, d, e\}$$

kümesi yarı-kapalı kümedir ve

$Y$

$$\subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus U$$

olur.

Fakat

$$\mathcal{C}I^*(Y)$$

$$= Y$$

$$\notin \mathfrak{I}$$

olur.

### Teorem 6.7.

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında  $PC^*$ -kapalı küme olsun.

O halde  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus U$$

kümesi,  $PC^*$ -açık kümedir.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $PC^*$ -kapalı küme olsun.

$$Y \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-kapalı alt küme olsun.

Teorem 6.3.'te  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $U$  kümesi  $PC^*$ -kapalı alt küme,

$$Y \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-kapalı alt kümesi iken

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y)) \in \mathfrak{S}$$

olur demiştik.

Buradan

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y)) \in \mathfrak{S}$$

ifadesini elde ederiz.

O halde

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y)) \setminus \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y))$$

$$= \emptyset$$

$$\subset \mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus U))$$

olacak biçimde

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y)) \in \mathfrak{S}$$

vardır.

Teorem 6.2.'de  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $U$  kümesi  $PC^*$ -açık kümedir ancak ve ancak

$$V \subset U$$

olan  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının her yarı-kapalı alt kümesi  $V$  için

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(V)) \setminus Y$$

$$\subset \mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(U))$$

olacak biçimde

$$Y \in \mathfrak{S}$$

kümesi vardır demiştik.

Böylece

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U)) \setminus U$$

kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında  $PC^*$ -açık kümedir.

**Teorem 6.8.**

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında  $PC^*$ -açık küme olsun.

$$\mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(U)) \cup (T \setminus U) \subset V$$

ve  $V$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayının yarı-açık alt kümesi olsun.

O halde

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(T \setminus V)) \in \mathfrak{I}$$

olur.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayında  $PC^*$ -açık küme,

$$\mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(U)) \cup (T \setminus U) \subset V$$

ve  $V$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{I})$  ideal topolojik uzayının yarı-açık alt kümesi olsun.

$$\begin{aligned} &\mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(U)) \\ &\subset V \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} &T \setminus V \\ &\subset T \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathcal{C}I(U)) \\ &= \mathcal{C}I^*(\mathfrak{I}nt(T \setminus U)) \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca

$$\begin{aligned} &T \setminus U \\ &\subset V \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} &T \setminus V \\ &\subset U \end{aligned}$$

ve de  $T \setminus V$  kümesi, yarı-kapalı kümedir.

O halde

$$\begin{aligned} & T \setminus V \\ & \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(T \setminus U)) \cap U \end{aligned}$$

olur.

Teorem 6.3.'te  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının  $PC^*$ -kapalı alt kümesi  $U$  kümesi,

$$\begin{aligned} & Y \\ & \subset \mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(U)) \setminus U \end{aligned}$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayının yarı-kapalı alt kümesi iken

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(Y)) \in \mathfrak{S}$$

olur demiştik.

Buradan

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(T \setminus V)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

### **Teorem 6.9.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $PC^*$ -kapalı küme olsun.

$$Y \subset (\mathfrak{S}nt(U))^* \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-kapalı küme olsun.

O halde

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(Y)) \in \mathfrak{S}$$

olur.

### **İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay,  $U$  kümesi  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $PC^*$ -kapalı küme,

$$Y \subset (\mathfrak{S}nt(U))^* \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-kapalı küme olsun.

O halde

$$\begin{aligned} & Y \\ & \subset T \setminus U \end{aligned}$$

ve  $T \setminus U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $PC^*$ -açık kümedir.

Bu gerektirir ki;

$$\mathcal{C}I^*(\mathfrak{S}nt(Y)) \setminus Z$$



kümesi,

$$\mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(T \setminus U))$$

kümesinin alt kümesi olacak biçimde

$$Z \in \mathfrak{I}$$

vardır.

$$\begin{aligned} &\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y)) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(T \setminus U))) \\ &\subset Z \end{aligned}$$

ve

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y)) \cap (T \setminus \mathfrak{I}nt^*(\mathfrak{C}I(T \setminus U))) \in \mathfrak{I}$$

ifadelerini elde ederiz.

Ayrıca

kümesinin ve

kümesinin kesişimi,

kümesi ve

kümesinin kesişimine eşittir.

olduğundan;

kümesi,

kümesinin alt kümesidir.

Böylece

ve de

kümesi,  $\mathfrak{I}$  idealinin elemanıdır.

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y))$$

$$\mathfrak{C}I^*(T \setminus \mathfrak{C}I(T \setminus U))$$

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y))$$

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U))$$

$$Y \subset (\mathfrak{I}nt(U))^*$$

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y))$$

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U))$$

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y)) \cap \mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(U))$$

$$\in \mathfrak{I}$$

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{I}nt(Y))$$

**Sonuç 6.10.**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $PC^*$ -kapalı küme olsun.

$$Y \subset (\mathfrak{Snt}(U))^* \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-kapalı küme olsun.

O halde

$$\mathfrak{Snt}(Y) \in \mathfrak{S} \text{ ve } (\mathfrak{Snt}(Y))^* \in \mathfrak{S}$$

olur.

**İspat:**

$(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzay ve  $U$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $PC^*$ -kapalı küme olsun.

$$Y \subset (\mathfrak{Snt}(U))^* \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-kapalı küme olsun.

Teorem 6.9.'da  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında  $U$  kümesi  $PC^*$ -kapalı küme,

$$Y \subset (\mathfrak{Snt}(U))^* \setminus U$$

ve  $Y$  kümesi,  $(T, \sigma, \mathfrak{S})$  ideal topolojik uzayında yarı-kapalı küme iken

$$\mathfrak{C}I^*(\mathfrak{Snt}(Y)) \in \mathfrak{S}$$

olur demiştik.

Buradan

$$\mathfrak{Snt}(Y) \in \mathfrak{S} \text{ ve } (\mathfrak{Snt}(Y))^* \in \mathfrak{S}$$

ifadelerine ulaşılır.

## KAYNAKLAR

- Acikgoz A., Noiri T., Yuksel S., 2010. On  $\ast$ -operfect Sets and  $\alpha$ - $\ast$ -closed Sets. Acta Math. Hungar., 127 (1-2): 146-153.
- Acikgoz A., Yuksel S., Reilly I.L., 2008. A Decomposition of Continuity on  $F^*$ -spaces and Mappings on  $SA^*$ -spaces. SDÜ Fen Edb. Fak. Fen Der., 3: 51-59.
- Cameron D.E., Woods G.. s-continuous and s-open Mappings. Preprint.
- Crossley S.G., Hildebrand S.K., 1971. Semi-closure. Texas J. Sci., 22: 99-112.
- Das P., Koćinac L.D.R., Chandra D., 2016. Some Remarks on Open Covers and Selection Principles Using Ideals. Topology and its Applications, 202: 183-193.
- Das P., Chandra D., 2013. Some Further Results on  $I$ - $\gamma$  and  $I$ - $\gamma_k$ -covers. Topology and its Applications, 160: 2401-2410.
- Ekici E., Elmalı Ö., 2015. On Decompositions Via Generalized Closedness in Ideal Spaces. Filomat, 29 (4): 879-886.
- Ekici E., Özen S., 2013. A Generalized Class of  $\tau^*$  in Ideal Spaces. Filomat, 27 (4): 529-535.
- Ekici E., 2013. On  $A_I^*$ -sets,  $C_I$ -sets,  $C_I^*$ -sets and Decompositions of Continuity in Ideal Topological Spaces. Analele Stiintifice Ale Universitatii Al. I. Cuza Din Iasi (S. N.) Matematica, Tomul LIX, f. 1: 173-184.
- Ekici E., 2012. On pre- $I$ -open Sets, Semi- $I$ -open Sets and  $b$ - $I$ -open Sets in Ideal Topological Spaces. Acta Universitatis Apulensis, 30: 293-303.
- Ekici E., Noiri T., 2012a.  $\ast$ -hyperconnected Ideal Topological Spaces. Analele Stiintifice Ale Universitatii Al. I. Cuza Din Iasi (S. N.) Matematica, Tomul LVIII (1): 121-129.
- Ekici E., Noiri T., 2012b.  $\ast$ -hyperconnected Ideal Topological Spaces. Analele Stiintifice Ale Universitatii Al. I. Cuza Din Iasi (S. N.) Matematica, Tomul LVIII, f. 1: 121-129.
- Ekici E., Özen S., 2012. Rough Closedness, Rough Continuity and  $I_g$ -closed Sets. Annales Univ. Sci. Budapest., 55: 47-55.
- Ekici E., 2011a. On  $\mathcal{AC}_I$ -sets,  $\mathcal{BC}_I$ -sets,  $\beta_I^*$ -open Sets and Decompositions of Continuity in Ideal Topological Spaces. Creat. Math. Infom., 20 No. 1:47-54.
- Ekici E., 2011b. On  $I$ -Alexandroff and  $I_g$ -Alexandroff Ideal Topological Spaces. Filomat, 25 (4): 99-108.
- Ekici E., 2011c. On R- $I$ -open Sets and  $A_I^*$ -sets in Ideal Topological Spaces. Annals of the

- University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, 38 (2): 26-31.
- Ekici E., Noiri T., 2010a. Certain Subsets in Ideal Topological Spaces. *Analele Universitatii Oradea, Fasc. Matematica, Tom XVII, Issue No. 2*: 125-132.
- Ekici E., Noiri T., 2010b. Properties of  $I$ -submaximal Ideal Topological Spaces. *Filomat*, 24:4: 87-94.
- Ekici E., 2009. On  $e^*$ -open Sets and  $(D, S)^*$ -sets. *Mathematica Moravica*, Vol. 13-1: 29-36.
- Ekici E., Noiri T., 2009a.  $\star$ -extremally Disconnected Ideal Topological Spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, 122 (1-2): 81-90.
- Ekici E., Noiri T., 2009b. On Subsets and Decompositions of Continuity in Ideal Topological Spaces. *Arabian Journal for Science and Engineering*, Volume 34, Number 1A: 165-177.
- Ekici E., 2008a. A Note on  $a$ -open Sets and  $e^*$ -open Sets. *Filomat*, 22:1: 89-96.
- Ekici E., 2008b. On  $a$ -open Sets,  $A^*$ -sets and Decompositions of Continuity and Supercontinuity. *Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 51: 39-51.
- Ekici E., 2008c. On  $e$ -open Sets,  $DP^*$ -sets and  $DPE^*$ -sets and Decompositions of Continuity. *Arabian Journal for Science and Engineering*, Volume 33, Number 2A: 269-282.
- Ekici E., Noiri T., 2008. Connectedness in Ideal Topological Spaces. *Novi Sad Journal of Mathematics*, Vol. 38, No. 2: 65-70.
- Ekici E., 2007a. On  $C^*$ -sets and Decompositions of Continuous and  $\eta\zeta$ -continuous Functions. *Acta Mathematica Hungarica*, 117 (4): 325-333.
- Ekici E., 2007b. On  $\gamma$ -normal Spaces. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, Tome 50 (98) No. 3: 259-272.
- Hayashi E., 1964. Topologies Defined by Local Properties. *Math. Ann.*, 156: 205-215.
- Janković D., Hamlett T.R., 1990. New Topologies From Old Via Ideals. *Amer. Math. Monthly*, 97: 295-310.
- Kuratowski K., 1966. *Topology*, Vol. 1, Academic Press, New York.
- Lee E.P., Lee S.O., 2014. Double Pairwise  $(r,s)(u,v)$ -semicontinuous Mappings. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, 27 (4): 603-614.
- Levine N., 1963. Semi-open Sets and Semi-continuity in Topological Spaces. *Amer. Math. Monthly*, 70: 36-41.
- Li Z., Lu S., 2014. On  $I$ -scattered Spaces. *Bull. Korean Math. Soc.*, 51 (3): 667-680.
- Ray A.D., Bhowmick R., 2014. Separation Axioms on bi-generalized Topological Spaces. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, 27 (3): 363-379.

Stone M.H., 1937. Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology.  
Trans. Amer. Math. Soc., 41: 375-381.



## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ayşe Nur Tunç

Doğum Yeri : Sandıklı

Doğum Tarihi : 05.08.1987

### EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat

Fakültesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen

Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

### BİLİMSEL FAALİYETLERİ

- a) Yayınlar -SCI -Diğer
- b) Bildiriler -Uluslararası -Ulusal
- c) Katıldığı Projeler

### İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Bölümü 2012-

### İLETİŞİM

E-posta Adresi : aysenurtunc@comu.edu.tr