T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ

İKİLİ BAĞINTILARIN TAM YARI-GRUPLARININ İDEMPOTENT VE REGÜLER ELEMANLARI

Barış ALBAYRAK
Matematik Anabilim Dalı
Tezin Sunulduğu Tarih: **28/12/2015**

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Neşet AYDIN

ÇANAKKALE

Barış ALBAYRAK tarafından Prof. Dr. Neşet AYDIN yönetiminde hazırlanan ve **28/12/2015** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**İkili Bağıntıların Tam Yarı-gruplarının İdempotent ve Regüler Elemanları**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Neşet AYDIN ……………………
Başkan

Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN ……………………
Üye

Doç. Dr. Ali ERDOĞAN ……………………
Üye

Prof. Dr. Hatice KANDAMAR ……………………
Üye

Doç. Dr. Çağrı DEMİR ……………………
Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:………

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Barış ALBAYRAK

TEŞEKKÜR

On yıllık akademisyenlik hayatımın her aşamasında yanımda olan, tez çalışmam süresince desteğini ve emeğini esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Neşet AYDIN'a en içten sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her alanında bana inanan ve güvenen, maddi manevi her zaman arkamda olan, bana Onur'lu, Barış içinde ve Özgür bir yaşam sürmeyi öğreten annem ve babam, her şey için çok teşekkürler.

Fatih ve Didem, bu dünyada her şeyin acımasız, soğuk ve zalim olmadığını kanıtladığınız, dünyamı güzelleştirip en kötü anlarda bile yüzüme bir gülümseme yerleştirmeyi başardığınız için teşekkürler.

Barış ALBAYRAK

Çanakkale, Aralık 2015

SİMGELER VE KISALTMALAR

D	Birleşimlerin tam X -yarılatisi
B_X	İkili bağıntıların yarıgrubu
$N(D,D')$	D' kümesinin D içindeki alt sınırlarının kümesi
$\Lambda(D,D_t)$	D' kümesinin en büyük alt sınırı
$\Sigma(X,m)$	Birleşimlerin tam X -yarılatislerinin m elemanlı bir sınıfı
$\Sigma_n(X,m)$	$\Sigma(X,m)$ sınıfında D’ye izomorf olan birleşimlerin tam X yarılatislerinin n. sırada olanlarının sınıfı
$B_X(D)$	D ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrubu
$\Sigma(D)$	D’nin XI -yarılatislerinin kümesi
$E_X^{(r)}(D')$	$B_X(D')$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi
I_D	$B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının kümesi
R	$B_X(D)$ yarıgrubunun regular elemanlarının kümesi
$\Phi(Q)$	Q XI -alt yarılatisinin tam otomorfizmlerinin kümesi
$R(Q,D')$	$R(Q,D') = \bigcup_{\varphi\in\Phi(Q,D')} R_\varphi(Q,D')$
$R(D')$	$R(D') = \bigcup_{Q'\in\Omega(Q)} R(Q',D')$
$I^*(Q)$	$I^*(Q) = \bigcup_{D'\in Q\vartheta_{XI}} E_X^{(r)}(D')$
$R^*(Q)$	$R^*(Q) = \bigcup_{D'\in Q\vartheta_{XI}} R(D')$
$C(D)$	D yarılatisinin karakteristik kümeler ailesi
Y_i^α	$Y_{T_i}^\alpha$

ÖZET

İKİLİ BAĞINTILARIN TAM YARI-GRUPLARININ İDEMPOTENT VE REGÜLER ELEMANLARI

Barış ALBAYRAK
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Neşet AYDIN
28/12/2015, 115

Bu tezde, boş olmayan bir X kümesinin altkümelerinden oluşan ve elemanları

$$Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D}$$
$$Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D}$$
$$Z_8 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D}$$
$$Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset D$$
$$Z_8 \setminus Z_7 \neq \varnothing,\ Z_7 \setminus Z_8 \neq \varnothing,\ Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\ Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_5 \neq \varnothing$$

koşullarını sağlayan $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$ birleşimlerin tam X - yarılatisine izomorf olan tam X – yarılatislerin sınıfının yapısı ve D ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X(D)$ nin idempotent ve regular elemanlarının özellikleri araştırılmıştır.

Öncelikle D'ye tam izomorf olan tam X - yarılatislerin $\sum_3(X,9)$ sınıfının ve D'nin altgruplarının birer sınıfı olan $\sum_7(X,8)$ ve $\sum_8(X,8)$ sınıflarının elemanlarının özellikleri incelenmiştir. Daha sonra bunlardan yararlanılarak bu sınıfların elemanlarıyla tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının sağ birim, idempotent ve regüler elemanlarının yapısı incelenmiş ve sayılarını hesaplayan bir formül elde edilmiştir.

Anahtar sözcükler: İkili bağıntı, Yarıgrup, İdempotent eleman, Regüler eleman.

ABSTRACT

IDEMPOTENT AND REGULAR ELEMENTS OF COMPLETE SEMIGROUP OF BINARY RELATIONS

Barış ALBAYRAK
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Doctoral Dissertation in Mathematics
Advisor : Prof. Dr. Neşet AYDIN
28/12/2015, 115

Let X be a nonempty set and $D=\{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$ be subsets family of X which satisfies the following conditions,

$$
\begin{gathered}
Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D} \\
Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D} \\
Z_8 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D} \\
Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset D \\
Z_8 \setminus Z_7 \neq \varnothing,\ Z_7 \setminus Z_8 \neq \varnothing,\ Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\ Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_5 \neq \varnothing
\end{gathered}
$$

In this study, we describe class of which elements are isomorphic to X - semilattice of unions D and we investigate properties of right unit, idempotent and regular elements complete semigroup of binary relations $B_X(D)$.

Firstly, we study $\sum_3(X,9)$ class of which elements are isomorphic to X - semilattice of unions D, $\sum_7(X,8)$ and $\sum_8(X,8)$ classes of which elements are isomorphic to X - subsemilattice of D. Then, by the help of this classes we obtain the properties of right unit, idempotent and regular elements of $B_X(D)$ and we calculate of right unit, idempotent and regular elements numbers.

Keywords: Binary relation, Semigroup, Idempotent element, Regular element.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

BÖLÜM 1
GİRİŞ

İkili bağıntılar ve yarıgruplar, matematiğin en temel çalışma alanlarındandır. İkili Bağıntılar Teorisi'nin detayları 1890'lı yıllarda E. Schröder tarafından verilmiştir. Ardından teoriyle ilgili temel tanımlar ve özellikler Whitehead ve Russell tarafından yayınlanmış, Riguet tarafından geliştirilmiştir. Bunların dışında pek çok farklı araştırmacı ikili bağıntılara farklı açılardan yaklaşarak teorinin gelişmesine katkıda bulunmuştur. Bu araştırmacılardan biri de ikili bağıntıların yarıgrupları üzerine çalışan Diasamidze'dir. Diasamidze, ikili bağıntıların yarıgruplarının idempotent ve regüler elemanlarının özelliklerinin belirlenmesi ve yarıgrup içinde sayılarının bulunmasıyla ilgili yöntemler geliştirmiştir.

Bu tezde, X boş olmayan bir küme olmak üzere X in alt kümelerinden oluşan ve elemanları

$$Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D}$$
$$Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D}$$
$$Z_8 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D}$$
$$Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset D$$
$$Z_8 \setminus Z_7 \neq \varnothing,\ Z_7 \setminus Z_8 \neq \varnothing,\ Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\ Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_5 \neq \varnothing$$

koşullarını sağlayan $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$ birleşimlerin tam X - yarılatisine izomorf olan tam X – yarılatislerin sınıfının yapısı incelenecektir. Ayrıca sağ birim, idempotent ve regüler elemanlarının sağladığı özellikler araştırılacak ve sayıları hesaplanacaktır.

BÖLÜM 2
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Küme, bağıntı ve yarıgrup

Öncelikle yarıgruplarla ve bağıntılarla ilgili temel tanımları verelim.

Tanım 2.1.1 P boş olmayan bir küme olsun. P üzerinde tanımlı bir " $\leq$ " bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa, " $\leq$ " bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir. Bu durumda $(P,\leq)$ kısmi sıralı küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2 $(P,\leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq P$ olsun. Eğer her $y \in A$ için $x \leq y$ oluyorsa $x \in P$ elemanına A kümesinin alt sınırı denir. Benzer olarak her $y \in A$ için $y \leq x$ oluyorsa $x \in P$ elemanına A kümesinin üst sınırı denir.

Tanım 2.1.3 $(P,\leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $\emptyset \neq Y \subseteq P$ olsun. Y kümesinin bir a elemanı, her $y \in Y$ için $y \leq a$ ise $y = a$ koşulunu sağlıyorsa a elemanına Y kümesinin en küçük elemanı veya minimal elemanı denir.

Tanım 2.1.4 $(P,\leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer P den alınan her eleman çiftinin en küçük üst sınırı varsa P ye üst yarılatis, P nin boş olmayan her alt kümesinin en küçük üst sınırı varsa P ye tam üst yarılatis denir.

Tanım 2.1.5 X boş olmayan bir küme ve "$*$" A üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer her $x,y,z \in X$ için $(x*y)*z = x*(y*z)$ oluyorsa X kümesi "$*$" işlemiyle bir yarıgruptur denir ve $(X,*)$ biçiminde gösterilir.

2.2. İkili Bağıntıların Tam Yarıgrubu

Şimdi tez konumuzu oluşturan ikili bağıntıların yarıgrupları hakkında temel tanım ve özellikleri verelim.

Tanım 2.2.1 X boş olmayan bir küme ve α, X kümesi üzerinde bir ikili bağıntı olsun. $x,y \in X$ için $(x,y) \in \alpha$ olması $x\alpha y$ ile gösterilsin. $y \in X$, $Y \subseteq X$ olmak üzere

$$y\alpha = \{x \in X | y\alpha x\}, \; Y\alpha = \cup_{y\in Y} y\alpha$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.2.2 X kümesi üzerindeki bütün ikili bağıntıların kümesi B_X ile gösterilsin. $\alpha,\beta \in B_X$ için $\delta = \alpha \circ \beta$ bileşke işlemi, $x,y \in X$ olmak üzere

$x\alpha z\beta y$ olacak şekilde $z \in X$ varsa xδy dir biçiminde tanımlanır. B_X kümesi bileşke işlemine göre yarıgruptur.

Tanım 2.2.3 X boş olmayan bir küme olsun. X kümesinin $i \in I$ olmak üzere X_i altkümelerinden oluşan sistem aşağıdaki üç şartı sağlıyorsa X_i sistemine X in bir parçalanışı denir.

1) $X_i \neq \emptyset, \forall i \in I$
2) i$\neq j$ için $X_i \cap X_j = \emptyset$
3) $X = \bigcup_{y \in I} X_i$

Tanım 2.2.4 $\emptyset \neq D$, X in altkümelerinin bir ailesi olsun. Eğer D , elemanlarının birleşimine kapalı ise yani $\emptyset \neq D' \subseteq D$ için $\bigcup D' \in D$ ise D ye birleşimlerin tam X - yarılatisi denir. D nin bütün elemanlarının birleşimi $\breve{D}$ ile gösterilirse $\breve{D} \in D$, D nin en büyük elemanıdır.

D birleşimlerin tam X – yarılatisi, $T \subseteq \breve{D}$, $t \in \breve{D}$, $\emptyset \neq D' \subseteq D$ ve $\alpha \in B_X$ olmak üzere

1) $V(D, \alpha) = \{Y\alpha | Y \in D\}$
2) $D^* = D \setminus \{\emptyset\}$, $X^* = 2^X \setminus \{\emptyset\}$
3) $D'_T = \{Z' \in D' | T \subseteq Z'\}$
4) $D'_t = \{Z' \in D' | t \in Z'\}$
5) $\ddot{D}'_T = \{Z' \in D' | Z' \subseteq T\}$
6) $Y_T^\alpha = \{x \in X | x\alpha = T\}$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.5 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Z \subset Y$ olmak üzere $Y, Z \in D$ için $Z \subset T \subset Y$ olacak bir $T \in D$ yoksa Y, Z yi örter denir.

Bu tanım kullanılarak birleşimlerin tam X – yarılatisi D diyagramlarla temsil edilebilir. D nin her elemanı noktalarla gösterilir. $Z \subset Y$ ise Y daha yukarıdadır ve Y, Z yi örtüyorsa Y ile Z çizgi ile birleştirilir.

Tanım 2.2.6 D birleşimlerin tam X – yarılatisi, $\alpha \in B_X$ ve

$$V[\alpha] = \begin{cases} V(X^*, \alpha), & \emptyset \notin D \\ V(X^*, \alpha), & \emptyset \in V(X^*, \alpha) \\ V(X^*, \alpha) \cup \{\emptyset\}, & \emptyset \notin V(X^*, \alpha)\ ve\ \emptyset \in D \end{cases}$$

olmak üzere $\alpha \in B_X$ elemanı $\alpha = \bigcup_{T \in V[\alpha]}(Y_T^\alpha \times T)$ biçiminde gösterilebilir. Bu gösterime α nın quasinormal gösterimi denir. α nın quasinormal gösteriminde $T, T' \in D$ için $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha = \emptyset$ ve $X = \bigcup_{T \in V[\alpha]} Y_T^\alpha$ sağlanır.

Örnek 2.2.7 $X = \{1,2,3,4\}$, $D = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, $\alpha = \{(2,1), (3,1), (4,2)\}$ olsun. α nın quasinormal gösterimini bulalım. $V(X^*, \alpha) = \{Y\alpha | Y \in 2^X \setminus \emptyset\} = D$ dir. Şimdi $T \in D$ olmak üzere Y_T^α kümelerini oluşturalım.

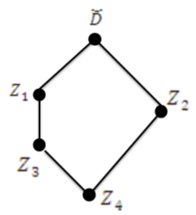
$$Y_\emptyset^\alpha = \{x \in X | x\alpha = \emptyset\} = \{1\}$$
$$Y_{\{1\}}^\alpha = \{x \in X | x\alpha = \{1\}\} = \{2,3\}$$
$$Y_{\{2\}}^\alpha = \{x \in X | x\alpha = \{2\}\} = \{4\}$$
$$Y_{\{1,2\}}^\alpha = \{x \in X | x\alpha = \{1,2\}\} = \emptyset$$

dir. Buradan $V[\alpha] = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ elde edilir. O halde α nın quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_\emptyset^\alpha \times \emptyset) \cup (Y_{\{1\}}^\alpha \times \{1\}) \cup (Y_{\{2\}}^\alpha \times \{2\})$ biçimindedir.

Tanım 2.2.8 D birleşimlerin tam $X-$ yarılatisi, $T \subseteq \breve{D}$, $\emptyset \neq \widetilde{D} \subseteq D, \emptyset \neq D' \subseteq D$ olsun. Eğer D' kümesinin her elemanı $\widetilde{D}$ kümesinin elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\widetilde{D}$, D' yi üretir denir.

Tanım 2.2.9 D birleşimlerin tam $X-$ yarılatisi, $\emptyset \neq D' \subseteq D$, $T \in D'$ olsun. $\bigcup(D' \setminus D'_T) = l(D', T)$ ile gösterilsin. Eğer $\emptyset \neq T \in D$ için $T \setminus l(D', T) = \emptyset$ ise T ye limit eleman, $T \setminus l(D', T) \neq \emptyset$ ise T ye limit olmayan eleman denir. $T = \emptyset$ ise ne limit, ne de limit olmayan elemandır.

Örnek 2.2.10 $Z_4 \neq \emptyset$ olmak üzere $D = \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ birleşimlerin tam $X-$ yarılatisinin diyagramı aşağıdaki şekildeki gibi olsun.



Şekil 2.1. $D = \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ birleşimlerin tam $X-$ yarılatisinin diyagramı

$D' = \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\} \subset D$ kümesinin limit ve limit olmayan elemanlarını bulalım. Öncelikle her bir $T \in D'$ için D'_T kümelerini oluşturalım. Kümenin tanımı kullanılarak

$$D'_{Z_1} = \{Z_1\},\ D'_{Z_2} = \{Z_2\},\ D'_{Z_3} = \{Z_3, Z_1\},\ D'_{Z_4} = \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}$$

olarak bulunur. Buradan

$$l(D', Z_1) = \cup\left(D' \backslash D'_{Z_1}\right) = \cup\{Z_4, Z_3, Z_2\} = \breve{D}$$
$$l(D', Z_2) = \cup\left(D' \backslash D'_{Z_2}\right) = \cup\{Z_4, Z_3, Z_1\} = Z_1$$
$$l(D', Z_3) = \cup\left(D' \backslash D'_{Z_3}\right) = \cup\{Z_4, Z_2\} = Z_2$$
$$l(D', Z_4) = \cup\left(D' \backslash D'_{Z_4}\right) = \cup\,\emptyset = \emptyset$$

elde edilir. Böylece

$$Z_1 \setminus l(D', Z_1) = Z_1 \setminus \breve{D} = \emptyset$$
$$Z_2 \setminus l(D', Z_2) = Z_2 \setminus Z_1 \neq \emptyset$$
$$Z_3 \setminus l(D', Z_3) = Z_3 \setminus Z_2 \neq \emptyset$$
$$Z_4 \setminus l(D', Z_4) = Z_4 \setminus \emptyset \neq \emptyset$$

olduğundan Z_1 limit eleman, Z_2, Z_3, Z_4 limit olmayan elemandır.

Tanım 2.2.11 D birleşimlerin tam X – yarılatisi, $\emptyset \neq D' \subseteq D$ olsun. $N(D, D') = \{Z \in D | Z \subseteq Z', \forall Z' \in D'\}$ kümesine D' nin D içindeki alt sınırlarının kümesi denir. Eğer $N(D, D') \neq \emptyset$ ise $\cup N(D, D') \in D$ ye, D' nin D içindeki en büyük alt sınırı denir. $\cup N(D, D') = \Lambda(D, D')$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.12 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. Aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa D ye birleşimlerin tam XI – yarılatisi denir.

1) Her $t \in \breve{D}$ için $\Lambda(D, D_t) \in D$ dir.
2) Her $\emptyset \neq Z \in D$ için $Z = \cup_{t \in Z} \Lambda(D, D_t)$ biçiminde yazılabilir.

Tanım 2.2.13 $D_j = \{T_1, T_2, \dots, T_j\}$ ve $\emptyset \neq Y \subseteq X$ olacak biçimde X ve Y kümeleri verilsin. En az bir $y \in Y$ için $f(y) = T_j$ olacak biçimdeki bütün $f: X \to D_j$ fonksiyonlarının sayısı $s = j^{|X \backslash Y|} \cdot \left(j^{|Y|} - (j-1)^{|Y|}\right)$ formülü ile bulunur.

Tanım 2.2.14 X boş olmayan bir küme, $m, n \in \mathbb{N}$ olsun.

1) m elemanlı bütün birleşimlerin tam X – yarılatislerinin kümesi $\sum(X, m)$ ile gösterilir.

2) m elemanlı birleşimlerin tam $X -$ yarılatislerinden, n. sırada olan D ye izomorf olan tam X – yarılatislerinin kümesi $\sum_n(X,m)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.15 X boş olmayan bir küme, D birleşimlerin tam X – yarılatisi ve $f: X \to D$ bir dönüşüm olsun. Bu şekildeki her f dönüşümü için $\alpha_f = \cup_{x\in X}(\{x\} \times f(x))$ biçiminde bir ikili bağıntı yazılabilir. Bütün α_f ikili bağıntılarının kümesi $B_X(D)$ ile gösterilsin. $B_X(D)$, B_X in altyarıgrubudur ve bu yarıgruba birleşimlerin tam X – yarılatisi D ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrubu denir.

Örnek 2.2.16 $X = \{1,2,3\}$, $D = \{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ olsun. D birleşimlerin tam X – yarılatisidir. Öncelikle $f: X \to D$ dönüşümlerini bulalım. Bu şekilde oluşturulabilecek dönüşümler

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \{1,2\} & \{1,2\} & \{1,2\} \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \{1\} & \{1,2\} & \{1,2,3\} \end{pmatrix}$$
$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \{1,2\} & \{1,2,3\} & \{1,2\} \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \{1,2\} & \{1,2,3\} & \{1,2,3\} \end{pmatrix}$$
$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \{1,2,3\} & \{1,2\} & \{1,2\} \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \{1,2,3\} & \{1,2\} & \{1,2,3\} \end{pmatrix}$$
$$f_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \{1,2,3\} & \{1,2,3\} & \{1,2\} \end{pmatrix}, f_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \{1,2,3\} & \{1,2,3\} & \{1,2,3\} \end{pmatrix}$$

biçiminde 8 tanedir. O zaman

$$\begin{aligned} \alpha_{f_1} = \cup_{x\in X}(\{x\} \times f(x)) = &\quad (\{1\} \times \{1,2\}) \cup (\{2\} \times \{1,2\}) \cup (\{3\} \times \{1,2\}) \\ = &\quad \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\} \end{aligned}$$

olur. Benzer olarak $i = 2, \dots, 8$ için α_{f_i} ler oluşturulur. Buradan $B_X(D) = \{\alpha_{f_1}, \alpha_{f_2}, \dots, \alpha_{f_8}\}$ olarak elde edilir.

2.3. İdempotent ve Regüler Elemanlar

Tanım 2.3.1 $\varepsilon \in B_X(D)$ olsun. Eğer her $\alpha \in B_X(D)$ için $\alpha \circ \varepsilon = \alpha$ oluyorsa ε, $B_X(D)$ nin sağ birim elemanıdır denir.

Tanım 2.3.2 $\alpha \in B_X(D)$ olsun. Eğer $\alpha \circ \alpha = \alpha$ oluyorsa α, $B_X(D)$ nin idempotent elemandır denir.

Tanım 2.3.3 $\beta \in B_X(D)$ olsun. Eğer $\beta \circ \delta \circ \beta = \beta$ olacak biçimde bir $\delta \in B_X(D)$ elemanı varsa β, $B_X(D)$ nin regüler elemandır denir.

Teorem 2.3.4 $\varepsilon \in B_X(D)$ olsun. ε ikili bağıntısının $B_X(D)$ nin sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul ε ikili bağıntısının $B_X(D)$ nin idempotent elemanı ve $D = V(D, \varepsilon)$ olmasıdır.

Teorem 2.3.5 α ikili bağıntısı $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olsun. O zaman $V(D, \alpha)$ tam XI – yarılatisidir.

Teorem 2.3.6 $B_X(D)$ nin sağ birim elemanının var olması için gerek ve yeter koşul D nin tam XI – yarılatis olmasıdır.

Tanım 2.3.7 D' ve D'' birleşimlerin tam X – yarılatisi, $\varphi: D' \to D''$ bire-bir dönüşüm olsun. Eğer her $\emptyset \neq D_1 \subseteq D'$ için $\varphi(\cup D_1) = \cup_{T' \in D_1} \varphi(T')$ koşulu sağlanıyorsa φ ye tam izomorfizma denir.

Tanım 2.3.8 $\alpha \in B_X(D)$ ve $\varphi: Q \to D'$ tam izomorfizma olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa φ ye tam α - izomorfizma denir.

1) $Q = V(D, \alpha)$
2) $\emptyset \in V(D, \alpha)$ için $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ ve her $T \in V(D, \alpha)$ için $\varphi(T)\alpha = T$

Teorem 2.3.9 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun ve $\alpha \in B_X(D)$ için $\alpha \circ \sigma \circ \alpha = \alpha$ olacak biçimde bir $\sigma \in B_X(D)$ var olsun. Eğer $D(\alpha)$, $V(D, \alpha) \setminus \emptyset$ yarılatisinin üreteç kümesi olmak üzere α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \cup_{T \in D(\alpha)} (Y_T^{\alpha} \times T)$ biçiminde ise $V(D, \alpha)$ birleşimlerin tam X – yarılatisi olur. Üstelik

a) Her $T \in V(D, \alpha)$ için $\varphi(T)\alpha = T$ ve $\varphi(T) = T\sigma$
b) Her $T \in D(\alpha)$ için $\varphi(T) \subseteq \cup_{T' \in \ddot{D}(\alpha)_T} Y_{T'}^{\alpha}$
c) Her $T \in \ddot{D}(\alpha)_T$ limit olmayan elemanı için $Y_T^{\alpha} \cap \varphi(T) \neq \emptyset$
d) Her $T \in \ddot{D}(\alpha)_T$ limit elemanı için $B(T) = \{Z \in \ddot{D}(\alpha)_T \mid Y_Z^{\alpha} \cap T \neq \emptyset\}$ olmak üzere$\cup B(T) = T$ sağlanır.

koşullarını sağlayacak biçimde $\varphi: V(D, \alpha) \to D' = \{T\sigma | T \in V(D, \alpha)\}$ tam izomorfizması vardır. Diğer taraftan $\alpha \in B_X(D)$, $V(D, \alpha)$ birleşimlerin tam X – yarılatisi ve D', D nin tam X – yarılatisi olsun. Ayrıca $\varphi: V(D, \alpha) \to D'$ tam izomorfizması (b), (c), (d) koşullarını sağlasın. O zaman $\alpha \in B_X(D)$ regüler eleman olur.

Teorem 2.3.10 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olmak üzere D nin XI – altyarılatislerinin kümesi $\sum(D)$ ile gösterilsin. O zaman $D' \in \sum(D)$ için $\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')$, $B_X(D')$ nin sağ birim elemanlarının kümesi ve I_D, $B_X(D)$ nin idempotent elemanlarının kümesi olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

1) Eğer $\emptyset \in D$ ise $\sum_{\emptyset}(D) = \{D' \in \sum(D) \,|\emptyset \in D'\}$ olmak üzere

a) $D' \neq D''$ olacak biçimde $D', D'' \in \sum_{\emptyset}(D)$ için $\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D') \cap \mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D'') = \emptyset$

b) $I_D = \bigcup_{D' \in \sum_{\emptyset}(D)} \mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')$

c) X sonlu bir küme ise $|I_D| = \sum_{D' \in \sum_{\emptyset}(D)} \left|\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')\right|$

2) Eğer $\emptyset \notin D$ ise

a) $D' \neq D''$ olacak biçimde $D', D'' \in \sum(D)$ için $\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D') \cap \mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D'') = \emptyset$

b) $I_D = \bigcup_{D' \in \sum(D)} \mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')$

c) X sonlu bir küme ise $|I_D| = \sum_{D' \in \sum(D)} \left|\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')\right|$

Teorem 2.3.11 Bir $\alpha \in B_X(D)$ elemanının regüler eleman olması için gerek ve yeter koşul $V(X^*, \alpha) \subseteq V(D, \alpha)$ ve $V(D, \alpha)$ nın birleşimlerin tam XI – yarılatisi olmasıdır.

Not 2.3.12 D birleşimlerin tam X – yarılatisi, D', X – altyarılatisi ve Q, XI – altyarılatisi olsun. Bir $\alpha \in B_X(D)$ için

1) $\alpha \in B_X(D)$ regüler eleman.
2) $Q = V(D, \alpha)$
3) $\varphi: Q \to D'$ tam α – izomorfizmasıdır ve üstteki teoremin (b), (c), (d) şıklarını sağlar.

koşulları sağlansın. Bu şekildeki α elemanlarının kümesi $R_{\varphi}(Q, D')$ ile gösterilir. Ayrıca

$$\Phi(Q, D') = \{\varphi: V(D, \alpha) = Q \to D' \mid \varphi, \alpha - \text{ izomorfizması}, \exists \alpha \in B_X(D)\}$$

$$\Omega(\mathrm{Q}) = \{Q' \mid Q', XI - \text{ altyarılatis ve } Q'\text{den } Q \text{ ya bir tam izomorfizma var}\}$$

olmak üzere

$$R(Q, D') = \cup_{\varphi \in \Phi(Q, D')} R_{\varphi}(Q, D') \ \text{ ve } R(D') = \cup_{Q' \in \Omega(\mathrm{Q})} R_{\varphi}(Q', D')$$

biçimindedir.

Not 2.3.13 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. Eğer $\emptyset \in D$ ise boşkümeyi bulunduran XI – altyarılatislerinin, $\emptyset \notin D$ ise bütün XI – altyarılatislerinin kümesi $\sum'_{XI}(D)$ ile gösterilsin. $D', D'' \in \sum'_{XI}(D)$ ve $\vartheta_{XI} \subseteq \sum'_{XI}(D) \times \sum'_{XI}(D)$ olsun. ϑ_{XI} bağıntısı

$$D' \vartheta_{XI} D'' \Leftrightarrow D' \ ve \ D'' \ arasında \ bir \ tam \ izomorfizma \ var.$$

biçiminde tanımlansın. ϑ_{XI}, $\sum'_{XI}(D)$ üzerinde denklik bağıntısıdır ve kümeyi denklik sınıflarına ayırır.

$\sum'_{XI}(D)$ kümesinin her bir denklik sınıfından bir temsilci seçelim ve bütün temsilcilerin kümesini $\sum_{XI}(D)$ ile gösterelim. Bu durumda $Q \in \sum_{XI}(D)$ için

$$Q\vartheta_{XI} = \{D' \in \textstyle\sum'_{XI}(D) \mid Q \; ile \; D' \; arasında \; bir \; tam \; izomorfizma \; var\}$$

olur.

Bir $D' \in Q\vartheta_{XI}$ ile tanımlanan $B_X(D')$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi $\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')$ olmak üzere, $B_X(Q\ )$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının kümesi

$$I^*(Q) = \bigcup_{D' \in Q\vartheta_{XI}} \mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')$$

biçimindedir. Ayrıca bir $D' \in Q\vartheta_{XI}$ ile tanımlanan $B_X(D')$ yarıgrubunun regüler elemanlarının kümesi $\mathrm{R}(D')$ olmak üzere, $B_X(Q\ )$ yarıgrubunun regüler elemanlarının kümesi

$$R^*(Q) = \bigcup_{D' \in Q\vartheta_{XI}} \mathrm{R}(D')$$

biçimindedir.

Lemma 2.3.14 $\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(\mathrm{Q})$, $B_X(Q)$ nun sağ birim elemanlarının kümesi olmak üzere $\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(\mathrm{Q}) = R_{id_\varphi}(Q, Q)$ dur.

Lemma 2.3.15 D birleşimlerin tam X – yarılatisi, Q, tam XI – altyarılatisi ve D', tam X – altyarılatisi olsun. O zaman $\varphi \neq \psi$ olacak biçimdeki $\varphi, \psi \in \Phi(Q, D')$ için

$$R_\varphi(Q, D') \cap R_\psi(Q, D') = \emptyset$$

olur.

Lemma 2.3.16 X sonlu bir küme, $\varphi \in \Phi(Q, D')$ ve Q nun otomorfizmalarının sayısı q olsun O zaman

$$|R(Q, D')| = q \cdot |R_\varphi(Q, D')|$$

olur.

Lemma 2.3.17 X sonlu bir küme, $\varphi \in \Phi(Q, D')$ ve $|\Omega(\mathrm{Q})| = m_0$ olsun. O zaman

$$|R(D')| = m_0 \cdot q \cdot \left|R_\varphi(Q, D')\right|$$

olur.

Teorem 2.3.18 R, $B_X(D\,)$ nin regüler elemanlarının kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

1) $D' \neq D''$ olacak biçimde $D', D'' \in \sum_{XI}(D)$ için $R(D') \cap R(D'') = \emptyset$ dir.
2) $R = \bigcup_{D' \in \sum_{XI}(D)} \mathrm{R}(D')$
3) X sonlu bir küme ise $|R| = \sum_{D' \in \sum_{XI}(D)} |\mathrm{R}(D')|$

Teorem 2.3.19 $\alpha \in B_X(D)$ regüler eleman olsun. α nın idempotent eleman olması için gerek ve yeter koşul her $T \in V(D, \alpha)$ için $\varphi(T) = T\alpha$ koşulunu sağlayan φ dönüşümünün $V(D, \alpha)$ nın birim dönüşümü olmasıdır.

Teorem 2.3.20 $Q \in \sum'_{XI}(D)$ için aşağıdakiler sağlanır.

1) $D' \neq D''$ olacak biçimde $D', D'' \in Q\vartheta_{XI}$ için $I(D') \cap I(D'') = \emptyset$ dir.
2) $I^*(Q) = \bigcup_{D' \in Q\vartheta_{XI}} R_{id_{D'}}(D', D')$
3) X sonlu bir küme ise $|I^*(Q)| = \sum_{D' \in Q\vartheta_{XI}} \left|R_{id_{D'}}(D', D')\right|$

Teorem 2.3.21 I, $B_X(D\,)$ nin idempotent elemanlarının kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

1) $D' \neq D''$ olacak biçimde $D', D'' \in \sum_{XI}(D)$ için $I(D') \cap I(D'') = \emptyset$ dir.
2) $I = \bigcup_{D' \in \sum_{XI}(D)} \mathrm{I}^*(D')$
3) X sonlu bir küme ise $|I| = \sum_{D' \in \sum_{XI}(D)} |\mathrm{I}^*(D')|$

2.4. İdempotent ve Regüler Elemanların Özellikleri

Bu bölümde ikili bağıntıların tam yarıgruplarının idempotent ve rügüler elemanlarının sağlaması gereken özelliklerle ilgili teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Tanım 2.4.1 D birleşimlerin tam X – yarılatisi ve $C(D)$, $\breve{D}$ kümesinin ayrık altkümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

1) $\cap D \in C(D)$
2) $\cup C(D) = \breve{D}$
3) Her $Z \in D$ için, $Z = \bigcup C_Z(D)$ olacak biçimde $C_Z(D) \subseteq C(D)$ vardır.

koşulları sağlanıyorsa $C(D)$ kümesine D nin karakteristik ailesi denir.

Tanım 2.4.2 D birleşimlerin tam X – yarılatisi ve $C(D)$ karakteristik ailesi olsun. Eğer her $Z \in D$ için, $\widehat{D}(Z) = D \setminus \{Z' \in D | Z' \subseteq Z\}$ olmak üzere

$$Z = (\cap D) \cup \bigcup_{Z' \in \widehat{D}(Z)} \chi(Z')$$

olacak biçimde bir $\chi: D \to C(D)$ dönüşümü varsa, D nin karakteristik dönüşümü vardır denir.

Teorem 2.4.3 D birleşimlerin sonlu tam X – yarılatisi olsun. O zaman $C(D)$ karakteristik ailesi ve $\chi: D \to C(D)$ karakteristik dönüşümü vardır ve teklikle belirlidir.

Sonuç 2.4.4 D birleşimlerin sonlu tam X – yarılatisi olsun. O zaman $C(D)$ karakteristik ailesinin eleman sayısı ve D nin eleman sayısı eşittir.

Not 2.4.5 " $\leq$ " bağıntısı ile kısmi sıralı bir D_ξ tam üstyarılatisini alalım. D_ξ, $D \in \sum(X, m)$ yarılatisine izomorf olsun. Bire-bir ve örten bir $\chi_\xi: D_\xi \to C(D_\xi)$ dönüşümü için $\widehat{D}_\xi(Z) = D_\xi \setminus \{T \in D_\xi | Z \leq T\}$ olmak üzere, her $Z \in D_\xi$ için $\bar{Z} = \chi_\xi(\breve{D}_\xi) \cup \bigcup_{T \in \widehat{D}_\xi(Z)} \chi_\xi(T)$ şeklinde birleşimler oluşturulsun ve bu şekildeki bütün birleşimlerin kümesi D' ile gösterilsin. D' üzerinde ϑ ikili bağıntısı

$$\bar{Z} \vartheta_{XI} \bar{Z}' \Leftrightarrow \widehat{D}_\xi(Z) \subseteq \widehat{D}_\xi(Z')$$

biçiminde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan ϑ ikili bağıntısı D' üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır.

Lemma 2.4.6 ϑ ikili bağıntısı ile kısmi sıralı olan D' ile D_ξ arasında bir tam izomorfizma vardır.

Tanım 2.4.7 D' ile D_ξ arasında bir tam izomorfizma var olduğundan her $Z \in D_\xi$ elemanı, izomorfizma altındaki görüntülerinden yararlanılarak $Z = \chi_\xi(\breve{D}_\xi) \cup \bigcup_{T \in \widehat{D}_\xi(Z)} \chi_\xi(T)$ biçiminde yazılabilir. Bu eşitliklere D_ξ kümesinin formal eşitlikleri denir.

Tanım 2.4.8 $Z' \in D_\xi \setminus \{\breve{D}_\xi\}$ olsun. Eğer $Z' \in \widehat{D}_\xi(T_0)$ ve $\left|\widehat{D}_\xi(T_0) \setminus \widehat{D}_\xi(Z')\right| = 1$ olacak biçimde $T_0 \in D_\xi$ varsa $\chi_\xi(Z') \in C(D_\xi)$ elemanına D_ξ nin temel kaynak elemanı denir.

$Z' \in D_\xi$ olsun. Eğer $\chi_\xi(Z') = \chi_\xi(\breve{D}_\xi)$ veya her $Z \in D_\xi$ ve $Z' \in \widehat{D}_\xi(Z)$ için $\left|\widehat{D}_\xi(T_0) \setminus \widehat{D}_\xi(Z')\right| \geq 2$ ise $\chi_\xi(Z') \in C(D_\xi)$ elemanına D_ξ nin yardımcı kaynak elemanı denir.

Sonuç 2.4.9 D_ξ sonlu yarılatis olsun. Eğer $Z' \in D_\xi$ elamanını örten sadece bir eleman varsa $\chi_\xi(Z') \in C(D_\xi)$ elemanı D_ξ nin temel kaynak elemanıdır.

Sonuç 2.4.10 D_ξ sonlu yarılatis olsun. Eğer $Z' \in D_\xi$ elamanını örten elemanların sayısı iki veya ikiden büyük ise $\chi_\xi(Z') \in C(D_\xi)$ elemanı D_ξ nin yardımcı kaynak elemanıdır.

Not 2.4.11 D_ξ yarılatisinin temel kaynak elemanları boşkümeden farklıdır. Ayrıca $\chi_\xi(\breve{D}) \in C(D_\xi)$ her zaman yardımcı kaynak elemanıdır.

Teorem 2.4.12 X sonlu bir küme ve $|X| = n$ olsun. $D_\xi \in \sum_n(X,m)$ yarılatisinin otomorfizmalarının sayısı q ve temel kaynak elemanlarının sayısı δ olmak üzere

$$\left|\sum\nolimits_n(X,m)\right| = \frac{1}{q}\sum_{p=\delta}^{m}\left(\sum_{i=1}^{p+1}\left(\frac{(-1)^{p+i+1}\cdot C_{m-\delta}^{p-\delta}\cdot C_p^{\delta}\cdot(\delta!)\cdot\left((p-\delta)!\right)\cdot i^n}{(i-1)!\cdot(p-i+1)!}\right)\right)$$

olur.

Teorem 2.4.13 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $m \geq 1$ için $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_m$ olacak biçimdeki $Q = \{T_0, T_1, T_2, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisini alalım. Q, XI – yarılatistir.

Teorem 2.4.14 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olmak üzere $m \geq 1$ için $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_m$ olacak biçimdeki $Q = \{T_0, T_1, T_2, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisini alalım. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m}(Y_i^\alpha \times T_i)$ ve $V(D,\alpha) = Q$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(D)$ elemanının regüler eleman olması için gerek ve yeter koşul $D' \subseteq D$ bir altyarılatis olmak üzere, $p = 0,1,\dots,m-1$ ve $q = 1,2,\dots,m$ için

$$\varphi(T_p) \subseteq Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_p^\alpha,\ Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \emptyset$$

koşullarını sağlayan bir $\varphi: Q \to D'$ tam α – izomorfizmasının var olmasıdır.

Sonuç 2.4.15 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olmak üzere $m \geq 1$ için $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_m$ olacak biçimdeki $Q = \{T_0, T_1, T_2, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisini alalım. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m}(Y_i^\alpha \times T_i)$ ve $V(Q,\alpha) = Q$ olsun.

O zaman $\alpha \in B_X(D)$ elemanının sağ birim eleman olması için gerek ve yeter koşul $p = 0,1, \ldots, m-1$ ve $q = 1,2, \ldots, m$ için

$$T_p \subseteq Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_p^\alpha, Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Teorem 2.4.16 X sonlu bir küme, D birleşimlerin tam X – yarılatisi olmak üzere $m \geq 1$ için $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_m$ olacak biçimdeki $Q = \{T_0, T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ tam X – yarılatisini alalım. Eğer $Q = \{T_0, T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ ile $D' = \{\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_m\}$ arasında bir tam α – izomorfizması varsa $|\Omega(Q)| = m_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}|R(D')| = \;& m_0 \cdot \left(2^{|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1|} - 2^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1|}\right) \\ & \cdots \left((m+1)^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|} - m^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|}\right) \cdot \; m^{|X \setminus \bar{T}_m|}\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 2.4.17 X sonlu bir küme, D birleşimlerin tam X – yarılatisi olmak üzere $m \geq 1$ için $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_m$ olacak biçimdeki $Q = \{T_0, T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ tam X – yarılatisini alalım. O zaman

$$\begin{aligned}\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \;& \left(2^{|T_1 \setminus T_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T_2 \setminus T_1|} - 2^{|T_2 \setminus T_1|}\right) \\ & \cdots \left((m+1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - m^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot \; m^{|X \setminus T_m|}\end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.4.18 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \left\{T_0, T_1, \ldots, T_j, \ldots, T_m\right\}$ tam X – yarılatisinin elemanları, $m \geq 3$ ve $0 \leq j \leq m-3$ için

$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}$$

koşullarını sağlasın. O zaman Q, XI – yarılatistir.

Teorem 2.4.19 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisinin elemanları, $m \geq 3$ ve $0 \leq j \leq m-3$ için

$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}$$

koşullarını sağlasın. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m}(Y_i^\alpha \times T_i)$ ve $V(D, \alpha) = Q$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(D)$ elemanının regüler eleman olması için gerek ve yeter koşul $D' \subseteq D$ bir altyarılatis olmak üzere, $p = 0,1, \dots, m-1$ ve $q = 1,2, \dots, m$, $(p \neq j+2, q \neq j+3)$ için

$$\varphi(T_{j+1}) \cap \varphi(T_{j+2}) \subseteq Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_j^\alpha, \varphi(T_{j+2}) \subseteq Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_j^\alpha \cup Y_{j+2}^\alpha$$
$$\varphi(T_p) \subseteq Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_p^\alpha, Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \emptyset$$

koşullarını sağlayan bir $\varphi: Q \to D'$ tam α – izomorfizmasının var olmasıdır.

Sonuç 2.4.20 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisinin elemanları, $m \geq 3$ ve $0 \leq j \leq m-3$ için

$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}$$

koşullarını sağlasın. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m}(Y_i^\alpha \times T_i)$ ve $V(Q, \alpha) = Q$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(D)$ elemanının sağ birim eleman olması için gerek ve yeter koşul $p = 0,1, \dots, m-1$ ve $q = 1,2, \dots, m$, $(p \neq j+2, q \neq j+3)$ için

$$T_{j+1} \cap T_{j+2} \subseteq Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_j^\alpha, T_{j+2} \subseteq Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_j^\alpha \cup Y_{j+2}^\alpha$$
$$T_p \subseteq Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_p^\alpha, Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Teorem 2.4.21 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisinin elemanları, $m \geq 3$ ve $0 \leq j \leq m-3$ için

$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}$$

koşullarını sağlasın. Eğer $Q = \{T_0, T_1, T_2, \dots, T_m\}$ ile $D' = \{\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m\}$ arasında bir tam α – izomorfizması varsa $|\Omega(Q)| = m_0$ olmak üzere

a) $j = 0$ ise

$$\begin{aligned}|R(D')| = \ & 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_2|} - 1\right) \cdot \left(2^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1|} - 1\right) \cdot \left(5^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_3|} - 4^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_3|}\right) \\ & \cdots \left((m+1)^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|} - m^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus \bar{T}_m|}\end{aligned}$$

olur.

b) $1 \leq j \leq m-3$ ise

$$\begin{aligned}|R(D')| = \ & 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_2|} - 1\right) \cdots \left((j+1)^{|\bar{T}_{j-1} \setminus \bar{T}_{j-2}|} - j^{|\bar{T}_{j-1} \setminus \bar{T}_{j-2}|}\right) \\ & \cdot (j+1)^{|\bar{T}_{j+1} \cap \bar{T}_{j+2} \setminus \bar{T}_j|} \cdot \left((j+2)^{|\bar{T}_{j+1} \setminus \bar{T}_{j+2}|} - (j+1)^{|\bar{T}_{j+1} \setminus \bar{T}_{j+2}|}\right) \\ & \cdot \left((j+2)^{|\bar{T}_{j+2} \setminus \bar{T}_{j+1}|} - (j+1)^{|\bar{T}_{j+2} \setminus \bar{T}_{j+1}|}\right) \\ & \cdot \left((j+5)^{|\bar{T}_{j+4} \setminus \bar{T}_{j+3}|} - (j+4)^{|\bar{T}_{j+4} \setminus \bar{T}_{j+3}|}\right) \\ & \cdots \left((m+1)^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|} - m^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus \bar{T}_m|}\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 2.4.22 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisinin elemanları, $m \geq 3$ ve $0 \leq j \leq m-3$ için

$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}$$

koşullarını sağlasın. O zaman

a) $j = 0$ ise

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(2^{|T_1 \setminus T_2|} - 1\right) \cdot \left(2^{|T_2 \setminus T_1|} - 1\right) \cdot \left(5^{|T_4 \setminus T_3|} - 4^{|T_4 \setminus T_3|}\right) \cdots \left((m+1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - m^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus T_m|}$$

olur.

b) $1 \le j \le m - 3$ ise

$$\begin{aligned}\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = {} & \left(2^{|T_1 \setminus T_2|} - 1\right) \cdots \left((j+1)^{|T_{j-1} \setminus T_{j-2}|} - j^{|T_{j-1} \setminus T_{j-2}|}\right) \\ & \cdot (j+1)^{|T_{j+1} \cap T_{j+2} \setminus T_j|} \cdot \left((j+2)^{|T_{j+1} \setminus T_{j+2}|} - (j+1)^{|T_{j+1} \setminus T_{j+2}|}\right) \\ & \cdot \left((j+2)^{|T_{j+2} \setminus T_{j+1}|} - (j+1)^{|T_{j+2} \setminus T_{j+1}|}\right) \\ & \cdot \left((j+5)^{|T_{j+4} \setminus T_{j+3}|} - (j+4)^{|T_{j+4} \setminus T_{j+3}|}\right) \\ & \cdots \left((m+1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - m^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus T_m|}\end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.4.23 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ tam X – yarılatisinin elemanları

$T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0$, $T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0$,

$T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0$, $T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0$,

$T_2 \cup T_1 = T_0$, $T_5 \cup T_4 = T_3$, $T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset$, $T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset$,

$T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset$, $T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset$

koşullarını sağlasın. O zaman Q, XI – yarılatistir.

Teorem 2.4.24 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ tam X – yarılatisinin elemanları

$T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0$, $T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0$,

$T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0$, $T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0$,

$T_2 \cup T_1 = T_0$, $T_5 \cup T_4 = T_3$, $T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset$, $T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset$,

$T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset$, $T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset$

koşullarını sağlasın. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{6}(Y_i^\alpha \times T_i)$ ve $V(D, \alpha) = Q$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(D)$ elemanının regüler eleman olması için gerek ve yeter koşul $D' \subseteq D$ bir altyarılatis olmak üzere

$$\varphi(T_6) \subseteq Y_6^\alpha,\ \varphi(T_5) \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha,\ \varphi(T_4) \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha,$$
$$\varphi(T_2) \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha,\ \varphi(T_1) \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$$
$$Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \emptyset,\ Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \emptyset,\ Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \emptyset,\ Y_5^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \emptyset$$

koşullarını sağlayan bir $\varphi: Q \to D'$ tam α – izomorfizmasının var olmasıdır.

Sonuç 2.4.25 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ tam X – yarılatisinin elemanları

$$T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,$$
$$T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,$$
$$T_2 \cup T_1 = T_0,\ T_5 \cup T_4 = T_3,\ T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset,\ T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset,$$
$$T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset,\ T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset$$

koşullarını sağlasın. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m}(Y_i^\alpha \times T_i)$ ve $V(Q, \alpha) = Q$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(D)$ elemanının sağ birim eleman olması için gerek ve yeter koşul

$$T_6 \subseteq Y_6^\alpha,\ T_5 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha,\ T_4 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha,$$
$$T_2 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha,\ T_1 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$$
$$Y_1^\alpha \cap T_1 \neq \emptyset,\ Y_2^\alpha \cap T_2 \neq \emptyset,\ Y_4^\alpha \cap T_4 \neq \emptyset,\ Y_5^\alpha \cap T_5 \neq \emptyset$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Teorem 2.4.26 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ tam X – yarılatisinin elemanları

$$T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,$$
$$T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,$$
$$T_2 \cup T_1 = T_0,\ T_5 \cup T_4 = T_3,\ T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset,\ T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset,$$
$$T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset,\ T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset$$

koşullarını sağlasın. Eğer $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ ile $D' = \{\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \bar{T}_4, \bar{T}_5, \bar{T}_6\}$ arasında bir tam α – izomorfizması varsa $|\Omega(Q)| = m_0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
|R(D')| = \quad & m_0 \cdot 4 \cdot \left(2^{|\bar{T}_5 \setminus \bar{T}_4|} - 1\right) \cdot \left(2^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_5|} - 1\right) \cdot 4^{|\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1 \setminus \bar{T}_3|} \\
& \cdot \left(5^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1|} - 4^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1|}\right) \cdot \left(5^{|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_2|} - 4^{|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_2|}\right) \cdot \ 7^{|X \setminus \bar{T}_0|}
\end{aligned}
$$

olur.

Sonuç 2.4.27 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ tam X – yarılatisinin elemanları

$$
\begin{aligned}
& T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0, T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0, \\
& T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0, T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0, \\
& T_2 \cup T_1 = T_0, T_5 \cup T_4 = T_3, T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, \\
& T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset, T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

koşullarını sağlasın. O zaman

$$
\begin{aligned}
\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \quad & 4 \cdot \left(2^{|T_5 \setminus T_4|} - 1\right) \cdot \left(2^{|T_4 \setminus T_5|} - 1\right) \cdot 4^{|T_2 \cap T_1 \setminus T_3|} \\
& \cdot \left(5^{|T_2 \setminus T_1|} - 4^{|T_2 \setminus T_1|}\right) \cdot \left(5^{|T_1 \setminus T_2|} - 4^{|T_1 \setminus T_2|}\right) \cdot \ 7^{|X \setminus T_0|}
\end{aligned}
$$

olur.

Teorem 2.4.28 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ tam X – yarılatisinin elemanları

$$
\begin{aligned}
& T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0, T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0, \\
& T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0, T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0, \\
& T_2 \cup T_1 = T_0, T_6 \cup T_5 = T_4, T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, \\
& T_5 \setminus T_6 \neq \emptyset, T_6 \setminus T_5 \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

koşullarını sağlasın. O zaman Q, XI – yarılatis olması için gerek ve yeter koşul $T_6 \cap T_5 = \emptyset$ olmasıdır.

Teorem 2.4.29 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ tam X – yarılatisinin elemanları

$$T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0, T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,$$
$$T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0, T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,$$
$$T_2 \cup T_1 = T_0, T_6 \cup T_5 = T_4, T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset,$$
$$T_5 \setminus T_6 \neq \emptyset, T_6 \setminus T_5 \neq \emptyset$$

koşullarını sağlasın. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{6}(Y_i^\alpha \times T_i)$ ve $V(D,\alpha) = Q$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(D)$ elemanının regüler eleman olması için gerek ve yeter koşul $D' \subseteq D$ bir altyarılatis olmak üzere

$$\varphi(T_6) \subseteq Y_6^\alpha, \varphi(T_5) \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha, \varphi(T_3) \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha,$$
$$\varphi(T_2) \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha, \varphi(T_1) \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$$
$$Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \emptyset, Y_3^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \emptyset$$

koşullarını sağlayan bir $\varphi: Q \to D'$ tam α – izomorfizmasının var olmasıdır.

Sonuç 2.4.30 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ tam X – yarılatisinin elemanları

$$T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0, T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,$$
$$T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0, T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,$$
$$T_2 \cup T_1 = T_0, T_6 \cup T_5 = T_4, T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset,$$
$$T_5 \setminus T_6 \neq \emptyset, T_6 \setminus T_5 \neq \emptyset,$$

koşullarını sağlasın. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m}(Y_i^\alpha \times T_i)$ ve $V(Q,\alpha) = Q$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(D)$ elemanının sağ birim eleman olması için gerek ve yeter koşul

$$T_6 \subseteq Y_6^\alpha, T_5 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha, T_3 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha,$$
$$T_2 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha, T_1 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$$
$$Y_1^\alpha \cap T_1 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap T_2 \neq \emptyset, Y_3^\alpha \cap T_3 \neq \emptyset$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Teorem 2.4.31 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ tam X – yarılatisinin elemanları

$T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0$, $T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0$,

$T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0$, $T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0$,

$T_2 \cup T_1 = T_0$, $T_6 \cup T_5 = T_4$, $T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset$, $T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset$,

$T_5 \setminus T_6 \neq \emptyset$, $T_6 \setminus T_5 \neq \emptyset$

koşullarını sağlasın. Eğer $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ ile $D' = \{\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \bar{T}_4, \bar{T}_5, \bar{T}_6\}$ arasında bir tam α – izomorfizması varsa $|\Omega(Q)| = m_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |R(D')| = \; & m_0 \cdot 4 \cdot \left(4^{|\bar{T}_3 \setminus \bar{T}_4|} - 3^{|\bar{T}_3 \setminus \bar{T}_4|}\right) \cdot 4^{|\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1 \setminus \bar{T}_3|} \\ & \cdot \left(5^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1|} - 4^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1|}\right) \cdot \left(5^{|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_2|} - 4^{|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \bar{T}_0|} \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 2.4.32 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ tam X – yarılatisinin elemanları

$T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0$, $T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0$,

$T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0$, $T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0$,

$T_2 \cup T_1 = T_0$, $T_6 \cup T_5 = T_4$, $T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset$, $T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset$,

$T_5 \setminus T_6 \neq \emptyset$, $T_6 \setminus T_5 \neq \emptyset$

koşullarını sağlasın. O zaman

$$\begin{aligned} \left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \; & \left(4^{|T_3 \setminus T_4|} - 3^{|T_3 \setminus T_4|}\right) \cdot 4^{|T_2 \cap T_1 \setminus T_3|} \\ & \cdot \left(5^{|T_2 \setminus T_1|} - 4^{|T_2 \setminus T_1|}\right) \cdot \left(5^{|T_1 \setminus T_2|} - 4^{|T_1 \setminus T_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus T_0|} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.4.33 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $m \geq 3$ için $T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}$, $T_2 \cup T_1 = T_3$, $T_3 \subset T_4 \subset \cdots \subset T_m$ olacak biçimdeki $Q = \{T_1, T_2, T_3, \ldots, T_m\}$ tam X – yarılatisini alalım. O zaman Q, XI – yarılatis olması için gerek ve yeter koşul $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ olmasıdır.

Teorem 2.4.34 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $m \geq 3$ için $T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}$, $T_2 \cup T_1 = T_3$, $T_3 \subset T_4 \subset \cdots \subset T_m$ ve $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ olacak biçimdeki $Q = \{T_1, T_2, T_3, \ldots, T_m\}$ tam X – yarılatisini alalım. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{m}(Y_i^\alpha \times T_i)$ ve $V(D, \alpha) = Q$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(D)$ elemanının regüler eleman olması için gerek ve yeter koşul $D' \subseteq D$ bir altyarılatis olmak üzere, $k = 4,5, \dots, m-1$ ve $q = 4,5, \dots, m$ için

$$\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha,\ \varphi(T_2) \subseteq Y_2^\alpha,\ \varphi(T_k) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \dots \cup Y_k^\alpha,\ Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \emptyset$$

koşullarını sağlayan bir $\varphi: Q \to D'$ tam α – izomorfizmasının var olmasıdır.

Sonuç 2.4.35 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $m \geq 3$ için $T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}$, $T_2 \cup T_1 = T_3$, $T_3 \subset T_4 \subset \dots \subset T_m$ ve $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ olacak biçimdeki $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisini alalım. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{m}(Y_i^\alpha \times T_i)$ ve $V(Q,\alpha) = Q$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(D)$ elemanının sağ birim eleman olması için gerek ve yeter koşul $k = 4,5, \dots, m-1$ ve $q = 4,5, \dots, m$ için

$$T_1 \subseteq Y_1^\alpha,\ T_2 \subseteq Y_2^\alpha,\ T_k \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \dots \cup Y_k^\alpha,\ Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Teorem 2.4.36 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $m \geq 3$ için $T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}$, $T_2 \cup T_1 = T_3$, $T_3 \subset T_4 \subset \dots \subset T_m$ ve $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ olacak biçimdeki $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisini alalım. Eğer $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ile $D' = \{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \dots, \bar{T}_m\}$ arasında bir tam α – izomorfizması varsa $|\Omega(Q)| = m_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}|R(D')| = \quad & 2 \cdot m_0 \cdot \left(4^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_3|} - 3^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_3|}\right) \\ & \cdots \left(m^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|} - (m-1)^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|}\right) \cdot\ m^{|X \setminus \bar{T}_m|}\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 2.4.37 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $m \geq 3$ için $T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}$, $T_2 \cup T_1 = T_3$, $T_3 \subset T_4 \subset \dots \subset T_m$ ve $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ olacak biçimdeki $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisini alalım. O zaman

$$\begin{aligned}\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \quad & \left(4^{|T_4 \setminus T_3|} - 3^{|T_4 \setminus T_3|}\right) \\ & \cdots \left(m^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - (m-1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot\ m^{|X \setminus T_m|}\end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.4.38 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisinin elemanları, $m \geq 6$ için

$$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m, T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m, T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_2 \cup T_1 = T_0, T_4 \cup T_5 = T_6, T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset,$$
$$T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset, T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset$$

koşullarını sağlasın. O zaman Q, XI – yarılatis olması için gerek ve yeter koşul $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ olmasıdır.

Teorem 2.4.39 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisinin elemanları, $m \geq 6$ için

$$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m, T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m, T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_2 \cup T_1 = T_0, T_4 \cup T_5 = T_6, T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset,$$
$$T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset, T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset$$

koşullarını sağlasın. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{m} (Y_i^\alpha \times T_i)$ ve $V(D, \alpha) = Q$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(D)$ elemanının regüler eleman olması için gerek ve yeter koşul $p = 6,7, \dots, m-1$ ve $q = 4,5,7, \dots, m$ için

$$\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha, \varphi(T_2) \subseteq Y_2^\alpha, \varphi(T_4) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha,$$
$$\varphi(T_5) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha, \varphi\left(T_p\right) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \cdots \cup Y_p^\alpha,$$
$$Y_q^\alpha \cap \varphi\left(T_q\right) \neq \emptyset$$

koşullarını sağlayan bir $\varphi: Q \to D'$ tam α – izomorfizmasının var olmasıdır.

Sonuç 2.4.40 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisinin elemanları, $m \geq 6$ için

$$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m, T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m, T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_2 \cup T_1 = T_0, T_4 \cup T_5 = T_6, T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset,$$

$T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset, T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset$

koşullarını sağlasın. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{m}(Y_i^{\alpha} \times T_i)$ ve $V(Q,\alpha) = Q$ ise α elemanının sağ birim eleman olması için gerek ve yeter koşul $p = 6,7,\dots,m-1$ ve $q = 4,5,7,\dots,m$ için aşağıdakilerin sağlanmasıdır.

$$T_1 \subseteq Y_1^{\alpha}, T_2 \subseteq Y_2^{\alpha}, T_4 \subseteq Y_1^{\alpha} \cup Y_2^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_4^{\alpha},$$
$$T_5 \subseteq Y_1^{\alpha} \cup Y_2^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_5^{\alpha}, T_p \subseteq Y_1^{\alpha} \cup Y_2^{\alpha} \cup \dots \cup Y_p^{\alpha},\ Y_q^{\alpha} \cap T_q \neq \emptyset$$

Teorem 2.4.41 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisinin elemanları, $m \geq 6$ için

$$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m,$$
$$T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m,$$
$$T_2 \cup T_1 = T_0, T_4 \cup T_5 = T_6, T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset,$$
$$T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset, T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset$$

koşullarını sağlasın. Eğer $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ ile $D' = \{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \dots, \bar{T}_m\}$ arasında bir tam α – izomorfizması varsa $|\Omega(Q)| = m_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}|R(D')| = \quad & 4 \cdot m_0 \cdot 3^{|\bar{T}_4 \cap \bar{T}_5 \setminus \bar{T}_3|} \cdot \left(4^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_5|} - 3^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_5|}\right) \cdot \left(4^{|\bar{T}_5 \setminus \bar{T}_4|} - 3^{|\bar{T}_5 \setminus \bar{T}_4|}\right) \\ & \cdot \left(7^{|\bar{T}_7 \setminus \bar{T}_6|} - 6^{|\bar{T}_7 \setminus \bar{T}_6|}\right) \cdots \left(m^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|} - (m-1)^{|\bar{T}_m \setminus \bar{T}_{m-1}|}\right) \cdot\ m^{|X \setminus \bar{T}_m|}\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 2.4.42 D birleşimlerin tam X – yarılatisi olsun. $Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$ tam X – yarılatisinin elemanları, $m \geq 6$ için

$$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m,$$
$$T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m, T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \dots \subset T_m,$$
$$T_2 \cup T_1 = T_0, T_4 \cup T_5 = T_6, T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset,$$
$$T_4 \setminus T_5 \neq \emptyset, T_5 \setminus T_4 \neq \emptyset$$

koşullarını sağlasın. O zaman

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \begin{aligned}[t] & 3^{|T_4 \cap T_5 \setminus T_3|} \cdot \left(4^{|T_4 \setminus T_5|} - 3^{|T_4 \setminus T_5|}\right) \cdot \left(4^{|T_5 \setminus T_4|} - 3^{|T_5 \setminus T_4|}\right) \\ & \left(7^{|T_7 \setminus T_6|} - 6^{|T_7 \setminus T_6|}\right) \cdots \left(m^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - (m-1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot \ m^{|X \setminus T_m|} \end{aligned}$$

olur.

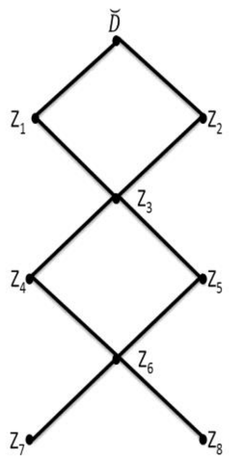
BÖLÜM 3
ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

3.1. $\sum_3(X,9)$ sınıfı

X boş olmayan bir küme, $D=\{\breve{D},Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5,Z_6,Z_7,Z_8\}$, X 'in alt kümelerinden oluşan ve elemanları aşağıdaki koşulları sağlayan bir üst yarılatis olsun.

$$Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D}$$
$$Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D}$$
$$Z_8 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D}$$
$$Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset D$$
$$Z_8 \backslash Z_7 \neq \varnothing,\ Z_7 \backslash Z_8 \neq \varnothing,\ Z_2 \backslash Z_1 \neq \varnothing,\ Z_1 \backslash Z_2 \neq \varnothing,\ Z_5 \backslash Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \backslash Z_5 \neq \varnothing$$

D kümelerdeki birleşme işlemine göre kapalı olduğundan tam X -yarılatisdir ve en büyük elemanı $\breve{D}$ dır. D nin diyagramı Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1. D nin diyagramı

$P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7,P_8$ kümeleri $\breve{D}$ nın ikişer ikişer ayrık alt kümeleri olmak üzere D nin

$$C(D)=\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7,P_8\}$$

karakteristik kümeler ailesini ve

$$\theta : D \to C(D),\ \theta(Z_i) = P_i\ (i = 1,2,\ldots,8), \theta(\breve{D}) = P_0$$

biçiminde tanımlanan karakteristik dönüşümünü alalım. Teorem 2.4.3'den bu şekilde tanımlı $C(D)$ ve θ vardır ve teklikle belirlidir. Buradan Lemma 2.4.6'dan θ nın bir tam izomorfizma olduğu kullanılırsa, D nin her bir Z elemanı, $\widehat{D}(Z) = D \setminus \{T \in D \mid Z \subseteq T\}$ olmak üzere

$$Z = \theta(\breve{D}) \cup \bigcup_{T \in \widehat{D}(Z)} \theta(T) = P_0 \cup \bigcup_{T \in \widehat{D}(Z)} \theta(T)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\widehat{D}(\breve{D}) = D \setminus \{Z \in D \mid \breve{D} \subseteq Z\} = D \setminus \{\breve{D}\} = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$$

$$\widehat{D}(Z_1) = D \setminus \{Z \in D \mid Z_1 \subseteq Z\} = D \setminus \{\breve{D}, Z_1\} = \{Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$$

$$\widehat{D}(Z_2) = D \setminus \{Z \in D \mid Z_2 \subseteq Z\} = D \setminus \{\breve{D}, Z_2\} = \{Z_1, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$$

$$\widehat{D}(Z_3) = D \setminus \{Z \in D \mid Z_3 \subseteq Z\} = D \setminus \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3\} = \{Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$$

$$\widehat{D}(Z_4) = D \setminus \{Z \in D \mid Z_4 \subseteq Z\} = D \setminus \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\} = \{Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$$

$$\widehat{D}(Z_5) = D \setminus \{Z \in D \mid Z_5 \subseteq Z\} = D \setminus \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_5\} = \{Z_4, Z_6, Z_7, Z_8\}$$

$$\widehat{D}(Z_6) = D \setminus \{Z \in D \mid Z_6 \subseteq Z\} = D \setminus \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6\} = \{Z_7, Z_8\}$$

$$\widehat{D}(Z_7) = D \setminus \{Z \in D \mid Z_7 \subseteq Z\} = D \setminus \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7\} = \{Z_8\}$$

$$\widehat{D}(Z_8) = D \setminus \{Z \in D \mid Z_8 \subseteq Z\} = D \setminus \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_8\} = \{Z_7\}$$

olduğu kullanılırsa D nin her bir elemanı için

$$\breve{D} = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8$$
$$Z_1 = P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8$$
$$Z_2 = P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8$$
$$Z_3 = P_0 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8$$
$$Z_4 = P_0 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8 \qquad \textbf{(3.1)}$$
$$Z_5 = P_0 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8$$
$$Z_6 = P_0 \cup P_7 \cup P_8$$
$$Z_7 = P_0 \cup P_8$$
$$Z_8 = P_0 \cup P_7$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada Sonuç 2.4.9'dan $P_1, P_2, P_4, P_5, P_7, P_8$ kümeleri D nin temel kaynak elemanlarıdır ve her biri boş kümeden farklıdır. Sonuç 2.4.10'dan P_3, P_6 kümeleri yardımcı kaynak elemanlarıdır ve boş küme olabilirler. Ayrıca P_0 kümesi de yardımcı kaynak elemanı olduğundan boş küme olabilir. Buradan $\bigcup_{i=0} P_0 = \breve{D} \subset X$ olduğu dikkate alınırsa, boş kümeden farklı 6 temel kaynak elemanı var olduğundan $|X| \geq 6$ dır.

Şimdi X sonlu bir küme olduğunda altkümelerinden kaç tanesinin bu diyagramı verdiğini hesaplayalım. Bunun için D'ye tam izomorf olan tam X - yarılatislerinin kümesini $\sum_3 (X,9)$ ile gösterelim. $|X| = n$ olsun. Öncelikle D'nin otomorfizmleri bulalım.

D nin otomorfizmleri

$$id_D = \begin{pmatrix} \breve{D} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 Z_8 \\ \breve{D} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 Z_8 \end{pmatrix}, \; \tau_1 = \begin{pmatrix} \breve{D} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 Z_8 \\ \breve{D} Z_2 Z_1 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 Z_8 \end{pmatrix}$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} \breve{D} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 Z_8 \\ \breve{D} Z_1 Z_2 Z_3 Z_5 Z_4 Z_6 Z_7 Z_8 \end{pmatrix}, \; \tau_3 = \begin{pmatrix} \breve{D} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 Z_8 \\ \breve{D} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_8 Z_7 \end{pmatrix}$$

$$\tau_4 = \begin{pmatrix} \breve{D} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 Z_8 \\ \breve{D} Z_2 Z_1 Z_3 Z_5 Z_4 Z_6 Z_7 Z_8 \end{pmatrix}, \; \tau_5 = \begin{pmatrix} \breve{D} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 Z_8 \\ \breve{D} Z_2 Z_1 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_8 Z_7 \end{pmatrix}$$

$$\tau_6 = \begin{pmatrix} \breve{D} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 Z_8 \\ \breve{D} Z_1 Z_2 Z_3 Z_5 Z_4 Z_6 Z_8 Z_7 \end{pmatrix}, \; \tau_7 = \begin{pmatrix} \breve{D} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 Z_8 \\ \breve{D} Z_2 Z_1 Z_3 Z_5 Z_4 Z_6 Z_8 Z_7 \end{pmatrix}$$

biçiminde olup $q = 8$ tanedir. Ayrıca temel kaynak elemanlarının sayısı $\delta = 6$, $|D| = m = 9$ ve $C_j^k = \dfrac{j!}{k! \cdot (j-k)!}$ dir. Buradan Teorem 2.4.12'den

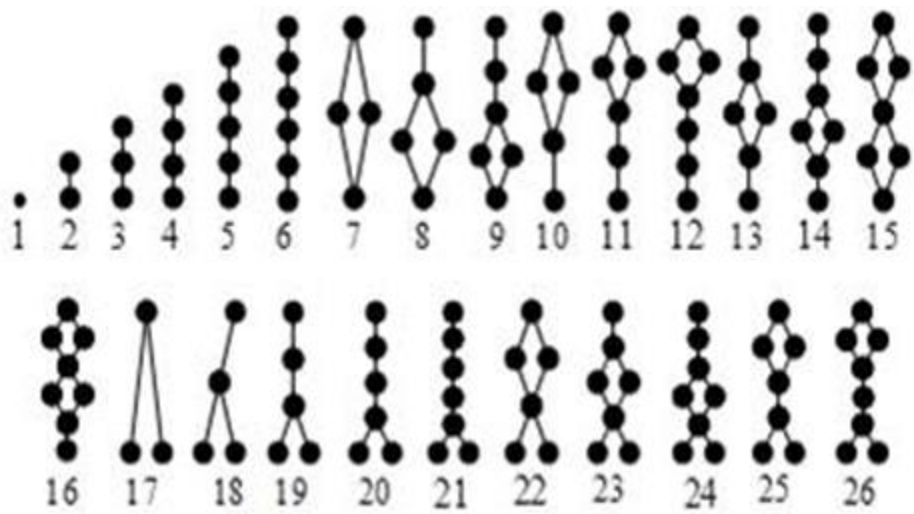
$$\left|\sum\nolimits_n (X,m)\right| = \frac{1}{q}\sum_{p=\delta}^{m}\left(\sum_{i=1}^{p+1}\left(\frac{(-1)^{p+i+1}\cdot C_{m-\delta}^{p-\delta}\cdot C_p^{\delta}\cdot(\delta!)\cdot\left((p-\delta)!\right)\cdot i^n}{(i-1)!\cdot(p-i+1)!}\right)\right)$$

olduğu kullanılarak gerekli hesaplamalar yapıldığında, $\sum_3(X,9)$ kümesinin eleman sayısı

$$\left|\sum\nolimits_3 (X,9)\right| = \frac{1}{8}(4^n - 6.5^n + 15.6^n - 20.7^n + 15.8^n - 6.9^n + 10^n)$$

olarak bulunur.

Şimdi D'nin tam X - alt yarılatislerini bulalım. D'nin X - alt yarılatislerinin diyagramları aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.2. D'nin X - alt yarılatislerinin diyagramları

Lemma 3.1.1 Şekil 3.2'de diyagramları verilen D nin X - alt yarılatislerinden, tam X - alt yarılatis olanlar aşağıda verilenlerdir.

1) $\{\breve{D}\}, \{Z_1\}, \{Z_2\}, \{Z_3\}, \{Z_4\}, \{Z_5\}, \{Z_6\}, \{Z_7\}, \{Z_8\}$

2) $\{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_3\}, \{Z_5, Z_1\}, \{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, Z_3\}, \{Z_6, Z_1\}$, $\{Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_7, Z_3\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_5\}, \{Z_8, Z_1\}, \{Z_8, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_3\}, \{Z_8, Z_5\}, \{Z_8, Z_6\}, \{Z_1, \breve{D}\}, \{Z_2, \breve{D}\}, \{Z_3, \breve{D}\}, \{Z_4, \breve{D}\}, \{Z_5, \breve{D}\}, \{Z_6, \breve{D}\}$, $\{Z_7, \breve{D}\}, \{Z_8, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_6\}, \{Z_6, Z_5\}, \{Z_8, Z_4\}$

3) $\{Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, Z_2\}$,

$\{Z_7, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_3\}, \{Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_2\},$

$\{Z_8, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_5, Z_1\}, \{Z_8, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_2\},$

$\{Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_1\},$

$\{Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5\}, \{Z_8, Z_6, Z_4\},$

$\{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_4, Z_2\}, \{Z_8, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5\}, \{Z_7, Z_6, Z_4\},$

$\{Z_6, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_3\}, \{Z_7, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_1\},$

$\{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3\}$

4) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_5, Z_3, Z_1\},$

$\{Z_8, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},$

$\{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_3, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_1\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_1\},$

$\{Z_8, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\},$

$\{Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\},$

$\{Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}$

5) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

$\{Z_8, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$

$\{Z_8, Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

$\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$

$\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\}$

$\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\}$

$\{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

6) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

7) $\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

8) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\},$

$\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\},$

$\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}$

9) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

10) $\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

11) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

$\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

$\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

12) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

13) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$

14) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

15) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

16) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

17) $\{Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_6\}, \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

18) $\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_2\}$

19) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

20) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\}\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}$

21) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

22) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}$

23) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$

24) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

25) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

26) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

27) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

İspat: D’nin altkümelerinden tam X - altyarılatis olanlar kümelerdeki birleşim işlemine kapalı olanlardır. 3 elemanlı altkümelerini ele alalım. $|D| = 9$ olduğundan 3 elemanlı altkümelerinin sayısı 84 tanedir. Bu kümelerden yukarıda 3 ve 17 numarada verilen 66 tane altküme, birleşim işlemine kapalı olduğundan tam X – altyarılatisdir. Ancak

$\{Z_8, Z_7, Z_1\}, \{Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_8, Z_5, Z_4\}, \{Z_7, Z_5, Z_4\}, \{Z_8, Z_7, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_4\},$

$\{Z_5, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_5, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_4\}, \{Z_8, Z_2, Z_1\}, \{Z_7, Z_2, Z_1\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5\}, \{Z_8, Z_7, Z_3\}, \{Z_6, Z_2, Z_1\}, \{Z_5, Z_2, Z_1\}, \{Z_4, Z_2, Z_1\}$

kümeleri birleşim işlemine kapalı olmadığından tam X – altyarılatis değildir. Benzer olarak diğer altkümelerin tam X – altyarılatis olduğu da gösterilebilir.

$B_X(D)$ nin sağ birim elemanları, idempotent ve regüler elemanları D nin tam XI – yarılatis olması kullanılarak bulunacaktır. Bu yüzden öncelikle D nin hangi koşullar altında XI – yarılatis olduğunu inceleyelim.

Lemma 3.1.2 $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$ tam X – yarılatisinin, tam XI – yarılatis olması için gerek ve yeter koşul $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ olmasıdır.

İspat: Öncelikle her $t \in \breve{D}$ için D_t kümesini belirleyelim. $\breve{D} = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8$ biçiminde ayrık kümelerin bileşiminden oluştuğu için, her bir $t \in \breve{D}$ elemanı bu kümelerin sadece bir tanesinin elemanıdır. Böylece (3.1) eşitliğinden yararlanılarak

$t \in P_0$ ise $D_t = D$

$t \in P_1$ ise $D_t = \{Z_2, \breve{D}\}$

$t \in P_2$ ise $D_t = \{Z_1, \breve{D}\}$

$t \in P_3$ ise $D_t = \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

$t \in P_4$ ise $D_t = \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

$t \in P_5$ ise $D_t = \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

$t \in P_6$ ise $D_t = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

$t \in P_7$ ise $D_t = \{Z_8, Z_6 Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

$t \in P_8$ ise $D_t = \{Z_7, Z_6 Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

olur. Bu eşitliklerden yararlanılarak her bir D_t kümesinin $N(D, D_t)$ ile gösterilen alt sınırlarının kümesi

$t \in P_0$ ise $N(D, D_t) = \emptyset$

$t \in P_1$ ise $N(D, D_t) = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}$

$t \in P_2$ ise $N(D, D_t) = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}$

$t \in P_3$ ise $N(D, D_t) = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}$

$t \in P_4$ ise $N(D, D_t) = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5\}$

$t \in P_5$ ise $N(D, D_t) = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$

$t \in P_6$ ise $N(D, D_t) = \{Z_8, Z_7, Z_6\}$

$t \in P_7$ ise $N(D, D_t) = \{Z_8\}$

$t \in P_8$ ise $N(D, D_t) = \{Z_7\}$

biçiminde elde edilir. O zaman her bir D_t kümesinin, $\Lambda(D, D_t) = \cup N(D, D_t)$ biçimindeki en büyük alt sınırlarının kümesi

$$
\begin{aligned}
&t \in P_0 \ \text{ ise} \cup N(D, D_t) = \emptyset \\
&t \in P_1 \ \text{ ise} \cup N(D, D_t) = Z_2 \\
&t \in P_2 \ \text{ ise} \cup N(D, D_t) = Z_1 \\
&t \in P_3 \ \text{ ise} \cup N(D, D_t) = Z_3 \\
&t \in P_4 \ \text{ ise} \cup N(D, D_t) = Z_5 \\
&t \in P_5 \ \text{ ise} \cup N(D, D_t) = Z_4 \\
&t \in P_6 \ \text{ ise} \cup N(D, D_t) = Z_6 \\
&t \in P_7 \ \text{ ise} \cup N(D, D_t) = Z_8 \\
&t \in P_8 \ \text{ ise} \cup N(D, D_t) = Z_7
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

olarak bulunur.

D, XI – yarılatis olsun. O zaman her $t \in \breve{D}$ için $\Lambda(D, D_t) \in D$ koşulu sağlanır. Ancak eşitlik (3.2) den $t \in P_0$ olursa $\cup N(D, D_t) = \emptyset \notin D$ olduğu görülmektedir. O halde $P_0 = \emptyset$ dir. Buradan P_7 ve P_8 ayrık kümeler olduğundan eşitlik (3.1) deki $Z_7 = P_8 \cup P_0$ ve $Z_8 = P_7 \cup P_0$ eşitlikleri kullanılırsa $Z_8 \cap Z_7 = P_7 \cap P_8 = \emptyset$ elde edilir.

Tersine $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ olsun. O zaman $P_0 = \emptyset$ olur ve her $t \in \breve{D}$ için $\Lambda(D, D_t) \in D$ koşulu sağlanır. Diğer yandan eşitlik (3.2) den

$$
\begin{aligned}
&t \in Z_8 = P_7 \Rightarrow Z_8 = \Lambda(D, D_t) \\
&t \in Z_7 = P_8 \Rightarrow Z_7 = \Lambda(D, D_t) \\
&t \in Z_6 = P_8 \cup P_7 \quad \Rightarrow \Lambda(D, D_t) \in \{Z_8, Z_7\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow Z_6 = Z_8 \cup Z_7 = \textstyle\bigcup_{t \in Z_6} \Lambda(D, D_t) \\
&t \in Z_5 = P_8 \cup P_7 \cup P_6 \cup P_4 \quad \Rightarrow \Lambda(D, D_t) \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow Z_5 = Z_8 \cup Z_7 \cup Z_6 \cup Z_5 = \textstyle\bigcup_{t \in Z_5} \Lambda(D, D_t) \\
&t \in Z_4 = P_8 \cup P_7 \cup P_6 \cup P_5 \quad \Rightarrow \Lambda(D, D_t) \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow Z_4 = Z_8 \cup Z_7 \cup Z_6 \cup Z_4 = \textstyle\bigcup_{t \in Z_4} \Lambda(D, D_t) \\
&t \in Z_3 = P_5 \cup P_4 \quad \Rightarrow \Lambda(D, D_t) \in \{Z_5, Z_4\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow Z_3 = Z_5 \cup Z_4 = \textstyle\bigcup_{t \in Z_3} \Lambda(D, D_t) \\
&t \in Z_2 = P_8 \cup \cdots \cup P_3 \cup P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(D, D_t) \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow Z_5 = Z_8 \cup \cdots \cup Z_3 \cup Z_1 = \textstyle\bigcup_{t \in Z_2} \Lambda(D, D_t)
\end{aligned}
$$

$t \in Z_1 = P_8 \cup \cdots \cup P_3 \cup P_2 \quad \Rightarrow \Lambda(D, D_t) \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}$

$\Rightarrow Z_5 = Z_8 \cup \cdots \cup Z_3 \cup Z_2 = \bigcup_{t \in Z_1} \Lambda(D, D_t)$

$t \in \breve{D} = P_2 \cup P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(D, D_t) \in \{Z_2, Z_1\}$

$\Rightarrow \breve{D} = Z_2 \cup Z_1 = \bigcup_{t \in \breve{D}} \Lambda(D, D_t)$

elde edilir. Böylece Tanım 2.2.12'den $D,\ XI$ – yarılatistir.

Şimdi D tam XI - yarılatisini

$T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8 \subset T_9, T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8 \subset T_9,$

$T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_7 \subset T_9, T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_7 \subset T_9,$

$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset T_8 \subset T_9, T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset T_8 \subset T_9,$

$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset T_7 \subset T_9, T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset T_7 \subset T_9,$

$T_1 \backslash T_2 \neq \emptyset, T_2 \backslash T_1 \neq \emptyset, T_4 \backslash T_5 \neq \emptyset, T_5 \backslash T_4 \neq \emptyset, T_7 \backslash T_8 \neq \emptyset, T_8 \backslash T_7 \neq \emptyset,$

$T_1 \cup T_2 = T_3, T_4 \cup T_5 = T_6, T_7 \cup T_8 = T_9$

olmak üzere $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9\}$ biçiminde gösterelim.

Öncelikle $V(D, \alpha) = Q$ koşulunu sağlayan ve $\alpha = \bigcup_{i=1}^{9} (Y_i^\alpha \times T_i)$ quasinormal gösterime sahip olan bir $\alpha \in B_X(Q)$ reguler elemanının özelliklerini belirleyelim.

Lemma 3.1.3 Q nun $G = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ üreteç kümesini alalım. O zaman $T_1, T_2, T_4, T_5, T_7, T_8$ elemanları sırasıyla $\ddot{G}_{T_1}, \ddot{G}_{T_2}, \ddot{G}_{T_4}, \ddot{G}_{T_5}, \ddot{G}_{T_7}, \ddot{G}_{T_8}$ kümelerinin limit olmayan elemanlarıdır ve T_3, T_6 elemanları sırasıyla $\ddot{G}_{T_3}, \ddot{G}_{T_6}$ kümelerinin limit elemanlarıdır.

İspat: $i = 1,2, \ldots ,8$ için $\ddot{G}_{T_i}$ kümeleri

$\ddot{G}_{T_1} = \{T_1\}$

$\ddot{G}_{T_2} = \{T_2\}$

$\ddot{G}_{T_3} = \{T_1, T_2, T_3\}$

$\ddot{G}_{T_4} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$

$\ddot{G}_{T_5} = \{T_1, T_2, T_3, T_5\}$

$\ddot{G}_{T_6} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$

$\ddot{G}_{T_7} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$

$\ddot{G}_{T_8} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_8\}$

şeklindedir. Buradan

$$T_1 \backslash l(\ddot{G}_{T_1}, T_1) = T_1 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_1}, \{T_1\}) = T_1 \backslash \emptyset = T_1 \neq \emptyset$$
$$T_2 \backslash l(\ddot{G}_{T_2}, T_2) = T_2 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_2}, \{T_2\}) = T_2 \backslash \emptyset = T_2 \neq \emptyset$$
$$T_3 \backslash l(\ddot{G}_{T_3}, T_3) = T_3 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_3}, \{T_3\}) = T_3 \backslash T_3 = \emptyset$$
$$T_4 \backslash l(\ddot{G}_{T_4}, T_4) = T_4 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_4}, \{T_4\}) = T_4 \backslash T_3 \neq \emptyset$$
$$T_5 \backslash l(\ddot{G}_{T_5}, T_5) = T_5 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_5}, \{T_5\}) = T_5 \backslash T_3 \neq \emptyset$$
$$T_6 \backslash l(\ddot{G}_{T_6}, T_6) = T_6 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_6}, \{T_6\}) = T_6 \backslash T_6 = \emptyset$$
$$T_7 \backslash l(\ddot{G}_{T_7}, T_7) = T_7 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_7}, \{T_7\}) = T_7 \backslash T_6 \neq \emptyset$$
$$T_8 \backslash l(\ddot{G}_{T_8}, T_8) = T_8 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_8}, \{T_8\}) = T_8 \backslash T_6 \neq \emptyset$$

elde edilir. O halde $T_1, T_2, T_4, T_5, T_7, T_8$ elemanları sırasıyla $\ddot{G}_{T_1}, \ddot{G}_{T_2}, \ddot{G}_{T_4}, \ddot{G}_{T_5}, \ddot{G}_{T_7}, \ddot{G}_{T_8}$ kümelerinin limit olmayan elemanlarıdır ve T_3, T_6 elemanları sırasıyla $\ddot{G}_{T_3}, \ddot{G}_{T_6}$ kümelerinin limit elemanlarıdır.

Teorem 3.1.4 $\alpha \in B_X(Q)$ için $V(D, \alpha) = Q$ koşulu sağlansın ve α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{9} (Y_i^\alpha \times T_i)$ olsun. Bu durumda α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul Q'dan D'nin bir D' alt yarılatisine

$$\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha,$$
$$\varphi(T_2) \subseteq Y_2^\alpha,$$
$$\varphi(T_4) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha,$$
$$\varphi(T_5) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha,$$
$$\varphi(T_7) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_7^\alpha,$$
$$\varphi(T_8) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_8^\alpha,$$
$$Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \emptyset, Y_5^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \emptyset$$
$$Y_7^\alpha \cap \varphi(T_7) \neq \emptyset, Y_8^\alpha \cap \varphi(T_8) \neq \emptyset$$

koşullarını sağlayan bir φ tam $\alpha -$ izomorfizmasının var olmasıdır.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ regüler eleman olsun. Q tam XI – yarılatis ve $V(D, \alpha) = Q$ olduğundan $V(D, \alpha)$ tam XI – yarılatistir. O zaman Teorem 2.3.9'dan Q'dan D'nin D' alt yarılatisine bir φ tam izomorfizma vardır. Ayrıca yine aynı teoremden dolayı her $T \in$

$V(D,\alpha)$ için $\varphi(T)\alpha = T$ sağlandığından φ tam α – izomorfizmasıdır. Teorem 2.3.9 b) şıkkı uygulanırsa

$$\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha,$$
$$\varphi(T_2) \subseteq Y_2^\alpha,$$
$$\varphi(T_3) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha,$$
$$\varphi(T_4) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha,$$
$$\varphi(T_5) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha,$$
$$\varphi(T_6) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha,$$
$$\varphi(T_7) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_7^\alpha,$$
$$\varphi(T_8) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_8^\alpha$$

elde edilir. Bu denklemlerden $\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha$ ve $\varphi(T_2) \subseteq Y_2^\alpha$ kullanılarak

$$\begin{aligned}\varphi(T_3) \subseteq \varphi(T_3) \cup Y_3^\alpha = \varphi(T_1 \cup T_2) \cup Y_3^\alpha &= \varphi(T_1) \cup \varphi(T_2) \cup Y_3^\alpha \\ &\subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha\end{aligned}$$

elde edilebilir. O yüzden $\varphi(T_3) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$ koşulunu yazmaya gerek yoktur. Benzer olarak $\varphi(T_4) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha$ ve $\varphi(T_5) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha$ koşulları kullanılarak $\varphi(T_6) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha$ elde edilebilir. Bu koşulu yazmaya da gerek yoktur. Ayrıca Lemma 3.1.3'den $T_1, T_2, T_4, T_5, T_7, T_{78}$ elemanlarının limit olmayan elemanlar oldukları göz önüne alınırsa Teorem 2.3.9 c) şıkkından

$$Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \emptyset,\ Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \emptyset,\ Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \emptyset, Y_5^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \emptyset$$
$$Y_7^\alpha \cap \varphi(T_7) \neq \emptyset, Y_8^\alpha \cap \varphi(T_8) \neq \emptyset$$

olur. $\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha$ olduğundan $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \emptyset$ ve $\varphi(T_2) \subseteq Y_2^\alpha$ olduğundan $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \emptyset$ her zaman sağlanacaktır. O yüzden bu koşulları yazmaya gerek yoktur. O halde verilen koşulları sağlayan bir φ tam α – izomorfizması vardır.

Tersine Q'dan D'nin D' alt yarılatisine verilen koşulları sağlayan bir φ tam α – izomorfizması var olsun. $V(D,\alpha) = Q$ olduğundan $V(D,\alpha)$ tam XI – yarılatistir. O zaman Teorem 2.3.9 a) - c) şıkları sağlanır. Şimdi Lemma 3.1.3'den T_3 elemanının $\ddot{G}_{T_3}$ kümesinin limit elemanı olduğunu kullanarak $B(T_3) = \{Z \in \ddot{G}_{T_3} \mid Y_Z^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \emptyset\}$ kümesini oluşturalım. Eğer $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_3) = \emptyset$ ise

$$\varphi(T_3) = \varphi(T_1) \cup \varphi(T_2) \subseteq \quad Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha$$

olur. Böylece $\varphi(T_1) \subseteq \varphi(T_3) \subseteq Y_2^\alpha$ elde edilir. Ancak bu sonuç $\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha$ olmasıyla çelişir. O halde $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \emptyset$ olduğundan $T_1 \in B(T_3)$ dir. Benzer olarak eğer $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_3) = \emptyset$ ise

$$\varphi(T_3) = \varphi(T_1) \cup \varphi(T_2) \subseteq \quad Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha$$

olur. Böylece $\varphi(T_2) \subseteq \varphi(T_3) \subseteq Y_1^\alpha$ elde edilir. Ancak bu sonuç $\varphi(T_2) \subseteq Y_2^\alpha$ olmasıyla çelişir. O halde $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \emptyset$ olduğundan $T_2 \in B(T_3)$ dir. Bulunan sonuçlar kullanılarak $\cup B(T_3) = T_1 \cup T_2 = T_3$ yazılabilir.

Benzer olarak T_6 elemanının $\ddot{G}_{T_6}$ kümesinin limit elemanı olduğunu kullanarak $B(T_6) = \{Z \in \ddot{G}_{T_6} \mid Y_Z^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \emptyset\}$ kümesi oluşturulursa $\cup B(T_6) = T_4 \cup T_5 = T_6$ yazılabilir.

O halde Teorem 2.3.9'dan $\alpha \in B_X(D)$ regüler elemandır.

Sonuç 3.1.5 $\alpha \in B_X(Q)$ için $V(D,\alpha) = Q$ koşulu sağlansın ve α'nın quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{9}(Y_i^\alpha \times T_i)$ olsun. Bu durumda α'nın $B_X(D)$'nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul

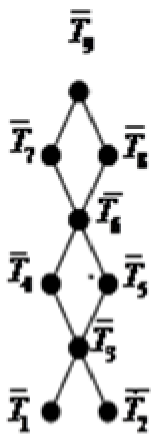
$$T_1 \subseteq Y_1^\alpha,$$
$$T_2 \subseteq Y_2^\alpha,$$
$$T_4 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha,$$
$$T_5 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha,$$
$$T_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_7^\alpha,$$
$$T_8 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_8^\alpha,$$
$$Y_4^\alpha \cap T_4 \neq \emptyset, Y_5^\alpha \cap T_5 \neq \emptyset$$
$$Y_7^\alpha \cap T_7 \neq \emptyset, Y_8^\alpha \cap T_8 \neq \emptyset$$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat: α sağ birim elemanı olsun. O zaman α aynı zamanda regüler ve idempotent elemandır. Teorem 3.1.4'deki koşulları sağlayan bir φ tam α – izomorfizması vardır. Teorem 2.3.19'dan φ'nin $V(D,\alpha)$ nın birim dönüşümü olduğu kullanılarak istenilen elde edilir. Tersine verilen koşulları sağlansın. O zaman $V(D,\alpha)$'nın birim dönüşümü olarak alınan φ, Teorem 3.1.4'deki koşulları sağlamış olur. Böylece α regüler elemandır. Teorem 2.3.19'dan α idempotent elemandır. Ayrıca φ tam α – izomorfizması birim dönüşüm olduğundan her $T \in Q$ için $\varphi(T)\alpha = T\alpha = T$ olur. O halde $V(Q,\alpha) = Q$ dur. Teorem 2.3.4'den α, $B_X(Q)$ nin sağ birim elemanıdır.

Şimdi $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9\}$ tam XI – yarılatisi için Teorem 3.1.4'de verilen koşulları sağlayan $\alpha \in B_X(D)$ reguler elemanlarının sayısını hesaplayalım.

$\alpha \in B_X(D)$, $V(D,\alpha) = Q$ koşulunu sağlayan ve $\alpha = \bigcup_{i=1}^{9}(Y_i^\alpha \times T_i)$ quasinormal gösterime sahip olan bir regüler eleman olsun. O zaman Q'dan $D' = \{\varphi(T_1), \varphi(T_2), \dots, \varphi(T_9)\}$ kümesine Teorem 3.1.4'ün koşullarını sağlayan bir φ tam α - izomorfizması vardır. Yani $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ dir. $i = 1,2, \dots .9$ için $\varphi(T_i) = \overline{T_i}$ ile gösterelim. Bu durumda $D' = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3, \overline{T}_4, \overline{T}_5, \overline{T}_6, \overline{T}_7, \overline{T}_8, \overline{T}_9\}$ kümesinin diyagramı aşağıdaki biçimdedir.



Şekil 3.3. $D' = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3, \overline{T}_4, \overline{T}_5, \overline{T}_6, \overline{T}_7, \overline{T}_8, \overline{T}_9\}$ kümesinin diyagramı

Üstelik

$\overline{T}_1 \subseteq Y_1^\alpha$,

$\overline{T}_2 \subseteq Y_2^\alpha$,

$\overline{T}_4 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha$,

$\overline{T}_5 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha$,

$$\overline{T}_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_7^\alpha,$$
$$\overline{T}_8 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_8^\alpha,$$
$$Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4 \neq \emptyset, Y_5^\alpha \cap \overline{T}_5 \neq \emptyset, Y_7^\alpha \cap \overline{T}_7 \neq \emptyset, Y_8^\alpha \cap \overline{T}_8 \neq \emptyset$$

koşulları sağlanır.

Ayrıca eşitlik (3.2)'deki formal eşitliklerden yararlanarak

$$P_1 = T_2, P_2 = T_1, P_3 = (T_5 \cap T_4) \setminus T_3\ , P_4 = T_5 \setminus T_4, P_5 = T_4 \setminus T_5$$
$$P_6 = (T_8 \cap T_7) \setminus T_6, P_7 = T_8 \setminus T_7, P_8 = T_7 \setminus T_8$$

yazılabilir. $i = 1,2, \dots ,9$ olmak üzere P_i kümeleri ayrık kümelerdir ve $\bigcup_{i=1}^{9} P_i = T_9$ dir. Böylece

$$\{T_1, T_2, (T_5 \cap T_4) \setminus T_3, T_5 \setminus T_4, T_4 \setminus T_5\ , (T_8 \cap T_7) \setminus T_6, T_8 \setminus T_7, T_7 \setminus T_8\ , X \setminus T_9\}$$

kümesi X'in bir parçalanışıdır. Dolayısıyla bu kümelerin tam α - izomorfizması altındaki görüntülerinden oluşan

$$\{\overline{T}_1, \overline{T}_2, (\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_3, \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4, \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5\ , (\overline{T}_8 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_6, \overline{T}_8 \setminus \overline{T}_7, \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_8\ , X \setminus \overline{T}_9\}$$

kümesi de X'in bir parçalanışı olur.

Lemma 3.1.6 Her $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ için $\overline{T}_1, \overline{T}_2, (\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_3, \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4, \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5\ , (\overline{T}_8 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_6, \overline{T}_8 \setminus \overline{T}_7, \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_8\ , X \setminus \overline{T}_9$ kümeleri üzerinde tanımlı bir ayrık dönüşüm sistemi vardır. Üstelik farklı ikili bağıntıların ayrık dönüşüm sistemleri birbirinden farklıdır.

İspat: $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ olmak üzere her $t \in X$ için $f_\alpha(t) = t\alpha$ biçiminde tanımlanan $f_\alpha : X \to D$ dönüşümünü alalım. f_α dönüşümü sırasıyla $\overline{T}_1, \overline{T}_2, (\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_3, \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4, \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5\ , (\overline{T}_8 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_6, \overline{T}_8 \setminus \overline{T}_7, \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_8\ , X \setminus \overline{T}_9$ kümeleri üzerinde $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}, f_{8\alpha}, f_{9\alpha}$, olarak kısıtlansın. Şimdi $i = 1,2, \dots ,9$ için Y_i^α kümelerinden yararlanarak bu dönüşümlerin özelliklerini belirleyelim.

$t \in \overline{T}_1$ olsun. O zaman $t \in Y_1^\alpha$ dır. Böylece $t\alpha = T_1$ olduğu elde edilir. O halde her $t \in \overline{T}_1$ için $f_{1\alpha}(t) = T_1$ dir.

$t \in \overline{T}_2$ olsun. O zaman $t \in Y_2^\alpha$ dır. Böylece $t\alpha = T_2$ olduğu elde edilir. O halde her $t \in \overline{T}_2$ için $f_{2\alpha}(t) = T_2$ dir.

$t \in (\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_3$ olsun. Buradan $(\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3\}$ elde edilir. O halde her $t \in (\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_3$ için $f_{3\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3\}$ dir.

$t \in \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4$ olsun. Buradan $(\overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4) \subseteq \overline{T}_5 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_5\}$ elde edilir. Böylece her $t \in \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4$ için $f_{4\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_5\}$ olur. Ayrıca $Y_5^\alpha \cap \overline{T}_5 \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_5 \in Y_5^\alpha \cap \overline{T}_5$ vardır. Bu ise $t_5\alpha = T_5$ ve $t_5 \in \overline{T}_5$ demektir. Eğer $t_5 \in \overline{T}_4 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha$ ise $t_5\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ olur. Ancak bu sonuç $t_5\alpha = T_5$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_5 \in \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4$ için $f_{4\alpha}(t_5) = T_5$ dir.

$t \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5$ olsun. Buradan $(\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5) \subseteq \overline{T}_4 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ elde edilir. Böylece her $t \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5$ için $f_{5\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ olur. Ayrıca $Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4 \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_4 \in Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4$ vardır. Bu ise $t_4\alpha = T_4$ ve $t_4 \in \overline{T}_4$ demektir. Eğer $t_4 \in \overline{T}_5 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha$ ise $t_4\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_5\}$ olur. Ancak bu sonuç $t_4\alpha = T_4$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_4 \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5$ için $f_{5\alpha}(t_4) = T_4$ dir.

$t \in (\overline{T}_8 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_6$ olsun. Buradan $(\overline{T}_8 \cap \overline{T}_7) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ elde edilir. O halde her $t \in (\overline{T}_8 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_6$ için $f_{6\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ dir.

$t \in \overline{T}_8 \setminus \overline{T}_7$ olsun. Buradan $(\overline{T}_8 \setminus \overline{T}_7) \subseteq \overline{T}_8 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_8^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_8\}$ elde edilir. Böylece her $t \in \overline{T}_8 \setminus \overline{T}_7$ için $f_{7\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_8\}$ olur. Ayrıca $Y_8^\alpha \cap \overline{T}_8 \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_8 \in Y_8^\alpha \cap \overline{T}_8$ vardır. Bu ise $t_8\alpha = T_8$ ve $t_8 \in \overline{T}_8$ demektir. Eğer $t_8 \in \overline{T}_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_7^\alpha$ ise $t_8\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$ olur. Ancak bu sonuç $t_8\alpha = T_8$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_8 \in \overline{T}_8 \setminus \overline{T}_7$ için $f_{7\alpha}(t_8) = T_8$ dir.

$t \in \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_8$ olsun. Buradan $(\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_8) \subseteq \overline{T}_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_7^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$ elde edilir. Böylece her $t \in \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_8$ için $f_{8\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$ olur. Ayrıca $Y_7^\alpha \cap \overline{T}_7 \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_7 \in Y_7^\alpha \cap \overline{T}_7$ vardır. Bu ise $t_7\alpha = T_7$ ve $t_7 \in \overline{T}_7$ demektir. Eğer $t_7 \in \overline{T}_8 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_8^\alpha$ ise $t_7\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_8\}$ olur. Ancak bu sonuç $t_7\alpha = T_7$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_7 \in \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_8$ için $f_{8\alpha}(t_7) = T_7$ dir.

$t \in X \setminus \overline{T}_9$ olsun. Buradan $(X \setminus \overline{T}_9) \subseteq X = \bigcup_{i=1}^{9} Y_i^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in Q$ elde edilir. O halde her $t \in X \setminus \overline{T}_9$ için $f_{9\alpha}(t) \in Q$ dur.

Böylece $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ için $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}, f_{8\alpha}, f_{9\alpha})$ biçiminde bir dönüşümlerin sıralı sistemi vardır.

Diğer taraftan, $\alpha \neq \beta$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in R_{\varphi}(Q, D')$ alalım. $f_{\alpha} = (f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}, f_{8\alpha}, f_{9\alpha}), f_{\beta} = (f_{1\beta}, f_{2\beta}, f_{3\beta}, f_{4\beta}, f_{5\beta}, f_{6\beta}, f_{7\beta}, f_{8\beta}, f_{9\beta})$ olsun. Eğer $f_{\alpha} = f_{\beta}$ ise her $t \in X$ için $f_{\alpha}(t) = f_{\beta}(t)$ dir. Buradan her $t \in X$ için $t\alpha = t\beta$ yazılır. Bu ise $\alpha = \beta$ olması demektir. Ancak bu sonuç $\alpha \neq \beta$ olmasıyla çelişir. O halde farklı ikili bağıntıların sıralı sistemleri farklıdır.

Lemma 3.1.7 $f: X \to D$ dönüşümü

$f_1: \overline{T}_1 \to \{T_1\}, f_1(t) = T_1$

$f_2: \overline{T}_2 \to \{T_2\}, f_1(t) = T_2$

$f_3: (\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_3 \to \{T_1, T_2, T_3\}, f_3(t) \in \{T_1, T_2, T_3\}$

$f_4: \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4 \to \{T_1, T_2, T_3, T_5\}, f_4(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_5\}$

ve $f_4(t_5) = T_5, \exists t_5 \in \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4$ için

$f_5: \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5 \to \{T_1, T_2, T_3, T_4\}, f_5(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$

ve $f_5(t_4) = T_4, \exists t_4 \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5$ için

$f_6: (\overline{T}_8 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_6 \to \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}, f_6(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$

$f_7: \overline{T}_8 \setminus \overline{T}_7 \to \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_8\}, f_7(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_8\}$

ve $f_7(t_8) = T_8, \exists t_8 \in \overline{T}_8 \setminus \overline{T}_7$ için

$f_8: \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_8 \to \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}, f_8(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$

ve $f_8(t_7) = T_7, \exists t_7 \in \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_8$ için

$f_9: X \setminus \overline{T}_9 \to Q, f_9(t) \in Q$

biçiminde kısıtlanışa sahip olsun. O zaman $\beta = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times f(x)) \in B_X(D)$ regüler elemandır ve φ, tam β - izomorfizmasıdır. Böylece $\beta \in R_{\varphi}(Q, D')$ dir.

İspat: Öncelikle $V(D, \beta) = Q$ olduğunu görelim. $V(D, \beta) = \{Y\beta | Y \in D\}$ kümesi, f dönüşümünün özellikleri, $\overline{T}_i\beta = \bigcup_{x \in \overline{T}_i} x\beta$ ve $D' \subseteq D$ olması kullanılarak

$T_1 \in Q \Rightarrow \overline{T}_1\beta = T_1 \Rightarrow T_1 \in V(D, \beta)$

$T_2 \in Q \Rightarrow \overline{T}_2\beta = T_2 \Rightarrow T_2 \in V(D, \beta)$

$T_3 \in Q \Rightarrow \overline{T}_3\beta = T_1 \cup T_2 = T_3 \Rightarrow T_3 \in V(D, \beta)$

$T_4 \in Q \Rightarrow \overline{T}_4\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 = T_4 \Rightarrow T_4 \in V(D, \beta)$

$T_5 \in Q \Rightarrow \overline{T}_5\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_5 = T_5 \Rightarrow T_5 \in V(D, \beta)$

$T_6 \in Q \Rightarrow \overline{T}_6\beta = (\overline{T}_5 \cup \overline{T}_4)\beta = (\overline{T}_5\beta \cup \overline{T}_4\beta) = T_5 \cup T_4 = T_6 \Rightarrow T_6 \in V(D, \beta)$

$$T_7 \in Q \Rightarrow \overline{T}_7\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_7 = T_7 \Rightarrow T_7 \in V(D,\beta)$$
$$T_8 \in Q \Rightarrow \overline{T}_8\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_8 = T_8 \Rightarrow T_8 \in V(D,\beta)$$
$$T_9 \in Q \Rightarrow \overline{T}_9\beta = (\overline{T}_8 \cup \overline{T}_7)\beta = (\overline{T}_8\beta \cup \overline{T}_7\beta) = T_8 \cup T_7 = T_9 \Rightarrow T_9 \in V(D,\beta)$$

elde edilir. Böylece $Q \subseteq V(D,\beta)$ olur. Tersine $Z \in V(D,\beta)$ olsun. O zaman $Z = Y\beta$ olacak biçimde $Y \in D$ vardır. Buradan Q nun birleşime kapalı olması ve her $y \in Y$ için $f(y) \in Q$ olduğu kullanılırsa $Z = Y\beta = \bigcup_{y\in Y} y\beta = \bigcup_{y\in Y} f(y) \in Q$ dur. Böylece $V(D,\beta) \subseteq Q$ olur. O halde $V(D,\beta) = Q$ dur.

Diğer yandan $\emptyset \notin Q$ olduğundan β ikili bağıntısının $\beta = \bigcup_{T\in V(X^*,\beta)} \left(Y_T^{\beta} \times T\right)$ biçiminde quasinormal gösterimi vardır. β nın tanımından her $x \in X$ için $f(x) = x\beta$ dır. Buradan $V(X^*,\beta) = V(D,\beta) = Q$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece $\beta = \bigcup_{i=1}^{9} \left(Y_i^{\beta} \times T\right)$ biçimindedir.

$t \in \overline{T}_1$ ise $t\beta = f(t) = T_1$ olduğundan $t \in Y_1^{\beta}$ elde edilir. O halde $\overline{T}_1 \subseteq Y_1^{\beta}$ dır.

$t \in \overline{T}_2$ ise $t\beta = f(t) = T_2$ olduğundan $t \in Y_2^{\beta}$ elde edilir. O halde $\overline{T}_2 \subseteq Y_2^{\beta}$ dır.

$t \in \overline{T}_4 = \overline{T}_1 \cup \overline{T}_2 \cup \left((\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_3\right) \cup \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ olduğundan $t \in Y_1^{\beta} \cup Y_2^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_4^{\beta}$ elde edilir. O halde $\overline{T}_4 \subseteq Y_1^{\beta} \cup Y_2^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_4^{\beta}$ dır.

$t \in \overline{T}_5 = \overline{T}_1 \cup \overline{T}_2 \cup \left((\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_3\right) \cup \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_5\}$ olduğundan $t \in Y_1^{\beta} \cup Y_2^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_5^{\beta}$ elde edilir. O halde $\overline{T}_5 \subseteq Y_1^{\beta} \cup Y_2^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_5^{\beta}$ dır.

$t \in \overline{T}_7 = (\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_8) \cup \left((\overline{T}_8 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_6\right) \cup \overline{T}_5 \cup \overline{T}_4$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$ olduğundan $t \in Y_1^{\beta} \cup Y_2^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_6^{\beta} \cup Y_7^{\beta}$ elde edilir. O halde $\overline{T}_7 \subseteq Y_1^{\beta} \cup Y_2^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_6^{\beta} \cup Y_7^{\beta}$ dır.

$t \in \overline{T}_8 = (\overline{T}_8 \setminus \overline{T}_7) \cup \left((\overline{T}_8 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_6\right) \cup \overline{T}_5 \cup \overline{T}_4$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_8\}$ olduğundan $t \in Y_1^{\beta} \cup Y_2^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_6^{\beta} \cup Y_8^{\beta}$ elde edilir. O halde $\overline{T}_8 \subseteq Y_1^{\beta} \cup Y_2^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_6^{\beta} \cup Y_8^{\beta}$ dır.

Ayrıca en az bir $t_5 \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5$ için $f_5(t_4) = T_4$ olduğundan $Y_4^{\beta} \cap \overline{T}_4 \neq \emptyset$ dir. Benzer olarak f_5, f_7, f_8 dönüşümlerinin özelliklerinden $Y_5^{\alpha} \cap \overline{T}_5 \neq \emptyset, Y_7^{\alpha} \cap \overline{T}_7 \neq \emptyset$ ve $Y_8^{\alpha} \cap \overline{T}_8 \neq \emptyset$ olur.

Böylece $i = 1,2, \dots .9$ için $\varphi(T_i) = \overline{T}_i$ biçiminde tanımlı $\varphi: Q \to D' = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3, \overline{T}_4, \overline{T}_5, \overline{T}_6, \overline{T}_7, \overline{T}_8, \overline{T}_9\}$ dönüşümü β için Teorem 3.1.4'deki koşulları sağlar. Üstelik her $T \in V(D,\beta)$ için $\varphi(T)\beta = \overline{T}\beta = T$ sağlandığından φ, tam β - izomorfizmasıdır. O halde $\beta \in R_{\varphi}(Q,D')$ dir.

Lemma 3.1.6. ve Lemma 3.1.7'den görüldüğü üzere $R_{\varphi}(Q,D')$ ile ayrık dönüşümlerin sıralı sistemlerinin kümesi arasında birebir eşleme vardır.

Teorem 3.1.8 Q, XI – yarılatisi için $D' = \{\overline{T_1},\overline{T_2},\overline{T_3},\overline{T_4},\overline{T_5},\overline{T_6},\overline{T_7},\overline{T_8},\overline{T_9}\}$ ile Q arasında bir α – izomorfizması varsa ve $\Omega(Q) = m_0$ ise $B_X(Q)$ nun regüler elemanlarının sayısı

$$|R(D')| = m_0 \cdot 8 \cdot 3^{|(\overline{T_5}\cap\overline{T_4})\setminus\overline{T_3}|} \cdot \left(4^{|\overline{T_5}\setminus\overline{T_4}|} - 3^{|\overline{T_5}\setminus\overline{T_4}|}\right) \cdot \left(4^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_5}|} - 3^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_5}|}\right) \cdot$$
$$6^{|(\overline{T_8}\cap\overline{T_7})\setminus\overline{T_6}|} \cdot \left(7^{|\overline{T_8}\setminus\overline{T_7}|} - 6^{|\overline{T_8}\setminus\overline{T_7}|}\right) \cdot \left(7^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_8}|} - 6^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_8}|}\right) \cdot 9^{|X\setminus\overline{T_9}|}$$

olur.

İspat: Lemma 3.1.6 ve Lemma 3.1.7 göstermektedir ki, $\alpha \in B_X(D)$ regüler eleman, $V(D,\alpha) = Q$ ve $\varphi: Q \to D'$ bir tam α – izomorfizması olmak üzere, $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}, f_{8\alpha}, f_{9\alpha})$ biçimindeki farklı sıralı sistemlerin sayısı ile $R_{\varphi}(Q,D')$ kümesinin eleman sayısı birbirine eşittir. Tanım 2.2.23'den oluşturulabilecek $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}, f_{8\alpha}, f_{9\alpha}$ dönüşümlerinin sayısı sırasıyla

$$1, 1, 3^{|(\overline{T_5}\cap\overline{T_4})\setminus\overline{T_3}|}, \left(4^{|\overline{T_5}\setminus\overline{T_4}|} - 3^{|\overline{T_5}\setminus\overline{T_4}|}\right), \left(4^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_5}|} - 3^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_5}|}\right),$$
$$6^{|(\overline{T_8}\cap\overline{T_7})\setminus\overline{T_6}|}, \left(7^{|\overline{T_8}\setminus\overline{T_7}|} - 6^{|\overline{T_8}\setminus\overline{T_7}|}\right), \left(7^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_8}|} - 6^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_8}|}\right), 9^{|X\setminus\overline{T_9}|}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\left|R_{\varphi}(Q,D')\right| = 3^{|(\overline{T_5}\cap\overline{T_4})\setminus\overline{T_3}|} \cdot \left(4^{|\overline{T_5}\setminus\overline{T_4}|} - 3^{|\overline{T_5}\setminus\overline{T_4}|}\right) \cdot \left(4^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_5}|} - 3^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_5}|}\right) \cdot$$
$$6^{|(\overline{T_8}\cap\overline{T_7})\setminus\overline{T_6}|} \cdot \left(7^{|\overline{T_8}\setminus\overline{T_7}|} - 6^{|\overline{T_8}\setminus\overline{T_7}|}\right) \cdot \left(7^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_8}|} - 6^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_8}|}\right) \cdot 9^{|X\setminus\overline{T_9}|}$$

olur. Ayrıca Q nun otomorfizmleri

$$id_Q = \begin{pmatrix} T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8T_9 \\ T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8T_9 \end{pmatrix}, \ \tau_1 = \begin{pmatrix} T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8T_9 \\ T_2T_1T_3T_4T_5T_6T_7T_8T_9 \end{pmatrix}$$
$$\tau_2 = \begin{pmatrix} T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8T_9 \\ T_1T_2T_3T_5T_4T_6T_7T_8T_9 \end{pmatrix}, \ \tau_3 = \begin{pmatrix} T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8T_9 \\ T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_8T_7T_9 \end{pmatrix}$$
$$\tau_4 = \begin{pmatrix} T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8T_9 \\ T_2T_1T_3T_5T_4T_6T_7T_8T_9 \end{pmatrix}, \ \tau_5 = \begin{pmatrix} T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8T_9 \\ T_2T_1T_3T_4T_5T_6T_8T_7T_9 \end{pmatrix}$$

$$\tau_6 = \begin{pmatrix} T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8T_9 \\ T_1T_2T_3T_5T_4T_6T_8T_7T_9 \end{pmatrix}, \ \tau_7 = \begin{pmatrix} T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8T_9 \\ T_2T_1T_3T_5T_4T_6T_8T_7T_9 \end{pmatrix}$$

olup $q = 8$ tanedir. O halde Lemma 2.3.17 kullanılarak

$$|R(D')| = m_0 \cdot 8 \cdot 3^{|(\overline{T_5} \cap \overline{T_4}) \setminus \overline{T_3}|} \cdot \left(4^{|\overline{T_5} \setminus \overline{T_4}|} - 3^{|\overline{T_5} \setminus \overline{T_4}|}\right) \cdot \left(4^{|\overline{T_4} \setminus \overline{T_5}|} - 3^{|\overline{T_4} \setminus \overline{T_5}|}\right) \cdot$$
$$6^{|(\overline{T_8} \cap \overline{T_7}) \setminus \overline{T_6}|} \cdot \left(7^{|\overline{T_8} \setminus \overline{T_7}|} - 6^{|\overline{T_8} \setminus \overline{T_7}|}\right) \cdot \left(7^{|\overline{T_7} \setminus \overline{T_8}|} - 6^{|\overline{T_7} \setminus \overline{T_8}|}\right) \cdot 9^{|X \setminus \overline{T_9}|}$$

olduğu görülür.

Örnek 3.1.9 $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve $D = \{T_1 = \{1\}, T_2 = \{2\}, T_3 = \{1,2\}, T_4 = \{1,2,3\}, T_5 = \{1,2,4\}, T_6 = \{1,2,3,4\}, T_7 = \{1,2,3,4,5\}, T_8 = \{1,2,3,4,6\}, T_8 = \{1,2,3,4,5,6\}\}$ olsun. D kümelerdeki birleşme işlemine kapalı olduğundan tam X - yarılatistir. Ayrıca Lemma 3.1.2'deki koşulları sağlar ve $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ dir. Dolayısıyla tam XI – yarılatistir. $Q = D$ olarak alalım. O zaman $\Omega(Q) = 1$ ve Q nun otomorfizmlerinin sayısı $q = 8$ tür. Buradan Teorem 3.1.8 kullanılırsa $B_X(Q)$ nun regüler elemanlarının sayısı

$$|R(Q)| = 1 \cdot 8 \cdot 3^0 \cdot (4^1 - 3^1) \cdot (4^1 - 3^1) \cdot 6^0 \cdot (7^1 - 6^1) \cdot (7^1 - 6^1) \cdot 9^0 = 8$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.10 Q, XI – yarılatisi için $B_X(Q)$ nun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = 3^{|(T_5 \cap T_4) \setminus T_3|} \cdot \left(4^{|T_5 \setminus T_4|} - 3^{|T_5 \setminus T_4|}\right) \cdot \left(4^{|T_4 \setminus T_5|} - 3^{|T_4 \setminus T_5|}\right) \cdot$$
$$6^{|(T_8 \cap T_7) \setminus T_6|} \cdot \left(7^{|T_8 \setminus T_7|} - 6^{|T_8 \setminus T_7|}\right) \cdot \left(7^{|T_7 \setminus T_8|} - 6^{|T_7 \setminus T_8|}\right) \cdot 9^{|X \setminus T_9|}$$

olur.

İspat: Lemma 2.3.14'den dolayı $E_X^{(r)}(Q) = R_{id_Q}(Q, Q)$ dur. Teorem 3.1.8'de $D' = Q$ alınırsa

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left|R_{id_Q}(Q, Q)\right| = |R_\varphi(Q, Q)\,|$$

olur. Buradan Teorem 3.1.8 kullanılarak

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = 3^{|(T_5 \cap T_4) \setminus T_3|} \cdot \left(4^{|T_5 \setminus T_4|} - 3^{|T_5 \setminus T_4|}\right) \cdot \left(4^{|T_4 \setminus T_5|} - 3^{|T_4 \setminus T_5|}\right) \cdot$$
$$6^{|(T_8 \cap T_7) \setminus T_6|} \cdot \left(7^{|T_8 \setminus T_7|} - 6^{|T_8 \setminus T_7|}\right) \cdot \left(7^{|T_7 \setminus T_8|} - 6^{|T_7 \setminus T_8|}\right) \cdot 9^{|X \setminus T_9|}$$

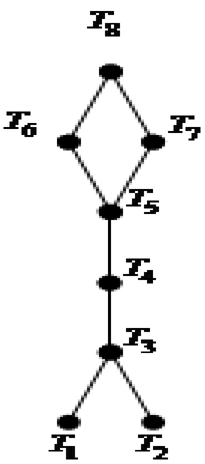
sonucuna ulaşılır.

3.2. $\sum_8(X, 8)$ sınıfı

D nin

$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8, T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8,$
$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_5 \subset T_7 \subset T_8, T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_5 \subset T_7 \subset T_8,$
$T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset, T_2 \setminus T_1 \neq \emptyset, T_6 \setminus T_7 \neq \emptyset, T_7 \setminus T_6 \neq \emptyset,$
$T_1 \cup T_2 = T_3, T_6 \cup T_7 = T_8$

koşullarını sağlayan $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ tam X - yarılatisini alalım. Q nun diyagramı aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.4. $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ tam X – yarılatisinin diyagramı

İlk olarak XI – yarılatis olması için gereken koşulları belirleyelim.

Lemma 3.2.1 Q nun tam XI – yarılatis olması için gerek ve yeter koşul $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ olmasıdır.

İspat: Verilen koşulları sağlayan $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ tam X – yarılatisinin diyagramı Şekil 3.4'deki gibidir. $C(Q) = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$ Q nun karakteristik kümeler ailesi ve $\theta: Q \to C(Q), \theta(T_i) = P_i, (i = 1,2, \dots, 8)$ karakteristik dönüşümünü alalım. O zaman $\breve{Q} = \cup Q = T_8$ ve $\theta(\breve{Q}) = \theta(T_8) = \mathrm{P}_8$ olduğu kullanılırsa her $T_i \in Q$ elemanı $T_i = P_8 \cup \bigcup_{T \in \hat{Q}(T_i)} \theta(T)$ biçiminde yazılabilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
T_8 &= P_8 \cup \textstyle\bigcup_{T \in \hat{Q}(T_8)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_7 \cup \mathrm{P}_6 \cup \mathrm{P}_5 \cup \mathrm{P}_4 \cup \mathrm{P}_3 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1 \\
T_7 &= P_8 \cup \textstyle\bigcup_{T \in \hat{Q}(T_7)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_6 \cup \mathrm{P}_5 \cup \mathrm{P}_4 \cup \mathrm{P}_3 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1 \\
T_6 &= P_8 \cup \textstyle\bigcup_{T \in \hat{Q}(T_6)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_7 \cup \mathrm{P}_5 \cup \mathrm{P}_4 \cup \mathrm{P}_3 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1 \\
T_5 &= P_8 \cup \textstyle\bigcup_{T \in \hat{Q}(T_5)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_4 \cup \mathrm{P}_3 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1 \\
T_4 &= P_8 \cup \textstyle\bigcup_{T \in \hat{Q}(T_4)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_3 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1 \qquad \textbf{(3.3)} \\
T_3 &= P_8 \cup \textstyle\bigcup_{T \in \hat{Q}(T_3)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1 \\
T_2 &= P_8 \cup \textstyle\bigcup_{T \in \hat{Q}(T_2)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_1 \\
T_1 &= P_8 \cup \textstyle\bigcup_{T \in \hat{Q}(T_1)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_2
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $P_1, P_2, P_3, P_4, P_6, P_7$ temel kaynak elemanları olduğundan boş kümeden farklıdır. P_5, P_8 yardımcı kaynak elemanlarıdır ve boş küme olabilirler.

Şimdi her $t \in \breve{Q}$ için Q_t kümesini belirleyelim. $\breve{Q} = T_8 = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_7 \cup \mathrm{P}_6 \cup \mathrm{P}_5 \cup \mathrm{P}_4 \cup \mathrm{P}_3 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1$ biçiminde ayrık kümelerin bileşiminden oluştuğu için, her bir $t \in \breve{Q}$ elemanı bu kümelerin sadece bir tanesinin elemanıdır. Böylece eşitlik (3.3) den yararlanılarak

$$
\begin{aligned}
&t \in P_8 \text{ ise } Q_t = Q \\
&t \in P_7 \text{ ise } Q_t = \{T_8, T_6\} \\
&t \in P_6 \text{ ise } Q_t = \{T_8, T_7\} \\
&t \in P_5 \text{ ise } Q_t = \{T_8, T_7, T_6\} \\
&t \in P_4 \text{ ise } Q_t = \{T_8, T_7, T_6, T_5\} \\
&t \in P_3 \text{ ise } Q_t = \{T_8, T_7, T_6, T_5, T_4\} \\
&t \in P_2 \text{ ise } Q_t = \{T_8, T_7, T_6, T_5, T_4, T_3, T_1\} \\
&t \in P_1 \text{ ise } Q_t = \{T_8, T_7, T_6, T_5, T_4, T_3, T_2\}
\end{aligned}
$$

olur. Bu eşitliklerden yararlanılarak her bir Q_t kümesinin $N(Q, Q_t)$ ile gösterilen alt sınırlarının kümesi

$$
\begin{aligned}
&t \in P_8 \text{ ise } N(Q, Q_t) = \emptyset \\
&t \in P_7 \text{ ise } N(Q, Q_t) = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&t \in P_6 \ \text{ ise } N(Q,Q_t) \ = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\} \\
&t \in P_5 \ \text{ ise } N(Q,Q_t) \ = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\} \\
&t \in P_4 \ \text{ ise } N(Q,Q_t) \ = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\} \\
&t \in P_3 \ \text{ ise } N(Q,Q_t) \ = \{T_1, T_2, T_3, T_4\} \\
&t \in P_2 \ \text{ ise } N(Q,Q_t) \ = \{T_1\} \\
&t \in P_1 \ \text{ ise } N(Q,Q_t) \ = \{T_2\}
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir. O zaman her bir Q_t kümesinin, $\Lambda(Q,Q_t) = \cup N(Q,Q_t)$ şeklinde verilenen büyük alt sınırlarının kümesi

$$
\begin{aligned}
&t \in P_8 \ \text{ ise } \cup N(Q,Q_t) \ = \emptyset \\
&t \in P_7 \ \text{ ise } \cup N(Q,Q_t) \ = T_6 \\
&t \in P_6 \ \text{ ise } \cup N(Q,Q_t) \ = T_7 \\
&t \in P_5 \ \text{ ise } \cup N(Q,Q_t) \ = T_5 \\
&t \in P_4 \ \text{ ise } \cup N(Q,Q_t) \ = T_5 \\
&t \in P_3 \ \text{ ise } \cup N(Q,Q_t) \ = T_4 \\
&t \in P_2 \ \text{ ise } \cup N(Q,Q_t) \ = T_1 \\
&t \in P_1 \ \text{ ise } \cup N(Q,Q_t) \ = T_2
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

olarak bulunur.

$Q,\ XI-$yarılatis olsun. O zaman her $t \in \check{Q}$ için $\Lambda(Q,Q_t) \in Q$ koşulu sağlanır. Ancak eşitlik (3.4) den $t \in P_8$ olursa $\cup N(Q,Q_t) = \emptyset \notin Q$ olduğu görülmektedir. O halde $P_8 = \emptyset$ dir. Buradan P_1 ve P_2 ayrık kümeler olduğundan eşitlik (3.3) den $T_2 = P_8 \cup P_1$ ve $T_1 = P_8 \cup P_2$ eşitlikleri kullanılırsa $T_1 \cap T_2 = P_1 \cap P_2 = \emptyset$ elde edilir.

Tersine $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ olsun. O zaman $P_8 = \emptyset$ olur ve her $t \in \check{Q}$ için $\Lambda(Q,Q_t) \in Q$ koşulu sağlanır. Ayrıca (3.4) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
&t \in T_1 = P_2 \Rightarrow T_1 = \Lambda(Q,Q_t) \\
&t \in T_2 = P_1 \Rightarrow T_2 = \Lambda(Q,Q_t) \\
&t \in T_3 = P_2 \cup P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(Q,Q_t) \in \{T_1, T_2\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow T_3 = T_1 \cup T_2 = \textstyle\bigcup_{t \in T_3} \Lambda(Q,Q_t) \\
&t \in T_4 = P_3 \cup P_2 \cup P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(Q,Q_t) \ \in \{T_1, T_2, T_4\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow T_4 = T_1 \cup T_2 \cup T_4 = \textstyle\bigcup_{t \in T_4} \Lambda(Q,Q_t)
\end{aligned}
$$

$t \in T_5 = P_4 \cup P_3 \cup P_2 \cup P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(Q, Q_t) \in \{T_1, T_2, T_4, T_5\}$
$\qquad \Rightarrow T_5 = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5 = \bigcup_{t \in T_5} \Lambda(Q, Q_t)$

$t \in T_6 = P_7 \cup P_5 \cup \cdots \cup P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(Q, Q_t) \in \{T_1, T_2, T_4, T_5, T_6\}$
$\qquad \Rightarrow T_6 = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6 = \bigcup_{t \in T_6} \Lambda(Q, Q_t)$

$t \in T_7 = P_6 \cup \cdots \cup P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(Q, Q_t) \in \{T_1, T_2, T_4, T_5, T_7\}$
$\qquad \Rightarrow T_7 = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_7 = \bigcup_{t \in T_7} \Lambda(Q, Q_t)$

$t \in T_8 = T_7 \cup T_6 \quad \Rightarrow \Lambda(Q, Q_t) \in \{T_1, T_2, T_4, T_5, T_6, T_7\}$
$\qquad \Rightarrow T_8 = T_7 \cup T_6 = \bigcup_{t \in T_8} \Lambda(Q, Q_t)$

elde edilir. Böylece Tanım 2.2.12'den $Q,\ XI$ – yarılatistir.

Şimdi $V(D, \alpha) = Q$ koşulunu sağlayan ve $\alpha = \bigcup_{i=1}^{8} (Y_i^\alpha \times T_i)$ quasinormal gösterime sahip olan bir $\alpha \in B_X(Q)$ reguler elemanının özelliklerini belirleyelim.

Lemma 3.2.2 Q nun $G = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$ üreteç kümesini alalım. O zaman $T_1, T_2, T_4, T_5, T_6, T_7$ elemanları sırasıyla $\ddot{G}_{T_1}, \ddot{G}_{T_2}, \ddot{G}_{T_4}, \ddot{G}_{T_5}, \ddot{G}_{T_6}, \ddot{G}_{T_7}$ kümelerinin limit olmayan elemanlarıdır ve T_3 elemanı $\ddot{G}_{T_3}$ kümesinin limit elemanıdır.

İspat: $i = 1,2, \ldots, 7$ için $\ddot{G}_{T_i}$ kümeleri

$\ddot{G}_{T_1} = \{T_1\}$

$\ddot{G}_{T_2} = \{T_2\}$

$\ddot{G}_{T_3} = \{T_1, T_2, T_3\}$

$\ddot{G}_{T_4} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$

$\ddot{G}_{T_5} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$

$\ddot{G}_{T_6} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$

$\ddot{G}_{T_7} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$

şeklindedir. Buradan

$T_1 \backslash l(\ddot{G}_{T_1}, T_1) = T_1 \backslash \cup \left(\ddot{G}_{T_1}, \{T_1\}\right) = T_1 \backslash \emptyset = T_1 \neq \emptyset$

$T_2 \backslash l(\ddot{G}_{T_2}, T_2) = T_2 \backslash \cup \left(\ddot{G}_{T_2}, \{T_2\}\right) = T_2 \backslash \emptyset = T_2 \neq \emptyset$

$T_3 \backslash l(\ddot{G}_{T_3}, T_3) = T_3 \backslash \cup \left(\ddot{G}_{T_3}, \{T_3\}\right) = T_3 \backslash T_3 = \emptyset$

$T_4 \backslash l(\ddot{G}_{T_4}, T_4) = T_4 \backslash \cup \left(\ddot{G}_{T_4}, \{T_4\}\right) = T_4 \backslash T_3 \neq \emptyset$

$T_5 \backslash l(\ddot{G}_{T_5}, T_5) = T_5 \backslash \cup \left(\ddot{G}_{T_5}, \{T_5\}\right) = T_5 \backslash T_4 \neq \emptyset$

$$T_6 \backslash l(\ddot{G}_{T_6}, T_6) = T_6 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_6}, \{T_6\}) = T_6 \backslash T_5 \neq \emptyset$$
$$T_7 \backslash l(\ddot{G}_{T_7}, T_7) = T_7 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_7}, \{T_7\}) = T_7 \backslash T_5 \neq \emptyset$$

elde edilir. O halde $T_1, T_2, T_4, T_5, T_6, T_7$ elemanları sırasıyla $\ddot{G}_{T_1}, \ddot{G}_{T_2}, \ddot{G}_{T_4}, \ddot{G}_{T_5}, \ddot{G}_{T_6}, \ddot{G}_{T_7}$ kümelerinin limit olmayan elemanlarıdır ve T_3 elemanı $\ddot{G}_{T_3}$ kümesinin limit elemanıdır.

Teorem 3.2.3 $\alpha \in B_X(Q)$ için $V(D, \alpha) = Q$ koşulu sağlansın ve α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{8} (Y_i^\alpha \times T_i)$ olsun. Bu durumda α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul Q dan D nin bir D' alt yarılatisine

$$\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha,$$
$$\varphi(T_2) \subseteq Y_2^\alpha,$$
$$\varphi(T_4) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha,$$
$$\varphi(T_5) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha,$$
$$\varphi(T_6) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha,$$
$$\varphi(T_7) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha,$$
$$Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \emptyset, Y_5^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \emptyset$$
$$Y_6^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \emptyset, Y_7^\alpha \cap \varphi(T_7) \neq \emptyset$$

koşullarını sağlayan bir φ tam α – izomorfizmasının var olmasıdır.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ regüler eleman olsun. Q tam XI – yarılatis ve $V(D, \alpha) = Q$ olduğundan $V(D, \alpha)$ tam XI – yarılatistir. O zaman Teorem 2.3.9'dan Q dan D nin D' alt yarılatisine bir φ tam izomorfizma vardır. Ayrıca yine aynı teoremden dolayı her $T \in V(D, \alpha)$ için $\varphi(T)\alpha = T$ sağlandığından φ tam α – izomorfizmasıdır. Teorem 2.3.9 b) şıkkı uygulanırsa

$$\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha,$$
$$\varphi(T_2) \subseteq Y_2^\alpha,$$
$$\varphi(T_3) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha,$$
$$\varphi(T_4) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha,$$
$$\varphi(T_5) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha,$$
$$\varphi(T_6) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha,$$
$$\varphi(T_7) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha$$

elde edilir. Bu denklemlerden $\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha$ ve $\varphi(T_2) \subseteq Y_2^\alpha$ kullanılarak

$$\begin{aligned}\varphi(T_3) \subseteq \varphi(T_3) \cup Y_3^\alpha = \varphi(T_1 \cup T_2) \cup Y_3^\alpha = &\quad \varphi(T_1) \cup \varphi(T_2) \cup Y_3^\alpha \\ \subseteq &\quad Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha\end{aligned}$$

olduğu elde edilebilir. O yüzden $\varphi(T_3) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$ koşulunu yazmaya gerek yoktur. Ayrıca Lemma 3.2.2'den $T_1, T_2, T_4, T_5, T_6, T_7$ elemanlarının limit olmayan elemanlar oldukları göz önüne alınırsa Teorem 2.3.9 c) şıkkından

$$Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \emptyset,\ Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \emptyset,\ Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \emptyset, Y_5^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \emptyset$$
$$Y_6^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \emptyset, Y_7^\alpha \cap \varphi(T_7) \neq \emptyset$$

olur. $\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha$ olduğundan $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \emptyset$ ve $\varphi(T_2) \subseteq Y_2^\alpha$ olduğundan $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \emptyset$ her zaman sağlanacaktır. O yüzden bu koşulları yazmaya gerek yoktur. O halde verilen koşulları sağlayan bir φ tam α – izomorfizması vardır.

Tersine Q dan D nin D' alt yarılatisine verilen koşulları sağlayan bir φ tam α – izomorfizması var olsun. $V(D, \alpha) = Q$ olduğundan $V(D, \alpha)$ tam XI – yarılatistir. O zaman Teorem 2.3.9 a)-c) şıkkı sağlanır. Şimdi Lemma 3.2.2'den T_3 elemanının $\ddot{G}_{T_3}$ kümesinin limit elemanı olduğunu kullanarak $B(T_3) = \{Z \in \ddot{G}_{T_3} \,|Y_Z^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \emptyset\}$ kümesini oluşturalım. Eğer $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_3) = \emptyset$ ise $\varphi(T_3) = \varphi(T_1) \cup \varphi(T_2) \subseteq \quad Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha$ olur. Böylece $\varphi(T_1) \subseteq \varphi(T_3) \subseteq Y_2^\alpha$ elde edilir. Ancak bu sonuç $\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha$ olmasıyla çelişir. O halde $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \emptyset$ olduğundan $T_1 \in B(T_3)$ dir. Benzer olarak eğer $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_3) = \emptyset$ ise $\varphi(T_3) = \varphi(T_1) \cup \varphi(T_2) \subseteq \quad Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha$ olur. Böylece $\varphi(T_2) \subseteq \varphi(T_3) \subseteq Y_1^\alpha$ elde edilir. Ancak bu sonuç $\varphi(T_2) \subseteq Y_2^\alpha$ olmasıyla çelişir. O halde $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \emptyset$ olduğundan $T_2 \in B(T_3)$ dir.

Bulunan sonuçlar kullanılarak $\cup B(T_3) = T_1 \cup T_2 = T_3$ yazılabilir. Teorem 2.3.9'dan $\alpha \in B_X(D)$ regüler elemandır.

Sonuç 3.2.4 $\alpha \in B_X(Q)$ için $V(D, \alpha) = Q$ koşulu sağlansın ve α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{8}(Y_i^\alpha \times T_i)$ olsun. Bu durumda α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul

$$T_1 \subseteq Y_1^\alpha,$$
$$T_2 \subseteq Y_2^\alpha,$$

$T_4 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha,$

$T_5 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha,$

$T_6 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha,$

$T_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha,$

$Y_4^\alpha \cap T_4 \neq \emptyset, Y_5^\alpha \cap T_5 \neq \emptyset$

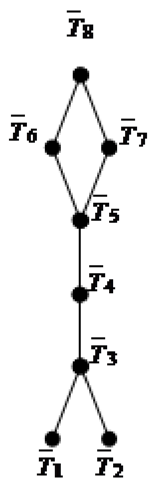
$Y_6^\alpha \cap T_6 \neq \emptyset, Y_7^\alpha \cap T_7 \neq \emptyset$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat: α sağ birim elemanı olsun. O zaman α aynı zamanda regüler ve idempotent elemandır. Teorem 3.2.3'deki koşulları sağlayan bir φ tam $\alpha -$ izomorfizması vardır. Teorem 2.3.19'dan φ nin $V(D,\alpha)$ nın birim dönüşümü olduğu kullanılarak istenilen elde edilir. Tersine verilen koşulları sağlansın. O zaman $V(D,\alpha)$ nın birim dönüşümü olarak alınan φ, Teorem 3.2.3'deki koşulları sağlamış olur. Böylece α regüler elemandır. Teorem 2.3.19'dan α idempotent elemandır. Ayrıca φ tam $\alpha -$ izomorfizması birim dönüşüm olduğundan her $T \in Q$ için $\varphi(T)\alpha = T\alpha = T$ olur. O halde $V(Q,\alpha) = Q$ dur. Teorem 2.3.4'den α, $B_X(Q)$ nin sağ birim elemanıdır.

Şimdi $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ tam $XI -$ yarılatisi için Teorem 3.2.3'de verilen koşulları sağlayan $\alpha \in B_X(D)$ reguler elemanlarının sayısını hesaplayalım.

$\alpha \in B_X(D)$, $V(D,\alpha) = Q$ koşulunu sağlayan ve $\alpha = \bigcup_{i=1}^{8}(Y_i^\alpha \times T_i)$ quasinormal gösterime sahip olan bir regüler eleman olsun. O zaman Q dan $D' = \{\varphi(T_1), \varphi(T_1), \ldots, \varphi(T_8)\}$ kümesine Teorem 3.2.3'nin koşullarını sağlayan bir φ tam α - izomorfizması vardır. Yani $\alpha \in R_\varphi(Q,D')$ dir. $i = 1,2,\ldots.8$ için $\varphi(T_i) = \overline{T_i}$ ile gösterelim. Bu durumda $D' = \{\overline{T_1}, \overline{T_2}, \overline{T_3}, \overline{T_4}, \overline{T_5}, \overline{T_6}, \overline{T_7}, \overline{T_8}\}$ kümesinin diyagramı aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.5. $D' = \{\overline{T_1}, \overline{T_2}, \overline{T_3}, \overline{T_4}, \overline{T_5}, \overline{T_6}, \overline{T_7}, \overline{T_8}\}$ kümesinin diyagramı

Buradan aşağıdakiler sağlanır.

$\overline{T}_1 \subseteq Y_1^{\alpha}$,
$\overline{T}_2 \subseteq Y_2^{\alpha}$,
$\overline{T}_4 \subseteq Y_1^{\alpha} \cup Y_2^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_4^{\alpha}$,
$\overline{T}_5 \subseteq Y_1^{\alpha} \cup Y_2^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_4^{\alpha} \cup Y_5^{\alpha}$,
$\overline{T}_6 \subseteq Y_1^{\alpha} \cup Y_2^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_4^{\alpha} \cup Y_5^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha}$,
$\overline{T}_7 \subseteq Y_1^{\alpha} \cup Y_2^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_4^{\alpha} \cup Y_5^{\alpha} \cup Y_7^{\alpha}$,
$Y_4^{\alpha} \cap \overline{T}_4 \neq \emptyset, Y_5^{\alpha} \cap \overline{T}_5 \neq \emptyset, Y_6^{\alpha} \cap \overline{T}_6 \neq \emptyset, Y_7^{\alpha} \cap \overline{T}_7 \neq \emptyset$

Ayrıca eşitlik 3.3'deki formal eşitliklerden yararlanarak
$P_1 = T_2, P_2 = T_1, P_3 = T_4 \setminus T_3, P_4 \cup P_5 = (T_7 \cap T_6) \setminus T_4$,
$P_6 = T_7 \setminus T_6, P_7 = T_6 \setminus T_7$

yazılabilir. $i = 1,2, \dots ,8$ olmak üzere P_i kümeleri ayrık kümelerdir ve $\bigcup_{i=1}^{8} P_i = T_8$ dir. Böylece

$$\{T_1, T_2, T_4 \setminus T_3, (T_7 \cap T_6) \setminus T_4, T_7 \setminus T_6, T_6 \setminus T_7, X \setminus T_8\}$$

kümesi X in bir parçalanışıdır. Dolayısıyla bu kümelerin tam α - izomorfizması altındaki görüntülerinden oluşan

$$\{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3, (\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \setminus \overline{T}_4, \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6, \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7, X \setminus \overline{T}_8\}$$

kümesi de X in bir parçalanışı olur.

Lemma 3.2.5 Her $\alpha \in R_{\varphi}(Q, D')$ için $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3, (\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \setminus \overline{T}_4, \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6, \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7, X \setminus \overline{T}_8$ kümeleri üzerinde tanımlı bir ayrık dönüşüm sistemi vardır. Üstelik farklı ikili bağıntıların ayrık dönüşüm sistemleri birbirinden farklıdır.

İspat: $\alpha \in R_{\varphi}(Q, D')$ olmak üzere her $t \in X$ için $f_{\alpha}(t) = t\alpha$ biçiminde tanımlanan $f_{\alpha}: X \rightarrow D$ dönüşümünü alalım. f_{α} dönüşümü sırasıyla $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3, (\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \setminus \overline{T}_4, \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6, \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7, X \setminus \overline{T}_8$ kümeleri üzerinde $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}$ olarak kısıtlansın. Şimdi $i = 1,2, \dots ,7$ için Y_i^{α} kümelerinden yararlanarak bu dönüşümlerin özelliklerini belirleyelim.

$t \in \overline{T_1}$ olsun. O zaman $t \in Y_1^\alpha$ dır. Böylece $t\alpha = T_1$ olduğu elde edilir. O halde her $t \in \overline{T_1}$ için $f_{1\alpha}(t) = T_1$ dir.

$t \in \overline{T_2}$ olsun. O zaman $t \in Y_2^\alpha$ dır. Böylece $t\alpha = T_2$ olduğu elde edilir. O halde her $t \in \overline{T_2}$ için $f_{2\alpha}(t) = T_2$ dir.

$t \in \overline{T_4} \setminus \overline{T_3}$ olsun. Buradan $(\overline{T_4} \setminus \overline{T_3}) \subseteq \overline{T_4} \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ elde edilir. Böylece her $t \in \overline{T_4} \setminus \overline{T_3}$ için $f_{3\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ olur. Ayrıca $Y_4^\alpha \cap \overline{T_4} \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_4 \in Y_4^\alpha \cap \overline{T_4}$ vardır. Bu ise $t_4\alpha = T_4$ ve $t_4 \in \overline{T_4}$ demektir. Eğer $t_4 \in \overline{T_3} \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$ ise $t_4\alpha \in \{T_1, T_2, T_3\}$ olur. Ancak bu sonuç $t_4\alpha = T_4$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_4 \in \overline{T_4} \setminus \overline{T_3}$ için $f_{3\alpha}(t_4) = T_4$ dir.

$t \in (\overline{T_7} \cap \overline{T_6}) \setminus \overline{T_4}$ olsun. Buradan $(\overline{T_7} \cap \overline{T_6}) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$ elde edilir. O halde her $t \in (\overline{T_7} \cap \overline{T_6}) \setminus \overline{T_4}$ için $f_{4\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$ dir. Ayrıca $Y_5^\alpha \cap \overline{T_5} \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_5 \in Y_5^\alpha \cap \overline{T_5}$ vardır. Bu ise $t_5\alpha = T_5$ ve $t_5 \in \overline{T_5}$ demektir. Eğer $t_5 \in \overline{T_4} \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha$ ise $t_5\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ olur. Ancak bu sonuç $t_5\alpha = T_5$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_5 \in \overline{T_5} \setminus \overline{T_4}$ için $f_{4\alpha}(t_5) = T_5$ dir.

$t \in \overline{T_7} \setminus \overline{T_6}$ olsun. Buradan $(\overline{T_7} \setminus \overline{T_6}) \subseteq \overline{T_7} \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$ elde edilir. Böylece her $t \in \overline{T_7} \setminus \overline{T_6}$ için $f_{5\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$ olur. Ayrıca $Y_7^\alpha \cap \overline{T_7} \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_7 \in Y_7^\alpha \cap \overline{T_7}$ vardır. Bu ise $t_7\alpha = T_7$ ve $t_7 \in \overline{T_7}$ demektir. Eğer $t_7 \in \overline{T_6} \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha$ ise $t_7\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ olur. Ancak bu sonuç $t_7\alpha = T_7$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_7 \in \overline{T_7} \setminus \overline{T_6}$ için $f_{5\alpha}(t_7) = T_7$ dir.

$t \in \overline{T_6} \setminus \overline{T_7}$ olsun. Buradan $(\overline{T_6} \setminus \overline{T_7}) \subseteq \overline{T_6} \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ elde edilir. Böylece her $t \in \overline{T_6} \setminus \overline{T_7}$ için $f_{6\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ olur. Ayrıca $Y_6^\alpha \cap \overline{T_6} \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_6 \in Y_6^\alpha \cap \overline{T_6}$ vardır. Bu ise $t_6\alpha = T_6$ ve $t_6 \in \overline{T_6}$ demektir. Eğer $t_6 \in \overline{T_7} \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha$ ise $t_6\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$ olur. Ancak bu sonuç $t_6\alpha = T_6$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_6 \in \overline{T_6} \setminus \overline{T_7}$ için $f_{6\alpha}(t_6) = T_6$ dır.

$t \in X \setminus \overline{T_8}$ olsun. Buradan $(X \setminus \overline{T_8}) \subseteq X = \bigcup_{i=1}^{8} Y_i^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in Q$ elde edilir. O halde her $t \in X \setminus \overline{T_8}$ için $f_{7\alpha}(t) \in Q$ dur.

Böylece $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ için $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha})$ biçiminde bir dönüşümlerin sıralı sistemi vardır.

Diğer taraftan, $\alpha \neq \beta$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in R_\varphi(Q, D')$ alalım. $f_\alpha = (f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha})$ ve $f_\beta = \left(f_{1\beta}, f_{2\beta}, f_{3\beta}, f_{4\beta}, f_{5\beta}, f_{6\beta}, f_{7\beta}\right)$ olsun. Eğer $f_\alpha = f_\beta$ ise her $t \in X$ için $f_\alpha(t) = f_\beta(t)$ dir. Buradan her $t \in X$ için $t\alpha = t\beta$ yazılır. Bu ise $\alpha = \beta$ olması demektir. Ancak bu sonuç $\alpha \neq \beta$ olmasıyla çelişir. O halde farklı ikili bağıntıların sıralı sistemleri farklıdır.

Lemma 3.2.6 $f: X \to D$ dönüşümü

$f_1: \overline{T}_1 \to \{T_1\}, f_1(t) = T_1$

$f_2: \overline{T}_2 \to \{T_2\}, f_1(t) = T_2$

$f_3: \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3 \to \{T_1, T_2, T_3, T_4\}, f_3(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ ve $f_3(t_4) = T_4, \exists t_4 \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3$ için

$f_4: (\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \setminus \overline{T}_4 \to \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}, f_4(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$

ve $f_4(t_5) = T_5, \exists t_5 \in \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4$ için

$f_5: \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6 \to \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}, f_5(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$

ve $f_5(t_7) = T_7, \exists t_7 \in \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6$ için

$f_6: \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7 \to \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}, f_6(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$

ve $f_6(t_6) = T_6, \exists t_6 \in \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7$ için

$f_7: X \setminus \overline{T}_8 \to Q, f_7(t) \in Q$

biçiminde kısıtlanışa sahip olsun. O zaman $\beta = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times f(x)) \in B_X(D)$ regüler elemandır ve φ, tam β - izomorfizmasıdır. Böylece $\beta \in R_\varphi(Q, D')$ dir.

İspat: Öncelikle $V(D, \beta) = Q$ olduğunu görelim. $V(D, \beta) = \{Y\beta | Y \in D\}$ kümesi, f dönüşümünün özellikleri, $\overline{T}_i\beta = \bigcup_{x \in \overline{T}_i} x\beta$ ve $D' \subseteq D$ olması kullanılarak

$T_1 \in Q \Rightarrow \overline{T}_1\beta = T_1 \Rightarrow T_1 \in V(D, \beta)$

$T_2 \in Q \Rightarrow \overline{T}_2\beta = T_2 \Rightarrow T_2 \in V(D, \beta)$

$T_3 \in Q \Rightarrow \overline{T}_3\beta = T_1 \cup T_2 = T_3 \Rightarrow T_3 \in V(D, \beta)$

$T_4 \in Q \Rightarrow \overline{T}_4\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 = T_4 \Rightarrow T_4 \in V(D, \beta)$

$T_5 \in Q \Rightarrow \overline{T}_5\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 = T_5 \Rightarrow T_5 \in V(D, \beta)$

$T_6 \in Q \Rightarrow \overline{T}_6\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6 = T_6 \Rightarrow T_6 \in V(D, \beta)$

$T_7 \in Q \Rightarrow \overline{T}_7\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_7 = T_7 \Rightarrow T_7 \in V(D, \beta)$

$T_8 \in Q \Rightarrow \overline{T}_8\beta = (\overline{T}_7 \cup \overline{T}_6)\beta = (\overline{T}_7\beta \cup \overline{T}_6\beta) = T_7 \cup T_6 = T_8 \Rightarrow T_8 \in V(D, \beta)$

elde edilir. Böylece $Q \subseteq V(D,\beta)$ olur. Tersine $Z \in V(D,\beta)$ olsun. O zaman $Z = Y\beta$ olacak biçimde $Y \in D$ vardır. Buradan Q nun birleşime kapalı olması ve her $y \in Y$ için $f(y) \in Q$ olduğu kullanılırsa $Z = Y\beta = \bigcup_{y\in Y} y\beta = \bigcup_{y\in Y} f(y) \in Q$ dur. Böylece $V(D,\beta) \subseteq Q$ olur. O halde $V(D,\beta) = Q$ dur.

Diğer yandan $\emptyset \notin Q$ olduğundan β ikili bağıntısının $\beta = \bigcup_{T\in V(X^*,\beta)} \left(Y_T^\beta \times T\right)$ biçiminde quasinormal gösterimi vardır. β nın tanımından her $x \in X$ için $f(x) = x\beta$ dır. Buradan $V(X^*,\beta) = V(D,\beta) = Q$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece $\beta = \bigcup_{i=1}^{8} \left(Y_i^\beta \times T\right)$ biçimindedir.

$t \in \overline{T_1}$ ise $t\beta = f(t) = T_1$ olduğundan $t \in Y_1^\beta$ elde edilir. O halde $\overline{T_1} \subseteq Y_1^\beta$ dır.

$t \in \overline{T_2}$ ise $t\beta = f(t) = T_2$ olduğundan $t \in Y_2^\beta$ elde edilir. O halde $\overline{T_2} \subseteq Y_2^\beta$ dır.

$t \in \overline{T_4} = \overline{T_1} \cup \overline{T_2} \cup (\overline{T_4} \setminus \overline{T_3})$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ olduğundan $t \in Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta$ elde edilir. O halde $\overline{T_4} \subseteq Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta$ dır.

$t \in \overline{T_5} = \overline{T_1} \cup \overline{T_2} \cup \left((\overline{T_7} \cap \overline{T_6}) \setminus \overline{T_4}\right) \cup (\overline{T_4} \setminus \overline{T_3})$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$ olduğundan $t \in Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta \cup Y_5^\beta$ elde edilir. O halde $\overline{T_5} \subseteq Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta \cup Y_5^\beta$ dır.

$t \in \overline{T_6} = \overline{T_5} \cup (\overline{T_6} \setminus \overline{T_7})$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ olduğundan $t \in Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta \cup Y_5^\beta \cup Y_6^\beta$ elde edilir. O halde $\overline{T_6} \subseteq Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta \cup Y_5^\beta \cup Y_6^\beta$ dır.

$t \in \overline{T_7} = \overline{T_5} \cup (\overline{T_7} \setminus \overline{T_6})$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$ olduğundan $t \in Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta \cup Y_5^\beta \cup Y_7^\beta$ elde edilir. O halde $\overline{T_7} \subseteq Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta \cup Y_5^\beta \cup Y_7^\beta$ dır.

Ayrıca en az bir $t_4 \in \overline{T_4} \setminus \overline{T_3}$ için $f_3(t_4) = T_4$ olduğundan $Y_4^\beta \cap \overline{T_4} \neq \emptyset$ dir. Benzer olarak f_5, f_6, f_7 dönüşümlerinin özelliklerinden $Y_5^\alpha \cap \overline{T_5} \neq \emptyset, Y_6^\alpha \cap \overline{T_6} \neq \emptyset$ ve $Y_7^\alpha \cap \overline{T_7} \neq \emptyset$ olur.

Böylece $i = 1,2, \dots .8$ için $\varphi(T_i) = \overline{T_\imath}$ biçiminde tanımlı $\varphi: Q \to D' = \{\overline{T_1}, \overline{T_2}, \overline{T_3}, \overline{T_4}, \overline{T_5}, \overline{T_6}, \overline{T_7}, \overline{T_8}\}$ dönüşümü β için Teorem 3.3'deki koşulları sağlar. Üstelik her $T \in V(D,\beta)$ için $\varphi(T)\beta = \overline{T}\beta = T$ sağlandığından φ, tam β - izomorfizmasıdır. O halde $\beta \in R_\varphi(Q, D')$ dir.

Lemma 3.2.5 ve Lemma 3.2.6'dan görüldüğü üzere $R_\varphi(Q, D')$ ile ayrık dönüşümlerin sıralı sistemlerinin kümesi arasında birebir eşleme vardır.

Teorem 3.2.7 Q, XI – yarılatisi için $D' = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3, \overline{T}_4, \overline{T}_5, \overline{T}_6, \overline{T}_7, \overline{T}_8\}$ ile Q arasında bir α – izomorfizması varsa ve $\Omega(Q) = m_0$ ise $B_X(Q)$ nun regüler elemanlarının sayısı

$$|R(D')| = m_0 \cdot 4 \cdot \left(4^{|\overline{T_4} \setminus \overline{T_3}|} - 3^{|\overline{T_4} \setminus \overline{T_3}|}\right) \cdot 5^{|(\overline{T_7} \cap \overline{T_6}) \setminus \overline{T_5}|} \cdot \left(5^{|\overline{T_5} \setminus \overline{T_4}|} - 4^{|\overline{T_5} \setminus \overline{T_4}|}\right)$$
$$\cdot \left(6^{|\overline{T_7} \setminus \overline{T_6}|} - 5^{|\overline{T_7} \setminus \overline{T_6}|}\right) \cdot \left(6^{|\overline{T_6} \setminus \overline{T_7}|} - 5^{|\overline{T_6} \setminus \overline{T_7}|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \overline{T_8}|}$$

olur.

İspat: Lemma 3.2.5 ve Lemma 3.2.6 göstermektedir ki, $\alpha \in B_X(D)$ regüler eleman, $V(D, \alpha) = Q$ ve $\varphi: Q \to D'$ bir tam α – izomorfizması olmak üzere, $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha})$ biçimindeki farklı sıralı sistemlerin sayısı ile $R_\varphi(Q, D')$ kümesinin eleman sayısı birbirine eşittir. Tanım 2.2.13'den dolayı oluşturulabilecek $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}$ dönüşümlerinin sayısı sırasıyla

$$1, 1, \left(4^{|\overline{T_4} \setminus \overline{T_3}|} - 3^{|\overline{T_4} \setminus \overline{T_3}|}\right), 5^{|(\overline{T_7} \cap \overline{T_6}) \setminus \overline{T_5}|}\left(5^{|\overline{T_5} \setminus \overline{T_4}|} - 4^{|\overline{T_5} \setminus \overline{T_4}|}\right),$$
$$\left(6^{|\overline{T_7} \setminus \overline{T_6}|} - 5^{|\overline{T_7} \setminus \overline{T_6}|}\right), \left(6^{|\overline{T_6} \setminus \overline{T_7}|} - 5^{|\overline{T_6} \setminus \overline{T_7}|}\right), 8^{|X \setminus \overline{T_8}|}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\left|R_\varphi(Q, D')\right| = \left(4^{|\overline{T_4} \setminus \overline{T_3}|} - 3^{|\overline{T_4} \setminus \overline{T_3}|}\right) \cdot 5^{|(\overline{T_7} \cap \overline{T_6}) \setminus \overline{T_5}|} \cdot \left(5^{|\overline{T_5} \setminus \overline{T_4}|} - 4^{|\overline{T_5} \setminus \overline{T_4}|}\right)$$
$$\cdot \left(6^{|\overline{T_7} \setminus \overline{T_6}|} - 5^{|\overline{T_7} \setminus \overline{T_6}|}\right) \cdot \left(6^{|\overline{T_6} \setminus \overline{T_7}|} - 5^{|\overline{T_6} \setminus \overline{T_7}|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \overline{T_8}|}$$

olur. Ayrıca Q nun otomorfizmleri

$$id_Q = \begin{pmatrix} T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 \\ T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 \end{pmatrix}, \ \gamma = \begin{pmatrix} T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 \\ T_2 T_1 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 \end{pmatrix}$$
$$\theta = \begin{pmatrix} T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 \\ T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_7 T_6 T_8 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 \\ T_2 T_1 T_3 T_4 T_5 T_7 T_6 T_8 \end{pmatrix}$$

olup $q = 4$ tanedir. O halde Lemma 2.3.17 kullanılarak

$$|R(D')| = m_0 \cdot 4 \cdot \left(4^{|\overline{T_4} \setminus \overline{T_3}|} - 3^{|\overline{T_4} \setminus \overline{T_3}|}\right) \cdot 5^{|(\overline{T_7} \cap \overline{T_6}) \setminus \overline{T_5}|} \cdot \left(5^{|\overline{T_5} \setminus \overline{T_4}|} - 4^{|\overline{T_5} \setminus \overline{T_4}|}\right)$$
$$\cdot \left(6^{|\overline{T_7} \setminus \overline{T_6}|} - 5^{|\overline{T_7} \setminus \overline{T_6}|}\right) \cdot \left(6^{|\overline{T_6} \setminus \overline{T_7}|} - 5^{|\overline{T_6} \setminus \overline{T_7}|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \overline{T_8}|}$$

olduğu görülür.

Örnek 3.2.8 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve $D=\{T_1=\{1\},T_2=\{2\},T_3=\{1,2\},T_4=\{1,2,3\},T_5=\{1,2,3,4\},T_6=\{1,2,3,4,5\},T_7=\{1,2,3,4,6\},T_8=\{1,2,3,4,5,6\}\}$ olsun. D kümelerdeki birleşme işlemine kapalı olduğundan tam X - yarılatistir. Ayrıca Lemma 3.2.1'deki koşulları sağlar ve $T_1\cap T_2=\emptyset$ dir. Dolayısıyla tam XI – yarılatistir. $Q=D$ olarak alalım. O zaman $\Omega(Q)=1$ ve Qnun otomorfizmlerinin sayısı $q=4$ tür. Buradan Teorem 3.2.7 kullanılırsa $B_X(Q)$ nun regüler elemanlarının sayısı

$$|R(Q)|=1\cdot 4\cdot(4^1-3^1)\cdot 5^0\cdot(5^1-4^1)\cdot(6^1-5^1)\cdot(6^1-5^1)\cdot 8^0=4$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.9 Q, XI – yarılatisi için $B_X(Q)$ nun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right|=\left(4^{|T_4\setminus T_3|}-3^{|T_4\setminus T_3|}\right)\cdot 5^{|(T_7\cap T_6)\setminus T_5|}\cdot\left(5^{|T_5\setminus T_4|}-4^{|T_5\setminus T_4|}\right)\cdot$$
$$\left(6^{|T_7\setminus T_6|}-5^{|T_7\setminus T_6|}\right)\cdot\left(6^{|T_6\setminus T_7|}-5^{|T_6\setminus T_7|}\right)\cdot 8^{|X\setminus T_8|}$$

olur.

İspat: Lemma 2.3.14'den dolayı $E_X^{(r)}(Q)=R_{id_Q}(Q,Q)$ dur. Teorem 3.2.7'da $D'=Q$ alınırsa

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right|=\left|R_{id_Q}(Q,Q)\right|=\left|R_\varphi(Q,Q)\right|$$

olur. Buradan Teorem 3.2.7 kullanılarsa sonuca ulaşılır.

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right|=\left(4^{|T_4\setminus T_3|}-3^{|T_4\setminus T_3|}\right)\cdot 5^{|(T_7\cap T_6)\setminus T_5|}\cdot\left(5^{|T_5\setminus T_4|}-4^{|T_5\setminus T_4|}\right)\cdot$$
$$\left(6^{|T_7\setminus T_6|}-5^{|T_7\setminus T_6|}\right)\cdot\left(6^{|T_6\setminus T_7|}-5^{|T_6\setminus T_7|}\right)\cdot 8^{|X\setminus T_8|}$$

3.3. $\sum_7(X,8)$ sınıfı

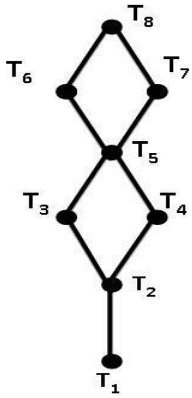
Lemma 3.3.1 D nin

$T_1\subset T_2\subset T_3\subset T_5\subset T_6\subset T_8, T_1\subset T_2\subset T_3\subset T_5\subset T_7\subset T_8,$
$T_1\subset T_2\subset T_4\subset T_5\subset T_6\subset T_8, T_1\subset T_2\subset T_4\subset T_5\subset T_7\subset T_8,$

$T_4 \backslash T_3 \neq \emptyset, T_3 \backslash T_4 \neq \emptyset, T_6 \backslash T_7 \neq \emptyset, T_7 \backslash T_6 \neq \emptyset,$

$T_3 \cup T_4 = T_5, T_6 \cup T_7 = T_8, T_1 \neq \emptyset$

koşullarını sağlayan $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ tam X - yarılatisini alalım. Q tam XI – yarılatistir.



Şekil 3.6. $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ tam X – yarılatisinin diyagramı.

İspat: Verilen koşulları sağlayan $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ tam X – yarılatisinin diyagramı Şekil 3.6'deki gibidir. $C(Q) = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$ Q nun karakteristik kümeler ailesi ve $\theta: Q \to C(Q), \theta(T_i) = P_i, (i = 1,2, \dots ,8)$ karakteristik dönüşümünü alalım. O zaman $\breve{Q} = \cup Q = T_8$ ve $\theta(\breve{Q}) = \theta(T_8) = \mathrm{P}_8$ olduğu kullanılırsa her $T_i \in Q$ elemanı $T_i = P_8 \cup \bigcup_{T \in \hat{Q}(T_i)} \theta(T)$ biçiminde yazılabilir. Böylece

$$T_8 = P_8 \cup \bigcup_{T \in \hat{Q}(T_8)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_7 \cup \mathrm{P}_6 \cup \mathrm{P}_5 \cup \mathrm{P}_4 \cup \mathrm{P}_3 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1$$
$$T_7 = P_8 \cup \bigcup_{T \in \hat{Q}(T_7)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_6 \cup \mathrm{P}_5 \cup \mathrm{P}_4 \cup \mathrm{P}_3 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1$$
$$T_6 = P_8 \cup \bigcup_{T \in \hat{Q}(T_6)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_7 \cup \mathrm{P}_5 \cup \mathrm{P}_4 \cup \mathrm{P}_3 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1$$
$$T_5 = P_8 \cup \bigcup_{T \in \hat{Q}(T_5)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_4 \cup \mathrm{P}_3 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1$$
$$T_4 = P_8 \cup \bigcup_{T \in \hat{Q}(T_4)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_3 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1 \qquad \textbf{(3.5)}$$
$$T_3 = P_8 \cup \bigcup_{T \in \hat{Q}(T_3)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_4 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1$$
$$T_2 = P_8 \cup \bigcup_{T \in \hat{Q}(T_2)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_1$$
$$T_1 = P_8 \cup \bigcup_{T \in \hat{Q}(T_1)} \theta(T) = \mathrm{P}_8 \cup \emptyset = \mathrm{P}_8$$

eşitlikleri elde edilir. Burada P_1, P_3, P_4, P_6, P_7 temel kaynak elemanları olduğundan boş kümeden farklıdır. P_2, P_5, P_8 yardımcı kaynak elemanlarıdır ve boş küme olabilirler. Ancak diyagramın koşullarında $\mathrm{P}_8 = T_1 \neq \emptyset$ verildiğinden $\mathrm{P}_8 \neq \emptyset$ dir.

Şimdi her $t \in \check{Q}$ için Q_t kümesini belirleyelim. $\check{Q} = T_8 = \mathrm{P}_8 \cup \mathrm{P}_7 \cup \mathrm{P}_6 \cup \mathrm{P}_5 \cup \mathrm{P}_4 \cup \mathrm{P}_3 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_1$ biçiminde ayrık kümelerin bileşiminden oluştuğu için, her bir $t \in \check{Q}$ elemanı bu kümelerin sadece bir tanesinin elemanıdır. Böylece (3.5) eşitliğinden yararlanılarak

$t \in P_8$ ise $Q_t = Q$
$t \in P_7$ ise $Q_t = \{T_8, T_6\}$
$t \in P_6$ ise $Q_t = \{T_8, T_7\}$
$t \in P_5$ ise $Q_t = \{T_8, T_7, T_6\}$
$t \in P_4$ ise $Q_t = \{T_8, T_7, T_6, T_5, T_3\}$
$t \in P_3$ ise $Q_t = \{T_8, T_7, T_6, T_5, T_4\}$
$t \in P_2$ ise $Q_t = \{T_8, T_7, T_6, T_5, T_4, T_3\}$
$t \in P_1$ ise $Q_t = \{T_8, T_7, T_6, T_5, T_4, T_3, T_2\}$

olur. Bu eşitliklerden yararlanılarak her bir Q_t kümesinin $N(Q, Q_t)$ ile gösterilen alt sınırlarının kümesi

$t \in P_8$ ise $N(Q, Q_t) = \{T_1\}$
$t \in P_7$ ise $N(Q, Q_t) = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$
$t \in P_6$ ise $N(Q, Q_t) = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$
$t \in P_5$ ise $N(Q, Q_t) = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$
$t \in P_4$ ise $N(Q, Q_t) = \{T_1, T_2, T_3\}$
$t \in P_3$ ise $N(Q, Q_t) = \{T_1, T_2, T_4\}$
$t \in P_2$ ise $N(Q, Q_t) = \{T_1, T_2\}$
$t \in P_1$ ise $N(Q, Q_t) = \{T_1, T_2\}$

biçiminde elde edilir. O zaman her bir Q_t kümesinin, $\Lambda(Q, Q_t) = \cup N(Q, Q_t)$ biçiminde verilen en büyük alt sınırlarının kümesi

$t \in P_8$ ise $\cup N(Q, Q_t) = T_1$
$t \in P_7$ ise $\cup N(Q, Q_t) = T_6$
$t \in P_6$ ise $\cup N(Q, Q_t) = T_7$

$t \in P_5$ ise $\cup N(Q, Q_t) = T_5$ **(3.6)**

$t \in P_4$ ise $\cup N(Q, Q_t) = T_3$

$t \in P_3$ ise $\cup N(Q, Q_t) = T_4$

$t \in P_2$ ise $\cup N(Q, Q_t) = T_2$

$t \in P_1$ ise $\cup N(Q, Q_t) = T_2$

olarak bulunur. O halde her $t \in \check{Q}$ için $\Lambda(Q, Q_t) = \cup N(Q, Q_t) \in Q$ koşulu sağlanır. Ayrıca (3.6) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&t \in T_1 = P_8 \Rightarrow T_1 = \Lambda(Q, Q_t) \\
&t \in T_2 = P_8 \cup P_1 \Rightarrow t \in P_8 \; veya \; t \in P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(Q, Q_t) \in \{T_1, T_2\} \\
&\qquad \Rightarrow T_2 = T_1 \cup T_2 = \textstyle\bigcup_{t \in T_2} \Lambda(Q, Q_t) \\
&t \in T_3 = P_8 \cup P_4 \cup P_2 \cup P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(Q, Q_t) \in \{T_1, T_2, T_3\} \\
&\qquad \Rightarrow T_3 = T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \textstyle\bigcup_{t \in T_3} \Lambda(Q, Q_t) \\
&t \in T_4 = P_8 \cup P_3 \cup P_2 \cup P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(Q, Q_t) \in \{T_1, T_2, T_4\} \\
&\qquad \Rightarrow T_4 = T_1 \cup T_2 \cup T_4 = \textstyle\bigcup_{t \in T_4} \Lambda(Q, Q_t) \\
&t \in T_5 = P_8 \cup P_4 \cup P_3 \cup P_2 \cup P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(Q, Q_t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\} \\
&\qquad \Rightarrow T_5 = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 = \textstyle\bigcup_{t \in T_5} \Lambda(Q, Q_t) \\
&t \in T_6 = P_8 \cup P_7 \cup P_5 \cup \cdots \cup P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(Q, Q_t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\} \\
&\qquad \Rightarrow T_6 = T_1 \cup \cdots \cup T_6 = \textstyle\bigcup_{t \in T_6} \Lambda(Q, Q_t) \\
&t \in T_7 = P_8 \cup P_6 \cup P_5 \cup \cdots \cup P_1 \quad \Rightarrow \Lambda(Q, Q_t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\} \\
&\qquad \Rightarrow T_7 = T_1 \cup \cdots \cup T_5 \cup T_7 = \textstyle\bigcup_{t \in T_7} \Lambda(Q, Q_t) \\
&t \in T_8 = T_7 \cup T_6 \quad \Rightarrow \Lambda(Q, Q_t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\} \\
&\qquad \Rightarrow T_8 = T_7 \cup T_6 = \textstyle\bigcup_{t \in T_8} \Lambda(Q, Q_t)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece Tanım 1.2.12'den Q, XI – yarılatistir.

Şimdi $V(D, \alpha) = Q$ koşulunu sağlayan ve $\alpha = \bigcup_{i=1}^{8} (Y_i^{\alpha} \times T_i)$ quasinormal gösterime sahip olan bir $\alpha \in B_X(Q)$ reguler elemanının özelliklerini belirleyelim.

Lemma 3.3.2 Q nun $G = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$ üreteç kümesini alalım. O zaman $T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_7$ elemanları sırasıyla $\ddot{G}_{T_1}, \ddot{G}_{T_2}, \ddot{G}_{T_3}, \ddot{G}_{T_4}, \ddot{G}_{T_6}, \ddot{G}_{T_7}$ kümelerinin limit olmayan elemanlarıdır ve T_5 elemanı $\ddot{G}_{T_5}$ kümesinin limit elemanıdır.

İspat: $i = 1,2, \dots ,7$ için $\ddot{G}_{T_i}$ kümeleri

$\ddot{G}_{T_1} = \{T_1\}$

$\ddot{G}_{T_2} = \{T_1, T_2\}$

$\ddot{G}_{T_3} = \{T_1, T_2, T_3\}$

$\ddot{G}_{T_4} = \{T_1, T_2, T_4\}$

$\ddot{G}_{T_5} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$

$\ddot{G}_{T_6} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$

$\ddot{G}_{T_7} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$

şeklindedir. Buradan

$$T_1 \backslash l(\ddot{G}_{T_1}, T_1) = T_1 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_1}, \{T_1\}) = T_1 \backslash \emptyset = T_1 \neq \emptyset$$
$$T_2 \backslash l(\ddot{G}_{T_2}, T_2) = T_2 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_2}, \{T_2\}) = T_2 \backslash T_1 \neq \emptyset$$
$$T_3 \backslash l(\ddot{G}_{T_3}, T_3) = T_3 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_3}, \{T_3\}) = T_3 \backslash T_2 \neq \emptyset$$
$$T_4 \backslash l(\ddot{G}_{T_4}, T_4) = T_4 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_4}, \{T_4\}) = T_4 \backslash T_2 \neq \emptyset$$
$$T_5 \backslash l(\ddot{G}_{T_5}, T_5) = T_5 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_5}, \{T_5\}) = T_5 \backslash T_5 = \emptyset$$
$$T_6 \backslash l(\ddot{G}_{T_6}, T_6) = T_6 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_6}, \{T_6\}) = T_6 \backslash T_5 \neq \emptyset$$
$$T_7 \backslash l(\ddot{G}_{T_7}, T_7) = T_7 \backslash \cup (\ddot{G}_{T_7}, \{T_7\}) = T_7 \backslash T_5 \neq \emptyset$$

elde edilir. O halde $T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_7$ elemanları sırasıyla $\ddot{G}_{T_1}, \ddot{G}_{T_2}, \ddot{G}_{T_3}, \ddot{G}_{T_4}, \ddot{G}_{T_6}, \ddot{G}_{T_7}$ kümelerinin limit olmayan elemanlarıdır ve T_5 elemanı $\ddot{G}_{T_5}$ kümesinin limit elemanıdır.

Teorem 3.3.3 $\alpha \in B_X(Q)$ için $V(D, \alpha) = Q$ koşulu sağlansın ve α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{8} (Y_i^\alpha \times T_i)$ olsun. Bu durumda α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul Q dan D nin bir D' alt yarılatisine

$\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha,$

$\varphi(T_2) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha,$

$\varphi(T_3) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha,$

$\varphi(T_4) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha,$

$\varphi(T_6) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha,$

$\varphi(T_7) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha,$

$Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \emptyset,\ Y_3^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \emptyset$

$Y_6^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \emptyset, Y_7^\alpha \cap \varphi(T_7) \neq \emptyset$

koşullarını sağlayan bir φ tam α – izomorfizmasının var olmasıdır.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ regüler eleman olsun. Q tam XI – yarılatis ve $V(D,\alpha) = Q$ olduğundan $V(D,\alpha)$ tam XI – yarılatistir. O zaman Teorem 2.3.9'dan Q dan D nin D' alt yarılatisine bir φ tam izomorfizma vardır. Ayrıca yine aynı teoremden dolayı, her $T \in V(D,\alpha)$ için $\varphi(T)\alpha = T$ sağlandığından φ tam α – izomorfizmasıdır. Teorem 2.3.9 b) şıkkı uygulanırsa

$$\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha,$$
$$\varphi(T_2) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha,$$
$$\varphi(T_3) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha,$$
$$\varphi(T_4) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha,$$
$$\varphi(T_5) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha,$$
$$\varphi(T_6) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha,$$
$$\varphi(T_7) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha,$$

elde edilir. Bu denklemlerden $\varphi(T_3) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$ ve $\varphi(T_4) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha$ kullanılarak

$$\begin{aligned}\varphi(T_5) \subseteq \varphi(T_5) \cup Y_5^\alpha = \varphi(T_3) \cup \varphi(T_4) \cup Y_5^\alpha \subseteq & \quad (Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha) \cup (Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha) \\ = & \quad Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha\end{aligned}$$

olduğu elde edilebilir. O yüzden $\varphi(T_5) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha$ koşulunu yazmaya gerek yoktur. Ayrıca Lemma 3.3.2'den $T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_7$ elemanlarının limit olmayan elemanlar oldukları göz önüne alınırsa Teorem 2.3.9 c) şıkkından

$$Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \emptyset,\ Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \emptyset,\ Y_3^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \emptyset$$
$$Y_6^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \emptyset, Y_7^\alpha \cap \varphi(T_7) \neq \emptyset$$

olur. $\varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha$ olduğundan $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \emptyset$ her zaman sağlanacaktır. O yüzden bu koşulu yazmaya gerek yoktur. O halde verilen koşulları sağlayan bir φ tam α – izomorfizması vardır.

Tersine Q dan D nin D' alt yarılatisine verilen koşulları sağlayan bir φ tam α – izomorfizması var olsun. $V(D,\alpha) = Q$ olduğundan $V(D,\alpha)$ tam XI – yarılatistir. O zaman

Teorem 2.3.9 a)-c) şıkkı sağlanır. Şimdi Lemma 3.3.2'den T_5 elemanının $\ddot{G}_{T_5}$ kümesinin limit elemanı olduğunu kullanarak $B(T_5) = \{Z \in \ddot{G}_{T_5} \,|Y_Z^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \emptyset\}$ kümesini oluşturalım. Eğer $Y_4^\alpha \cap \varphi(T_5) = \emptyset$ ise

$$\begin{aligned}\varphi(T_5) = \varphi(T_3) \cup \varphi(T_4) \subseteq &\quad (Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha) \cup (Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha) \\ = &\quad Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha\end{aligned}$$

olur. Böylece $\varphi(T_4) \subseteq \varphi(T_5) \subseteq (Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha)$ elde edilir. Ancak bu sonuç $Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde $Y_4^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \emptyset$ olduğundan $T_4 \in B(T_5)$ dir. Benzer olarak eğer $Y_3^\alpha \cap \varphi(T_5) = \emptyset$ ise

$$\begin{aligned}\varphi(T_5) = \varphi(T_3) \cup \varphi(T_4) \subseteq &\quad (Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha) \cup (Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha) \\ = &\quad Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha\end{aligned}$$

olur. Böylece $\varphi(T_3) \subseteq \varphi(T_5) \subseteq (Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha)$ elde edilir. Ancak bu sonuç $Y_3^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde $Y_3^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \emptyset$ olduğundan $T_3 \in B(T_5)$ dir. Bulunan sonuçlar kullanılarak $\cup B(T_5) = T_3 \cup T_4 = T_5$ yazılabilir. Teorem 2.3.9'dan $\alpha \in B_X(D)$ regüler elemandır.

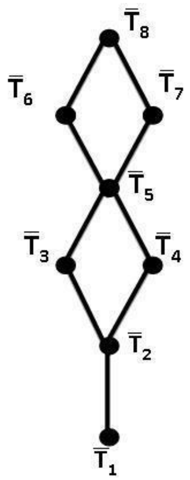
Sonuç 3.3.4 $\alpha \in B_X(Q)$ için $V(D,\alpha) = Q$ koşulu sağlansın ve α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{8}(Y_i^\alpha \times T_i)$ olsun. Bu durumda α nın sağ birim eleman olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}&T_1 \subseteq Y_1^\alpha,\\ &T_2 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha,\\ &T_3 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha,\\ &T_4 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha,\\ &T_6 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha,\\ &T_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha,\\ &Y_2^\alpha \cap T_2 \neq \emptyset,\ Y_3^\alpha \cap T_3 \neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap T_4 \neq \emptyset\\ &Y_6^\alpha \cap T_6 \neq \emptyset, Y_7^\alpha \cap T_7 \neq \emptyset\end{aligned}$$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat: α sağ birim elemanı olsun. O zaman α aynı zamanda regüler ve idempotent elemandır. Teorem 3.3.3'deki koşulları sağlayan bir φ tam α – izomorfizması vardır. Teorem 2.3.20'den φ nin $V(D,\alpha)$ nın birim dönüşümü olduğu kullanılarak istenilen elde edilir. Tersine verilen koşulları sağlansın. O zaman $V(D,\alpha)$ nın birim dönüşümü olarak alınan φ, Teorem 3.3.3'deki koşulları sağlamış olur. Böylece α regüler elemandır. Teorem 2.3.20'den α idempotent elemandır. Ayrıca φ tam α – izomorfizması birim dönüşüm olduğundan her $T \in Q$ için $\varphi(T)\alpha = T\alpha = T$ olur. O halde $V(Q,\alpha) = Q$ dur. Teorem 2.3.4'den α, $B_X(Q)$ nin sağ birim elemanıdır.

Şimdi $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ tam XI – yarılatisi için Teorem 3.3.3'de verilen koşulları sağlayan $\alpha \in B_X(D)$ reguler elemanlarının sayısını hesaplayalım.



Şekil 3.7. $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ tam XI – yarılatisinin diyagramı.

$\alpha \in B_X(D)$, $V(D,\alpha) = Q$ koşulunu sağlayan ve $\alpha = \bigcup_{i=1}^{8} (Y_i^\alpha \times T_i)$ quasinormal gösterime sahip olan bir regüler eleman olsun. O zaman Q dan $D' = \{\varphi(T_1), \varphi(T_1), \dots, \varphi(T_8)\}$ kümesine Teorem 3.3.3'ün koşullarını sağlayan bir φ tam α - izomorfizması vardır. Yani $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ dir. $i = 1,2, \dots .8$ için $\varphi(T_i) = \overline{T_\iota}$ ile gösterelim. Bu durumda $D' = \{\overline{T_1}, \overline{T_2}, \overline{T_3}, \overline{T_4}, \overline{T_5}, \overline{T_6}, \overline{T_7}, \overline{T_8}\}$ kümesinin diyagramı Şekil 3.7'deki gibidir ve

$\overline{T}_1 \subseteq Y_1^\alpha$,
$\overline{T}_2 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha$,
$\overline{T}_3 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$,
$\overline{T}_4 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha$,

$$\overline{T}_6 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha,$$
$$\overline{T}_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha,$$
$$Y_2^\alpha \cap \overline{T}_2 \neq \emptyset, Y_3^\alpha \cap \overline{T}_3 \neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4 \neq \emptyset,$$
$$Y_6^\alpha \cap \overline{T}_6 \neq \emptyset, Y_7^\alpha \cap \overline{T}_7 \neq \emptyset$$

koşulları sağlanır.

Ayrıca eşitlik (3.5) deki formal eşitliklerden yararlanarak

$$P_1 = T_2 \setminus T_1, P_2 = (T_4 \cap T_3) \setminus T_2, P_3 = T_4 \setminus T_3, P_4 = T_3 \setminus T_4,$$
$$P_5 = (T_7 \cap T_6) \setminus T_5, P_6 = T_7 \setminus T_6, P_7 = T_6 \setminus T_7, P_8 = T_1$$

yazılabilir. $i = 1,2, \dots ,8$ olmak üzere P_i kümeleri ayrık kümelerdir ve $\bigcup_{i=1}^{8} P_i = T_8$ dir. Böylece

$$\{T_1, (T_3 \cap T_4) \setminus T_1, T_4 \setminus T_3, T_3 \setminus T_4, (T_7 \cap T_6) \setminus T_5, T_7 \setminus T_6, T_6 \setminus T_7, X \setminus T_8\}$$

kümesi X in bir parçalanışıdır. Dolayısıyla bu kümelerin tam α - izomorfizması altındaki görüntülerinden oluşan

$$\{\overline{T}_1, (\overline{T}_3 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_1, \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3, \overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4, (\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \setminus \overline{T}_5, \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6, \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7, X \setminus \overline{T}_8\}$$

kümesi de X in bir parçalanışı olur.

Lemma 3.3.5 Her $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ için $\overline{T}_1, (\overline{T}_3 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_1, \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3, \overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4, (\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \setminus \overline{T}_5, \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6, \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7, X \setminus \overline{T}_8$ kümeleri üzerinde tanımlı bir ayrık dönüşüm sistemi vardır. Üstelik farklı ikili bağıntıların ayrık dönüşüm sistemleri birbirinden farklıdır.

İspat: $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ olmak üzere her $t \in X$ için $f_\alpha(t) = t\alpha$ biçiminde tanımlanan $f_\alpha : X \to D$ dönüşümünü alalım. f_α dönüşümü sırasıyla $\overline{T}_1, (\overline{T}_3 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_1, \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3, \overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4, (\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \setminus \overline{T}_5, \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6, \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7, X \setminus \overline{T}_8$ kümeleri üzerinde $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}$ ve $f_{8\alpha}$ olarak kısıtlansın. Şimdi $i = 1,2, \dots ,8$ için Y_i^α kümelerinden yararlanarak bu dönüşümlerin özelliklerini belirleyelim.

$t \in \overline{T}_1$ olsun. O zaman $t \in Y_1^\alpha$ dır. Böylece $t\alpha = T_1$ olduğu elde edilir. O halde her $t \in \overline{T}_1$ için $f_{1\alpha}(t) = T_1$ dir.

$t \in (\overline{T}_3 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_1$ olsun. Buradan $(\overline{T}_3 \cap \overline{T}_4) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2\}$ elde edilir. Böylece her $t \in (\overline{T}_3 \cap \overline{T}_4) \setminus \overline{T}_1$ için $f_{2\alpha}(t) \in \{T_1, T_2\}$ olur. Ayrıca $Y_2^\alpha \cap$

$\overline{T}_2 \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_2 \in Y_2^\alpha \cap \overline{T}_2$ vardır. Bu ise $t_2\alpha = T_2$ ve $t_2 \in \overline{T}_2$ demektir. Eğer $t_2 \in \overline{T}_1 \subseteq Y_1^\alpha$ ise $t_2\alpha = T_1$ olur. Ancak bu sonuç $t_2\alpha = T_2$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_2 \in \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1$ için $f_{2\alpha}(t_2) = T_2$ dir.

$t \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3$ olsun. Buradan $(\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3) \subseteq \overline{T}_4 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_4\}$ elde edilir. Böylece her $t \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3$ için $f_{3\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_4\}$ olur. Ayrıca $Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4 \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_4 \in Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4$ vardır. Bu ise $t_4\alpha = T_4$ ve $t_4 \in \overline{T}_4$ demektir. Eğer $t_4 \in \overline{T}_3 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$ ise $t_4\alpha \in \{T_1, T_2, T_3\}$ olur. Ancak bu sonuç $t_4\alpha = T_4$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_4 \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3$ için $f_{3\alpha}(t_4) = T_4$ dir.

$t \in \overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4$ olsun. Buradan $(\overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4) \subseteq \overline{T}_3 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3\}$ elde edilir. Böylece her $t \in \overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4$ için $f_{4\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3\}$ olur. Ayrıca $Y_3^\alpha \cap \overline{T}_3 \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_3 \in Y_3^\alpha \cap \overline{T}_3$ vardır. Bu ise $t_3\alpha = T_3$ ve $t_3 \in \overline{T}_3$ demektir. Eğer $t_3 \in \overline{T}_4 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha$ ise $t_3\alpha \in \{T_1, T_2, T_4\}$ olur. Ancak bu sonuç $t_3\alpha = T_3$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_3 \in \overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4$ için $f_{4\alpha}(t_3) = T_3$ dir.

$t \in (\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \setminus \overline{T}_5$ olsun. Buradan $(\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$ elde edilir. O halde her $t \in (\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \setminus \overline{T}_5$ için $f_{5\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$ dir.

$t \in \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6$ olsun. Buradan $(\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6) \subseteq \overline{T}_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$ elde edilir. Böylece her $t \in \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6$ için $f_{6\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$ olur. Ayrıca $Y_7^\alpha \cap \overline{T}_7 \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_7 \in Y_7^\alpha \cap \overline{T}_7$ vardır. Bu ise $t_7\alpha = T_7$ ve $t_7 \in \overline{T}_7$ demektir. Eğer $t_7 \in \overline{T}_6 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha$ ise $t_7\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ olur. Ancak bu sonuç $t_7\alpha = T_7$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_7 \in \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6$ için $f_{6\alpha}(t_7) = T_7$ dir.

$t \in \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7$ olsun. Buradan $(\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7) \subseteq \overline{T}_6 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ elde edilir. Böylece her $t \in \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7$ için $f_{7\alpha}(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ olur. Ayrıca $Y_6^\alpha \cap \overline{T}_6 \neq \emptyset$ olduğundan en az bir tane $t_6 \in Y_6^\alpha \cap \overline{T}_6$ vardır. Bu ise $t_6\alpha = T_6$ ve $t_6 \in \overline{T}_6$ demektir. Eğer $t_6 \in \overline{T}_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha$ ise $t_6\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$ olur. Ancak bu sonuç $t_6\alpha = T_6$ olmasıyla çelişir. O halde en az bir $t_6 \in \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7$ için $f_{7\alpha}(t_6) = T_6$ dır.

$t \in X \setminus \overline{T}_8$ olsun. Buradan $(X \setminus \overline{T}_8) \subseteq X = \bigcup_{i=1}^{8} Y_i^\alpha$ olduğu kullanılırsa $t\alpha \in Q$ elde edilir. O halde her $t \in X \setminus \overline{T}_8$ için $f_{8\alpha}(t) \in Q$ dur.

Böylece $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ için $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}, f_{8\alpha})$ biçiminde bir dönüşümlerin sıralı sistemi vardır.

Diğer taraftan, $\alpha \neq \beta$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in R_{\varphi}(Q, D')$ alalım. $f_{\alpha} = (f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}, f_{8\alpha})$ ve $f_{\beta} = (f_{1\beta}, f_{2\beta}, f_{3\beta}, f_{4\beta}, f_{5\beta}, f_{6\beta}, f_{7\beta}, f_{8\beta})$ olsun. Eğer $f_{\alpha} = f_{\beta}$ ise her $t \in X$ için $f_{\alpha}(t) = f_{\beta}(t)$ dir. Buradan her $t \in X$ için $t\alpha = t\beta$ yazılır. Bu ise $\alpha = \beta$ olması demektir. Ancak bu sonuç $\alpha \neq \beta$ olmasıyla çelişir. O halde farklı ikili bağıntıların sıralı sistemleri farklıdır.

Lemma 3.3.6 $f: X \to D$ dönüşümü

$f_1: \overline{T_1} \to \{T_1\}, f_1(t) = T_1$

$f_2: (\overline{T_3} \cap \overline{T_4}) \setminus \overline{T_1} \to \{T_1, T_2\}, f_2(t) \in \{T_1, T_2\}$ ve $f_2(t_2) = T_2, \exists t_2 \in \overline{T_2} \setminus \overline{T_1}$ için

$f_3: \overline{T_4} \setminus \overline{T_3} \to \{T_1, T_2, T_4\}, f_3(t) \in \{T_1, T_2, T_4\}$ ve $f_3(t_4) = T_4, \exists t_4 \in \overline{T_4} \setminus \overline{T_3}$ için

$f_4: \overline{T_3} \setminus \overline{T_4} \to \{T_1, T_2, T_3\}, f_4(t) \in \{T_1, T_2, T_3\}$ ve $f_4(t_3) = T_4, \exists t_3 \in \overline{T_3} \setminus \overline{T_4}$ için

$f_5: (\overline{T_7} \cap \overline{T_6}) \setminus \overline{T_5} \to \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}, f_5(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$

$f_6: \overline{T_7} \setminus \overline{T_6} \to \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}, f_6(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$
ve $f_6(t_7) = T_7, \exists t_7 \in \overline{T_7} \setminus \overline{T_6}$ için

$f_7: \overline{T_6} \setminus \overline{T_7} \to \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}, f_7(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$
ve $f_7(t_6) = T_6, \exists t_6 \in \overline{T_6} \setminus \overline{T_7}$ için

$f_8: X \setminus \overline{T_8} \to Q, f_8(t) \in Q$

biçiminde kısıtlanışa sahip olsun. O zaman $\beta = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times f(x)) \in B_X(D)$ regüler elemandır ve φ, tam β - izomorfizmasıdır. Böylece $\beta \in R_{\varphi}(Q, D')$ dir.

İspat: Öncelikle $V(D, \beta) = Q$ olduğunu görelim. $V(D, \beta) = \{Y\beta | Y \in D\}$ kümesi, f dönüşümünün özellikleri, $\overline{T_i}\beta = \bigcup_{x \in \overline{T_i}} x\beta$ ve $D' \subseteq D$ olması kullanılarak

$T_1 \in Q \Rightarrow \overline{T}_1\beta = T_1 \Rightarrow T_1 \in V(D, \beta)$

$T_2 \in Q \Rightarrow \overline{T}_2\beta = T_1 \cup T_2 = T_2 \Rightarrow T_2 \in V(D, \beta)$

$T_3 \in Q \Rightarrow \overline{T}_3\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 = T_3 \Rightarrow T_3 \in V(D, \beta)$

$T_4 \in Q \Rightarrow \overline{T}_4\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_4 = T_4 \Rightarrow T_4 \in V(D, \beta)$

$T_5 \in Q \Rightarrow \overline{T}_5\beta = (\overline{T}_3 \cup \overline{T}_4)\beta = (\overline{T}_3\beta \cup \overline{T}_4\beta) = T_3 \cup T_4 = T_5 \Rightarrow T_5 \in V(D, \beta)$

$T_6 \in Q \Rightarrow \overline{T}_6\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6 = T_6 \Rightarrow T_6 \in V(D, \beta)$

$T_7 \in Q \Rightarrow \overline{T}_7\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_7 = T_7 \Rightarrow T_7 \in V(D, \beta)$

$T_8 \in Q \Rightarrow \overline{T}_8\beta = (\overline{T}_7 \cup \overline{T}_6)\beta = (\overline{T}_7\beta \cup \overline{T}_6\beta) = T_7 \cup T_6 = T_8 \Rightarrow T_8 \in V(D, \beta)$

elde edilir. Böylece $Q \subseteq V(D,\beta)$ olur. Tersine $Z \in V(D,\beta)$ olsun. O zaman $Z = Y\beta$ olacak biçimde $Y \in D$ vardır. Buradan Q nun birleşime kapalı olması ve her $y \in Y$ için $f(y) \in Q$ olduğu kullanılırsa $Z = Y\beta = \bigcup_{y\in Y} y\beta = \bigcup_{y\in Y} f(y) \in Q$ dur. Böylece $V(D,\beta) \subseteq Q$ olur. O halde $V(D,\beta) = Q$ dur.

Diğer yandan $\emptyset \notin Q$ olduğundan β ikili bağıntısının $\beta = \bigcup_{T\in V(X^*,\beta)} \left(Y_T^\beta \times T\right)$ biçiminde quasinormal gösterimi vardır. β nın tanımından her $x \in X$ için $f(x) = x\beta$ dır. Buradan $V(X^*,\beta) = V(D,\beta) = Q$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece $\beta = \bigcup_{i=1}^{8} \left(Y_i^\beta \times T\right)$ biçimindedir.

$t \in \overline{T_1}$ ise $t\beta = f(t) = T_1$ olduğundan $t \in Y_1^\beta$ elde edilir. O halde $\overline{T_1} \subseteq Y_1^\beta$ dır.

$t \in \overline{T_2} = \overline{T_1} \cup \left((\overline{T_3} \cap \overline{T_4}) \setminus \overline{T_1}\right)$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2\}$ olduğundan $t \in Y_1^\beta \cup Y_2^\beta$ elde edilir. O halde $\overline{T_2} \subseteq Y_1^\beta \cup Y_2^\beta$ dır.

$t \in \overline{T_3} = \overline{T_1} \cup \left((\overline{T_3} \cap \overline{T_4}) \setminus \overline{T_1}\right) \cup (\overline{T_3} \setminus \overline{T_4})$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2, T_3\}$ olduğundan $t \in Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta$ elde edilir. O halde $\overline{T_3} \subseteq Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta$ dır.

$t \in \overline{T_4} = \overline{T_1} \cup \left((\overline{T_3} \cap \overline{T_4}) \setminus \overline{T_1}\right) \cup (\overline{T_4} \setminus \overline{T_3})$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2, T_4\}$ olduğundan $t \in Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_4^\beta$ elde edilir. O halde $\overline{T_4} \subseteq Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_4^\beta$ dır.

$t \in \overline{T_6} = \overline{T_3} \cup \overline{T_4} \cup \left((\overline{T_7} \cap \overline{T_6}) \setminus \overline{T_5}\right) \cup (\overline{T_6} \setminus \overline{T_7})$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ olduğundan $t \in Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta \cup Y_5^\beta \cup Y_6^\beta$ elde edilir. O halde $\overline{T_6} \subseteq Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta \cup Y_5^\beta \cup Y_6^\beta$ dır.

$t \in \overline{T_7} = \overline{T_3} \cup \overline{T_4} \cup \left((\overline{T_7} \cap \overline{T_6}) \setminus \overline{T_5}\right) \cup (\overline{T_7} \setminus \overline{T_6})$ ise $t\beta = f(t) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$ olduğundan $t \in Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta \cup Y_5^\beta \cup Y_7^\beta$ elde edilir. O halde $\overline{T_7} \subseteq Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta \cup Y_5^\beta \cup Y_7^\beta$ dır.

Ayrıca en az bir $t_2 \in \overline{T_2} \setminus \overline{T_1}$ için $f_2(t_2) = T_2$ olduğundan $Y_2^\beta \cap \overline{T_2} \neq \emptyset$ dir. Benzer olarak f_3, f_4, f_6, f_7 dönüşümlerinin özelliklerinden $Y_3^\alpha \cap \overline{T_3} \neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap \overline{T_4} \neq \emptyset, Y_6^\alpha \cap \overline{T_6} \neq \emptyset$ ve $Y_7^\alpha \cap \overline{T_7} \neq \emptyset$ olur.

Böylece $i = 1,2, \dots .8$ için $\varphi(T_i) = \overline{T_\iota}$ biçiminde tanımlı $\varphi: Q \to D' = \{\overline{T_1}, \overline{T_2}, \overline{T_3}, \overline{T_4}, \overline{T_5}, \overline{T_6}, \overline{T_7}, \overline{T_8}\}$ dönüşümü β için Teorem 3.3.3'deki koşulları sağlar. Üstelik her $T \in V(D,\beta)$ için $\varphi(T)\beta = \overline{T}\beta = T$ sağlandığından φ, tam β - izomorfizmasıdır. O halde $\beta \in R_\varphi(Q, D')$ dir.

Lemma 3.3.5 ve Lemma 3.3.6'dan görüldüğü üzere $R_\varphi(Q,D')$ ile ayrık dönüşümlerin sıralı sistemlerinin kümesi arasında birebir eşleme vardır.

Teorem 3.3.7 Q, XI – yarılatisi için $D' = \{\overline{T_1},\overline{T_2},\overline{T_3},\overline{T_4},\overline{T_5},\overline{T_6},\overline{T_7},\overline{T_8}\}$ ile Q arasında bir α – izomorfizması varsa ve $\Omega(Q) = m_0$ ise $B_X(Q)$ nun regüler elemanlarının sayısı

$$|R(D')| = m_0 \cdot 4 \cdot \left(2^{|(\overline{T_3}\cap\overline{T_4})\setminus\overline{T_2}|}\left(2^{|\overline{T_2}\setminus\overline{T_1}|}-1\right)\right)\cdot\left(3^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_3}|}-2^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_3}|}\right)\cdot$$
$$\left(3^{|\overline{T_3}\setminus\overline{T_4}|}-2^{|\overline{T_3}\setminus\overline{T_4}|}\right)\cdot 5^{|(\overline{T_7}\cap\overline{T_6})\setminus\overline{T_5}|}\cdot\left(6^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_6}|}-5^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_6}|}\right)\cdot\left(6^{|\overline{T_6}\setminus\overline{T_7}|}-5^{|\overline{T_6}\setminus\overline{T_7}|}\right)\cdot 8^{|X\setminus\overline{T_8}|}$$

olur.

İspat: Lemma 3.3.5 ve Lemma 3.3.6 göstermektedir ki, $\alpha \in B_X(D)$ regüler eleman, $V(D,\alpha) = Q$ ve $\varphi: Q \to D'$ bir tam α – izomorfizması olmak üzere, $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}, f_{8\alpha})$ biçimindeki farklı sıralı sistemlerin sayısı ile $R_\varphi(Q,D')$ kümesinin eleman sayısı birbirine eşittir. Tanım 2.2.13'den oluşturulabilecek $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}, f_{8\alpha}$ dönüşümlerinin sayısı sırasıyla

$$1, \left(2^{|(\overline{T_3}\cap\overline{T_4})\setminus\overline{T_2}|}\left(2^{|\overline{T_2}\setminus\overline{T_1}|}-1\right)\right), \left(3^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_3}|}-2^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_3}|}\right), \left(3^{|\overline{T_3}\setminus\overline{T_4}|}-2^{|\overline{T_3}\setminus\overline{T_4}|}\right),$$
$$5^{|(\overline{T_7}\cap\overline{T_6})\setminus\overline{T_5}|}, \left(6^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_6}|}-5^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_6}|}\right), \left(6^{|\overline{T_6}\setminus\overline{T_7}|}-5^{|\overline{T_6}\setminus\overline{T_7}|}\right), 8^{|X\setminus\overline{T_8}|}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\left|R_\varphi(Q,D')\right| = \left(2^{|(\overline{T_3}\cap\overline{T_4})\setminus\overline{T_2}|}\left(2^{|\overline{T_2}\setminus\overline{T_1}|}-1\right)\right)\cdot\left(3^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_3}|}-2^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_3}|}\right)\cdot$$
$$\left(3^{|\overline{T_3}\setminus\overline{T_4}|}-2^{|\overline{T_3}\setminus\overline{T_4}|}\right)\cdot 5^{|(\overline{T_7}\cap\overline{T_6})\setminus\overline{T_5}|}\cdot\left(6^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_6}|}-5^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_6}|}\right)\cdot\left(6^{|\overline{T_6}\setminus\overline{T_7}|}-5^{|\overline{T_6}\setminus\overline{T_7}|}\right)\cdot 8^{|X\setminus\overline{T_8}|}$$

olur. Ayrıca Q nun otomorfizmleri

$$id_Q = \begin{pmatrix} T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8 \\ T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8 \end{pmatrix},\ \gamma = \begin{pmatrix} T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8 \\ T_1T_2T_3T_4T_5T_7T_6T_8 \end{pmatrix}$$
$$\theta = \begin{pmatrix} T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8 \\ T_1T_2T_4T_3T_5T_6T_7T_8 \end{pmatrix},\ \tau = \begin{pmatrix} T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8 \\ T_1T_2T_4T_3T_5T_7T_6T_8 \end{pmatrix}$$

olup $q = 4$ tanedir. O halde Lemma 2.3.17 kullanılarak

$$|R(D')| = m_0 \cdot 4 \cdot \left(2^{|(\overline{T_3}\cap\overline{T_4})\setminus\overline{T_2}|}\left(2^{|\overline{T_2}\setminus\overline{T_1}|}-1\right)\right)\cdot\left(3^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_3}|}-2^{|\overline{T_4}\setminus\overline{T_3}|}\right)\cdot$$

$$\left(3^{|\overline{T_3}\setminus\overline{T_4}|}-2^{|\overline{T_3}\setminus\overline{T_4}|}\right)\cdot 5^{|(\overline{T_7}\cap\overline{T_6})\setminus\overline{T_5}|}\cdot\left(6^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_6}|}-5^{|\overline{T_7}\setminus\overline{T_6}|}\right)\cdot\left(6^{|\overline{T_6}\setminus\overline{T_7}|}-5^{|\overline{T_6}\setminus\overline{T_7}|}\right)\cdot 8^{|X\setminus\overline{T_8}|}$$

olduğu görülür.

Örnek 3.3.8 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve $D=\{T_1=\{1\},T_2=\{1,2\},T_3=\{1,2,3\},T_4=\{1,2,4\},T_5=\{1,2,3,4\},T_6=\{1,2,3,4,5\},T_7=\{1,2,3,4,6\},T_8=\{1,2,3,4,5,6\}\}$ olsun. D kümelerdeki birleşme işlemine kapalı olduğundan tam X - yarılatistir. Ayrıca Lemma 3.3.1'den tam XI – yarılatistir. $Q=D$ olarak alalım. O zaman $\Omega(Q)=1$ ve Qnun otomorfizmlerinin sayısı $q=4$ tür. Buradan Teorem 3.3.7 kullanılırsa $B_X(Q)$ nun regüler elemanlarının sayısı

$$|R(D')|=1\cdot 4\cdot\left(2^0(2^1-1)\right)\cdot(3^1-2^1)\cdot(3^1-2^1)\cdot 5^0\cdot(6^1-5^1)\cdot(6^1-5^1)\cdot 8^0=4$$

olarak bulunur.

Teorem 3.3.9 Q, XI – yarılatisi için $B_X(Q)$ nun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right|=\left(2^{|(T_3\cap T_4)\setminus T_2|}\left(2^{|T_2\setminus T_1|}-1\right)\right)\cdot\left(3^{|T_4\setminus T_3|}-2^{|T_4\setminus T_3|}\right)\cdot\left(3^{|T_3\setminus T_4|}-2^{|T_3\setminus T_4|}\right)\cdot 5^{|(T_7\cap T_6)\setminus T_5|}\cdot\left(6^{|T_7\setminus T_6|}-5^{|T_7\setminus T_6|}\right)\cdot\left(6^{|T_6\setminus T_7|}-5^{|T_6\setminus T_7|}\right)\cdot 8^{|X\setminus T_8|}$$

olur.

İspat: Lemma 2.3.14'den $E_X^{(r)}(Q)=R_{id_Q}(Q,Q)$ dur. Teorem 3.3.7'de $D'=Q$ alınırsa $\left|E_X^{(r)}(Q)\right|=\left|R_{id_Q}(Q,Q)\right|=\left|R_\varphi(Q,Q)\right|$ olduğu elde edilir.

Buradan Teorem 3.3.7 kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right|=\left(2^{|(T_3\cap T_4)\setminus T_2|}\left(2^{|T_2\setminus T_1|}-1\right)\right)\cdot\left(3^{|T_4\setminus T_3|}-2^{|T_4\setminus T_3|}\right)\cdot\left(3^{|T_3\setminus T_4|}-2^{|T_3\setminus T_4|}\right)\cdot 5^{|(T_7\cap T_6)\setminus T_5|}\cdot\left(6^{|T_7\setminus T_6|}-5^{|T_7\setminus T_6|}\right)\cdot\left(6^{|T_6\setminus T_7|}-5^{|T_6\setminus T_7|}\right)\cdot 8^{|X\setminus T_8|}$$

3.4. $B_X(D)$ Yarıgrubunun İdempotent ve Regüler Elemanları

Bu bölümde $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent ve regüler elemanlarının sayısı hesaplanacaktır.

3.4.1 D'nin Tam XI – yarılatisleri

Öncelikle D nin tam X – yarılatislerinden tam XI – yarılatis olanları bulalım. Şekil 3.2'de diyagramı 1-6 arasında olanlar Teorem 2.4.13'den ve 7-14 arasında olanların hepsi Teorem 2.4.18'den tam XI – yarılatistir. Ayrıca 15 ve 25 numaralı diyagrama sahip tam X – yarılatislerin, minimal elemanların kesişiminin boşküme olması şartıyla XI – yarılatis olduğu Teorem 2.4.23 ve Teorem 2.4.28'de gösterilmiştir. Şekil 3.2'de diyagramı 17-21 arasında olanlar, minimal elemanların kesişiminin boşküme olması şartıyla Teorem 2.4.33'den ve 22-24 arasında olanlar, minimal elemanların kesişiminin boşküme olması şartıyla Teorem 2.4.38'den dolayı tam XI – yarılatistir.

Görüldüğü gibi D nin tam X – yarılatislerinden bazılarının tam XI – yarılatis olmaları için minimal elemanların kesişiminin boşküme olması gerekmektedir. O halde XI – yarılatisleri belirlemek için aşağıdaki iki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.4.1.1 $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ olsun. O zaman D nin tam XI – yarılatisleri aşağıda verilenlerdir.

1)$\{\breve{D}\}, \{Z_1\}, \{Z_2\}, \{Z_3\}, \{Z_4\}, \{Z_5\}, \{Z_6\}, \{Z_7\}, \{Z_8\}$

2)$\{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_3\}, \{Z_5, Z_1\}, \{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, Z_3\}, \{Z_6, Z_1\},$
$\{Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_7, Z_3\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_5\}, \{Z_8, Z_1\}, \{Z_8, Z_2\},$
$\{Z_8, Z_3\}, \{Z_8, Z_5\}, \{Z_8, Z_6\}, \{Z_1, \breve{D}\}, \{Z_2, \breve{D}\}, \{Z_3, \breve{D}\}, \{Z_4, \breve{D}\}, \{Z_5, \breve{D}\}, \{Z_6, \breve{D}\},$
$\{Z_7, \breve{D}\}, \{Z_8, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_6\}, \{Z_6, Z_5\}, \{Z_8, Z_4\}$

3)$\{Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, Z_2\},$
$\{Z_7, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_3\}, \{Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_2\},$
$\{Z_8, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_5, Z_1\}, \{Z_8, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_2\},$
$\{Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_7, Z_6, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_1\},$
$\{Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, \breve{D}\},$
$\{Z_8, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5\}, \{Z_8, Z_6, Z_4\},$
$\{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, \breve{D}\},$
$\{Z_8, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_4, Z_2\}, \{Z_8, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5\}, \{Z_7, Z_6, Z_4\},$
$\{Z_6, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_3\}, \{Z_7, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_1\},$
$\{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3\}$

4)$\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_5, Z_3, Z_1\},$
$\{Z_8, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},$

$\{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_3, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_1\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_1\},$

$\{Z_8, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\},$

$\{Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\},$

$\{Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}$

5) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

$\{Z_8, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\},$

$\{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\},$

6) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

7) $\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

8) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\},$

$\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\},$

$\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}$

9) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

10) $\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

11) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

12) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

13) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$

14) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

15) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

16) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

İspat: Şekil 3.2'de diyagramı 1-6 arasında olanlar Teorem 2.4.13'den ve 7-14 arasında olanların hepsi Teorem 2.4.18'den dolayı koşul gerekmeksizin tam XI – yarılatistir. Ayrıca 15 numaralı diyagrama sahip olanların XI – yarılatis olduğu Teorem 2.4.23'de verilmiştir. 16 numaralı diyagrama sahip olanların XI – yarılatis olduğu Lemma 3.3.1'de gösterilmiştir.

D nin $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ koşulu altındaki bütün XI – yarılatislerinin kümesi $\sum'_{XI}(D)$ olsun. Not 2.3.13'de belirtilen, $\sum'_{XI}(D)$ üzerindeki ϑ_{XI} denklik bağıntısının denklik sınıflarının temsilcilerinden oluşan $\sum_{XI}(D)$ kümesini alalım. Lemma 3.4.1.1'den yararlanarak bu kümenin elemanlarını

$Q_1 = \{T\}, T \in D$

$Q_2 = \{T, T'\}, T, T' \in D\ ve\ T \subset T'$

$Q_3 = \{T, T', T''\}, T, T', T'' \in D\ ve\ T \subset T' \subset T''$

$Q_4 = \{Z, Z', T, T'\}, Z, Z', T, T' \in D\ ve\ Z \subset Z' \subset T \subset T'$

$Q_5 = \{Z, Z', T, T', T''\}, Z, Z', T, T', T'' \in D\ ve\ Z \subset Z' \subset T \subset T' \subset T''$

$Q_6 = \{Z, Z', T, T', T'', \breve{D}\}, Z, Z', T, T', T'' \in D \; ve \; Z \subset Z' \subset T \subset T' \subset T'' \subset \breve{D}$

$Q_7 = \{Z, T, T', T \cup T'\}, Z, T, T' \in D, ve \; Z \subset T, Z \subset T', T \backslash T' \neq \emptyset, T' \backslash T \neq \emptyset$

$Q_8 = \{Z, T, T', T \cup T', Z'\}, Z, Z', T, T' \in D$

$ve \; Z \subset T, Z \subset T', T \backslash T' \neq \emptyset, T' \backslash T \neq \emptyset, T \cup T' \subset Z'$

$Q_9 = \{Z, T, T', T \cup T', Z', \breve{D}\}, Z, Z', T, T' \in D$

$ve \; Z \subset T, Z \subset T', T \backslash T' \neq \emptyset, T' \backslash T \neq \emptyset, T \cup T' \subset Z' \subset \breve{D}$

$Q_{10} = \{Z, Z'T, T', T \cup T'\}, Z, Z', T, T' \in D$

$ve \; Z \subset Z' \subset T, Z \subset Z' \subset T', T \backslash T' \neq \emptyset, T' \backslash T \neq \emptyset$

$Q_{11} = \{Z, T, T', Z_2, Z_1, \breve{D}\}, Z, Z', T \in D$

$ve \; Z \subset T \subset T' \subset Z_2 \subset \breve{D}, Z \subset T \subset T' \subset Z_2 \subset \breve{D}$

$Q_{12} = \{Z, T, T', Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, Z, Z', T \in D$

$ve \; Z \subset T, Z \subset T', T \backslash T' \neq \emptyset, T' \backslash T \neq \emptyset, T \cup T' = Z_3$

$Q_{13} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T\}, Z \in \{Z_7, Z_8\} \; ve \; T \in \{\breve{D}, Z_2, Z_1\}$

$Q_{14} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T, \breve{D}\}, Z \in \{Z_7, Z_8\} \; ve \; T \in \{Z_2, Z_1\}$

$Q_{15} = \{Z, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, Z \in \{Z_6, Z_7, Z_8\}$

$Q_{16} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, Z \in \{Z_7, Z_8\}$

olarak bulunur. Böylece $i = 1,2, \ldots .16$ olmak üzere her bir Q_i için, Not 2.3.13'de verilen ve Q_i ile tam izomorf olan elemanların kümesi $Q_i \vartheta_{XI}$ Lemma 3.4.1.1'in $i.$ maddesindeki kümelerin oluşturduğu aileye eşittir.

Lemma 3.4.1.2 $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ olsun. O zaman D nin tam XI – yarılatisleri aşağıda verilenlerdir.

1)$\{\breve{D}\}, \{Z_1\}, \{Z_2\}, \{Z_3\}, \{Z_4\}, \{Z_5\}, \{Z_6\}, \{Z_7\}, \{Z_8\}$

2)$\{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_3\}, \{Z_5, Z_1\}, \{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, Z_3\}, \{Z_6, Z_1\},$
$\{Z_6, Z_2\}, \{Z_6, Z_3\}, \{Z_7, Z_1\}, \{Z_7, Z_2\}, \{Z_7, Z_3\}, \{Z_7, Z_4\}, \{Z_7, Z_5\}, \{Z_8, Z_1\}, \{Z_8, Z_2\},$
$\{Z_8, Z_3\}, \{Z_8, Z_5\}, \{Z_8, Z_6\}, \{Z_1, \breve{D}\}, \{Z_2, \breve{D}\}, \{Z_3, \breve{D}\}, \{Z_4, \breve{D}\}, \{Z_5, \breve{D}\}, \{Z_6, \breve{D}\},$
$\{Z_7, \breve{D}\}, \{Z_8, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4\}, \{Z_7, Z_6\}, \{Z_6, Z_5\}, \{Z_8, Z_4\}$

3)$\{Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_3, Z_2\},$
$\{Z_7, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_4, Z_3\}, \{Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_2\},$
$\{Z_8, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_5, Z_1\}, \{Z_8, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_2\},$
$\{Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_1, \breve{D}\},$
$\{Z_7, Z_6, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_1\},$

$\{Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5\}, \{Z_8, Z_6, Z_4\},$

$\{Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_4, Z_2\}, \{Z_8, Z_4, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5\}, \{Z_7, Z_6, Z_4\},$

$\{Z_6, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_3\}, \{Z_7, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_1\},$

$\{Z_7, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3\}$

4) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_5, Z_3, Z_1\},$

$\{Z_8, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},$

$\{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_3, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_1\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_1\},$

$\{Z_8, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_5, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\},$

$\{Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\},$

$\{Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\},$

$\{Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}$

5) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

$\{Z_8, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$

$\{Z_8, Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

$\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$

$\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\}$

$\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\}$

$\{Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

6) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},$

$\left\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},$

$\left\{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}$

7) $\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}, \left\{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},$

$\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3\}, \left\{Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_7, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$

8) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\},$

$\left\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\right\}\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\},$

$\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}$

9) $\left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\},$

$\left\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}$

10) $\left\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},$

$\left\{Z_8, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_7, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},$

$\left\{Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}, \left\{Z_7, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},$

$\left\{Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$

11) $\left\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},$

$\left\{Z_8, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$

$\left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$

$\left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$

12) $\left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},$

$\left\{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$

13) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \left\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\right\},$

$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\right\}$

14) $\left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},$

$\left\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}$

15) $\left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$

16) $\left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$

17) $\{Z_8, Z_7, Z_6\}$

18) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_1\}, \left\{Z_8, Z_7, Z_6, \breve{D}\right\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_2\}$

19)$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_1\}, \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, \breve{D}\right\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_1\}, \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, \breve{D}\right\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_2, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_1, \breve{D}\}$

20) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\}\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, \breve{D}\}$

21) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\},$

$\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$

22) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}$

23) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$

24) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$

25) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

26) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

27) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

İspat: Şekil 3.2'de diyagramı 1-16 arasında olan tam X – yarılatislerin hepsi Lemma 3.4.1.1'den dolayı tam XI – yarılatistir. Ayrıca diyagramı 17-21 arasında olanların Teorem 2.4.33'de, 22-24 arasında olanların Teorem 2.4.38'de ve 25 numaralı diyagrama sahip olanların $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ koşulu altında tam XI – yarılatis olduğu Teorem 2.4.28'de gösterilmiştir. 26 ve 27 numaralı diyagrama sahip olan tam X – yarılatislerin olanların $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ koşulu altında tam XI – yarılatis olduğu Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.1.2'den görülmektedir.

Lemma 3.4.1.2'nin 1-16 numaralı maddeleri, Lemma 3.4.1.1'in maddeleriyle aynı olduğundan $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ koşulu altında $\sum_{XI}(D)$ kümesini bulmak için 17-27 numaralı kümeler için bakmak yeterlidir. Böylece

$Q_{17} = \{Z_8, Z_7, Z_6\}$

$Q_{18} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T\},\ T \in \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

$Q_{19} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, T'\},\ T \in \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\}, T' \in \{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, Z_6 \subset T \subset T'$

$Q_{20} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z, T, T'\},\ Z, T, T' \in D\ ve\ Z_6 \subset Z \subset T \subset T'$

$Q_{21} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_3, T', \breve{D}\},\ T \in \{Z_5, Z_4\},\ T' \in \{Z_2, Z_1\}$

$Q_{22} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, T', T \cup T'\},\ T \in \{Z_5, Z_2\},\ T' \in \{Z_4, Z_1\}$

$$ve \;\; T\backslash T' \neq \emptyset, T'\backslash T \neq \emptyset$$
$$Q_{23} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T\},\; T \in \{\breve{D}, Z_2, Z_1\}$$
$$Q_{24} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T, \breve{D}\},\; T \in \{Z_2, Z_1\}$$
$$Q_{25} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\; T \in \{Z_5, Z_4, Z_3\}$$
$$Q_{26} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\; T \in \{Z_5, Z_4\}$$
$$Q_{27} = D$$

olarak bulunur. Böylece $i = 1,2, \dots .27$ olmak üzere her bir Q_i için, Not 2.3.13'de verilen ve Q_i ile tam izomorf olan elemanların kümesi $Q_i\vartheta_{XI}$ Lemma 3.4.1.2'nin $i.$ maddesindeki kümelerin oluşturduğu aileye eşittir.

3.4.2. $B_X(D)$ Yarıgrubunun İdempotent Elemanları

$i = 1,2, \dots .27$ olmak üzere Q_i ile tam izomorf olan elemanların kümesi $Q_i\vartheta_{XI}$ kümesini alalım. Not 2.3.13'den dolayı, bir $D' \in Q_i\vartheta_{XI}$ ile tanımlanan $B_X(D')$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi $\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')$ olmak üzere, $B_X(Q_i)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının kümesi

$$I^*(Q_i) = \bigcup\nolimits_{D' \in Q_i\vartheta_{XI}} \mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')$$

biçimindedir. Buradan $B_X(Q_i)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısı

$$|I^*(Q_i)| = \sum\nolimits_{D' \in Q_i\vartheta_{XI}} \left|\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')\right|$$

şeklinde bulunur.

3.4.2.1. $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ Koşulu Altında İdempotent Elemanlar

Bu bölümde $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$ birleşimlerin tam X – yarılatisi ile belirlenen $B_X(D)$ yarıgrubunun $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ koşulu altında idempotent elemanlarının özellikleri ve sayısı bulunacaktır.

Öncelikle bir $\alpha \in B_X(D)$ elemanının idempotent olması için gereken koşulları belirleyelim.

Teorem 3.4.2.1.1 $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\} \in \sum_3 (X, 9)$ ve $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ elemanının idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şıklardan birinin koşullarını sağlamasıdır.

1) $Q_1 = \{T\}$ ve $\alpha = (X \times T)$ biçimindedir.

2) $Q_2 = \{T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ olmak üzere $T \subseteq Y_T^\alpha$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

3) $Q_3 = \{T, T', T''\}$ ve $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ olmak üzere $T \subseteq Y_T^\alpha$, $T' \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

4) $Q_4 = \{Z, Z', T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ olmak üzere $Z \subseteq Y_Z^\alpha$, $Z' \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha$, $T \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

5) $Q_5 = \{Z, Z', T, T', T''\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olmak üzere $Z \subseteq Y_Z^\alpha$, $Z' \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha$, $T \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $T' \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, koşulları sağlanır.

6) $Q_6 = \{Z, Z', T, T', T'', \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ olmak üzere $Z \subseteq Y_Z^\alpha$, $Z' \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha$, $T \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $T' \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

7) $Q_7 = \{Z, T, T', T \cup T'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times T \cup T')$ olmak üzere $T \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $T' \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

8) $Q_8 = \{Z, T, T', T \cup T', Z'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times T \cup T') \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ olmak üzere $T \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $T' \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $T \cup T' \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

9) $Q_9 = \{Z, T, T', T \cup T', Z', \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times T \cup T') \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ olmak üzere $T \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $T' \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $T \cup T' \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

10) $Q_{10}=\{Z,Z'T,T',T\cup T'\}$ ve $\alpha=(Y_Z^\alpha\times Z)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times T\cup T'\right)$ olmak üzere $Z\subseteq Y_Z^\alpha$, $Z'\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha$, $T\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_{Z'}^\alpha\cap Z'\neq\emptyset$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\emptyset$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\emptyset$ koşulları sağlanır.

11) $Q_{11}=\{Z,T,T',Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ ve $\alpha=(Y_Z^\alpha\times Z)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup(Y_2^\alpha\times Z_2)\cup(Y_1^\alpha\times Z_1)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ olmak üzere $Z\subseteq Y_Z^\alpha$, $T\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha$, $T'\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha$, $Z_2\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_2^\alpha$, $Z_1\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_1^\alpha$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\emptyset$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\emptyset$, $Y_2^\alpha\cap Z_2\neq\emptyset$, $Y_1^\alpha\cap Z_1\neq\emptyset$ koşulları sağlanır.

12) $Q_{12}=\{Z,T,T',Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ ve $\alpha=(Y_Z^\alpha\times Z)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup(Y_3^\alpha\times Z_3)\cup(Y_2^\alpha\times Z_2)\cup(Y_1^\alpha\times Z_1)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ olmak üzere $Z\subseteq Y_Z^\alpha$, $T\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha$, $T'\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha$, $Z_3\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha$, $Z_2\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha$, $Z_1\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_1^\alpha$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\emptyset$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\emptyset$, $Y_3^\alpha\cap Z_3\neq\emptyset$, $Y_2^\alpha\cap Z_2\neq\emptyset$, $Y_1^\alpha\cap Z_1\neq\emptyset$ koşulları sağlanır.

13) $Q_{13}=\{Z,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,T\}$ ve $\alpha=(Y_Z^\alpha\times Z)\cup(Y_6^\alpha\times Z_6)\cup(Y_5^\alpha\times Z_5)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup(Y_3^\alpha\times Z_3)\cup(Y_T^\alpha\times T)$ olmak üzere $Z\subseteq Y_Z^\alpha$, $Z_6\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha$, $Z_5\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha$, $Z_4\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha$, $Z_3\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha$, $Y_6^\alpha\cap Z_6\neq\emptyset$, $Y_5^\alpha\cap Z_5\neq\emptyset$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\emptyset$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\emptyset$ koşulları sağlanır.

14) $Q_{14}=\{Z,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,T,\breve{D}\}$ ve $\alpha=(Y_Z^\alpha\times Z)\cup(Y_6^\alpha\times Z_6)\cup(Y_5^\alpha\times Z_5)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup(Y_3^\alpha\times Z_3)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ olmak üzere $Z\subseteq Y_Z^\alpha$, $Z_6\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha$, $Z_5\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha$, $Z_4\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha$, $Z_3\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha$, $T\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_T^\alpha$, $Y_6^\alpha\cap Z_6\neq\emptyset$, $Y_5^\alpha\cap Z_5\neq\emptyset$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\emptyset$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\emptyset$, $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\emptyset$ koşulları sağlanır.

15) $Q_{15}=\{Z,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ ve $\alpha=(Y_Z^\alpha\times Z)\cup(Y_5^\alpha\times Z_5)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup(Y_3^\alpha\times Z_3)\cup(Y_2^\alpha\times Z_2)\cup(Y_1^\alpha\times Z_1)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ olmak üzere $Z\subseteq Y_Z^\alpha$, $Z_5\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_5^\alpha$, $Z_4\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_4^\alpha$, $Z_2\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha$, $Z_1\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_1^\alpha$, $Y_5^\alpha\cap Z_5\neq\emptyset$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\emptyset$, $Y_2^\alpha\cap Z_2\neq\emptyset$, $Y_1^\alpha\cap Z_1\neq\emptyset$ koşulları sağlanır.

16) $Q_{16}=\{Z,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ ve $\alpha=(Y_Z^\alpha\times Z)\cup(Y_6^\alpha\times Z_6)\cup(Y_5^\alpha\times Z_5)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup(Y_3^\alpha\times Z_3)\cup(Y_2^\alpha\times Z_2)\cup(Y_1^\alpha\times Z_1)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ olmak üzere $Z\subseteq Y_Z^\alpha$, $Z_6\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha$, $Z_5\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha$, $Z_4\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha$,$Z_2\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha$, $Z_1\subseteq Y_Z^\alpha\cup Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_1^\alpha$, $Y_6^\alpha\cap Z_6\neq\emptyset$, $Y_5^\alpha\cap Z_5\neq\emptyset$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\emptyset$, $Y_2^\alpha\cap Z_2\neq\emptyset$, $Y_1^\alpha\cap Z_1\neq\emptyset$ koşulları sağlanır.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ idempotent eleman olsun. Bir $f: X \to D$ dönüşümü için $\alpha = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times f(x))$ biçiminde olduğunu düşünülürse her $x \in X$ için $f(x) \in D$ dir. Buradan D nin bir D' alt yarılatisi için $\alpha = \bigcup_{T \in D'}(Y_T^\alpha \times T)$ biçiminde quasinormal gösterime sahiptir. Üstelik $V(D,\alpha) = D' = V(D',\alpha)$ dır. Teorem 2.3.11'den $V(D,\alpha)$ nın XI - alt yarılatis olduğu kullanılırsa D' , XI - alt yarılatistir. O halde D' Lemma 3.4.1.1'de verilen Q_i leri taramak üzere $\alpha = \bigcup_{T \in D'}(Y_T^\alpha \times T)$ biçiminde yazılabilir.

$Q_1 = \{T\}$ ve $\alpha = (X \times T)$ olsun. O zaman $\alpha = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times f(x))$ biçiminde olduğunu düşünülürse her $x \in X$ için $f(x) \in Q_1$ olduğundan $f: X \to Q_1 \subset D$ biçiminde tek bir f dönüşümü vardır. Yani $B_X(Q_1)$ tek elemanlı bir kümedir. $B_X(Q_1)$ işleme kapalı olduğundan α idempotent elemandır. Üstelik $B_X(Q_1) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_2 = \{T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_2)$ dir. Üstelik Q_2, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_2 = V(Q_2,\alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.15'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 2. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.15'den $\alpha \in B_X(Q_2)$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_2) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_3 = \{T, T', T''\}$ ve $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_3)$ dir. Üstelik Q_3, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_3 = V(Q_3,\alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.15'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 3. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.15'den $\alpha \in B_X(Q_3)$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_3) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_4 = \{Z, Z', T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_4)$ dir. Üstelik Q_4, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_4 = V(Q_4,\alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.15'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 4. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.15'den $\alpha \in B_X(Q_4)$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_4) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_5 = \{Z, Z', T, T', T''\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_5)$ dir. Üstelik Q_5, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_5 = V(Q_5,\alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.15'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 5. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.15'den $\alpha \in B_X(Q_5)$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_5) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_6 = \{Z, Z', T, T', T'', \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_6)$ dir. Üstelik Q_6, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_6 = V(Q_6, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.15'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 6. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.15'den $\alpha \in B_X(Q_6)$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_6) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_7 = \{Z, T, T', T \cup T'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times T \cup T')$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_7)$ dir. Üstelik Q_7, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_7 = V(Q_7, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.20'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 7. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.20'den $\alpha \in B_X(Q_7)$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_7) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_8 = \{Z, T, T', T \cup T', Z'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times T \cup T') \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_8)$ dir. Üstelik Q_8, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_8 = V(Q_8, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.20'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 8. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.20'den $\alpha \in B_X(Q_8)$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_8) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_9 = \{Z, T, T', T \cup T', Z', \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times T \cup T') \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_9)$ dir. Üstelik Q_9, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_9 = V(Q_9, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.20'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 9. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.20'den $\alpha \in B_X(Q_9)$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_9) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{10} = \{Z, Z'T, T', T \cup T'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times T \cup T')$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{10})$ dir. Üstelik Q_{10}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{10} = V(Q_{10}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.20'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 10. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.20'den $\alpha \in B_X(Q_{10})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{10}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{11} = \{Z, T, T', Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{11})$ dir. Üstelik Q_{11}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{11} = V(Q_{11}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.20'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 11. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.20'den $\alpha \in B_X(Q_{11})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{11}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{12} = \{Z, T, T', Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{12})$ dir. Üstelik Q_{12}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{12} = V(Q_{12}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.20'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 12. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.20'den $\alpha \in B_X(Q_{12})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{12}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{13} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{13})$ dir. Üstelik Q_{13}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{13} = V(Q_{13}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.20'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 13. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.20'den $\alpha \in B_X(Q_{13})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{13}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{14} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{14})$ dir. Üstelik Q_{14}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{14} = V(Q_{14}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.20'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 14. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.20'den $\alpha \in B_X(Q_{14})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{14}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{15} = \{Z, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{15})$ dir. Üstelik Q_{15}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{15} = V(Q_{15}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.25'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 15. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.25'den $\alpha \in B_X(Q_{15})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{15}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{16} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in$

$B_X(Q_{16})$ dir. Üstelik Q_{11}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{16} = V(Q_{16},\alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 3.3.4'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 16. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 3.3.4'den $\alpha \in B_X(Q_{16})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{16}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

Lemma 3.4.2.1.2 X sonlu bir küme, $D \in \sum_3(X,9)$ ve $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ olmak üzere $B_X(Q_{16})$ yarıgrubunun idempotent elemanların sayısı

$$\begin{aligned} I^*(Q_{16}) = \; & \left(2^{|(Z_5\cap Z_4)\setminus Z_6|}\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\right)\cdot\left(3^{|Z_5\setminus Z_4|}-2^{|Z_5\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_5|}-2^{|Z_4\setminus Z_5|}\right)\cdot \\ & 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 8^{|X\setminus \breve{D}|}\cdot \\ & \left(2^{|(Z_5\cap Z_4)\setminus Z_6|}\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\right)\cdot\left(3^{|Z_5\setminus Z_4|}-2^{|Z_5\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_5|}-2^{|Z_4\setminus Z_5|}\right)\cdot \\ & 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 8^{|X\setminus \breve{D}|} \end{aligned}$$

formülüyle hesaplanır.

İspat: $Z \in \{Z_7, Z_8\}$ olmak üzere $Q_{16} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ XI – altyarılatisi ile belirlenen $B_X(Q_{16})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı Teorem 3.3.9'dan

$$\begin{aligned} \left|E_X^{(r)}(Q_{16})\right| = & \left(2^{|(Z_4\cap Z_5)\setminus Z_6|}\left(2^{|Z_6\setminus Z|}-1\right)\right)\cdot\left(3^{|Z_5\setminus Z_4|}-2^{|Z_5\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_5|}-2^{|Z_4\setminus Z_5|}\right)\cdot \\ & 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 8^{|X\setminus \breve{D}|} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $Q_{16}\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\right\}$ ve $|I^*(Q_{16})| = \sum_{D' \in Q_{16}\vartheta_{XI}} \left|\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')\right|$ olmasından yararlanılarak

$$\begin{aligned} I^*(Q_{16}) = \; & \left(2^{|(Z_5\cap Z_4)\setminus Z_6|}\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\right)\cdot\left(3^{|Z_5\setminus Z_4|}-2^{|Z_5\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_5|}-2^{|Z_4\setminus Z_5|}\right)\cdot \\ & 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 8^{|X\setminus \breve{D}|}\cdot \\ & \left(2^{|(Z_5\cap Z_4)\setminus Z_6|}\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\right)\cdot\left(3^{|Z_5\setminus Z_4|}-2^{|Z_5\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_5|}-2^{|Z_4\setminus Z_5|}\right)\cdot \\ & 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 8^{|X\setminus \breve{D}|} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Şimdi $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ koşulu altında $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısını hesaplayalım.

Teorem 3.4.2.1.3 X sonlu bir küme olmak üzere $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ koşulu altında $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısı

$$|I_D| = \sum_{i=1}^{16} |I^*(Q_i)|$$

olur.

İspat: Öncelikle $i = 1,2,\dots,16$ olmak üzere $B_X(Q_i)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısını yazalım. Sonuç 2.4.17, Sonuç 1.4.22 ve Sonuç 2.4.27 den

$$\left|E_X^{(r)}(Q_1)\right| = 1$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_2)\right| = \left(2^{|T'\setminus T|} - 1\right) \cdot 2^{|X\setminus T'|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_3)\right| = \left(2^{|T'\setminus T|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T''\setminus T'|} - 2^{|T''\setminus T'|}\right) \cdot 2^{|X\setminus T''|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_4)\right| = \left(2^{|Z'\setminus Z|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T\setminus Z'|} - 2^{|T\setminus Z'|}\right) \cdot \left(4^{|T'\setminus T|} - 3^{|T'\setminus T|}\right) \cdot 4^{|X\setminus T'|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_5)\right| = \left(2^{|Z'\setminus Z|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T\setminus Z'|} - 2^{|T\setminus Z'|}\right) \cdot \left(4^{|T'\setminus T|} - 3^{|T'\setminus T|}\right) \cdot$$
$$\left(5^{|\breve{D}\setminus T'|} - 4^{|\breve{D}\setminus T'|}\right) \cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_6)\right| = \left(2^{|Z'\setminus Z|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T\setminus Z'|} - 2^{|T\setminus Z'|}\right) \cdot \left(4^{|T'\setminus T|} - 3^{|T'\setminus T|}\right) \cdot$$
$$\left(5^{|T''\setminus T'|} - 4^{|T''\setminus T'|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D}\setminus T'|} - 4^{|\breve{D}\setminus T'|}\right) \cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_7)\right| = \left(2^{|T'\setminus T|} - 1\right) \cdot \left(2^{|T\setminus T'|} - 1\right) \cdot 4^{|X\setminus T\cup T'|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_8)\right| = \left(2^{|T'\setminus T|} - 1\right) \cdot \left(2^{|T\setminus T'|} - 1\right) \cdot \left(5^{|Z'\setminus T\cup T'|} - 4^{|Z'\setminus T\cup T'|}\right) \cdot 5^{|X\setminus Z'|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_9)\right| = \left(2^{|T'\setminus T|} - 1\right) \cdot \left(2^{|T\setminus T'|} - 1\right) \cdot \left(5^{|Z'\setminus T\cup T'|} - 4^{|Z'\setminus T\cup T'|}\right) \cdot$$
$$\left(6^{|\breve{D}\setminus Z'|} - 5^{|\breve{D}\setminus Z'|}\right) \cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{10})\right| = \left(2^{|Z'\setminus Z|} - 1\right) \cdot 2^{|T\cap T'\setminus Z'|} \cdot \left(3^{|T'\setminus T|} - 2^{|T'\setminus T|}\right) \cdot \left(3^{|T\setminus T'|} - 2^{|T\setminus T'|}\right) \cdot$$
$$5^{|X\setminus T\cup T'|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{11})\right| = \left(2^{|T\setminus Z|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T'\setminus T|} - 2^{|T'\setminus T|}\right) \cdot 3^{|Z_2\cap Z_1\setminus T'|} \cdot \left(4^{|Z_1\setminus Z_2|} - 3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right) \cdot$$
$$\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|} - 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{12})\right| = \left(2^{|T\setminus Z|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T'\setminus T|} - 2^{|T'\setminus T|}\right) \cdot \left(4^{|Z_3\setminus T'|} - 3^{|Z_3\setminus T'|}\right) \cdot 4^{|Z_2\cap Z_1\setminus Z_3|} \cdot$$
$$\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|} - 4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right) \cdot \left(5^{|Z_2\setminus Z_1|} - 4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right) \cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{13})\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z|} - 1\right) \cdot 2^{|Z_5\cap Z_4\setminus Z_6|} \cdot \left(3^{|Z_5\setminus Z_4|} - 2^{|Z_5\setminus Z_4|}\right) \cdot$$

$\left(3^{|Z_4\setminus Z_5|}-2^{|Z_4\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(6^{|T\setminus Z_3|}-5^{|T\setminus Z_3|}\right)\cdot\ 6^{|X\setminus T|}$

$\left|E_X^{(r)}(Q_{14})\right|=\left(2^{|Z_6\setminus Z|}-1\right)\cdot 2^{|Z_5\cap Z_4\setminus Z_6|}\cdot\left(3^{|Z_5\setminus Z_4|}-2^{|Z_5\setminus Z_4|}\right)\cdot$

$\left(3^{|Z_4\setminus Z_5|}-2^{|Z_4\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(6^{|T\setminus Z_3|}-5^{|T\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus T|}-6^{|\breve{D}\setminus T|}\right)\cdot\ 7^{|X\setminus T|}$

$\left|E_X^{(r)}(Q_{15})\right|=\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|Z_2\cap Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|}-4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot$

$\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|}-4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\ 7^{|X\setminus\breve{D}|}$

dır. Buradan $|I^*(Q_i)|=\sum_{D'\in Q_i\vartheta_{XI}}\left|\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')\right|$ eşitliğinden yararlanılarak $i=1,2,\ldots,15$ için idempotent elemanların sayısı bulunur. Teorem 3.4.2.1.2'de $I^*(Q_{16})$ kümesinin eleman sayısı hesaplanmıştır. O halde Teorem 2.3.10'dan $|I_D|=\sum_{i=1}^{16}|I^*(Q_i)|$ olur.

3.4.2.2. $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ Koşulu Altında İdempotent Elemanlar

Bu bölümde $D=\{\breve{D},Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5,Z_6,Z_7,Z_8\}$ birleşimlerin tam X – yarılatisi ile belirlenen $B_X(D)$ yarıgrubunun $Z_8\cap Z_7=\emptyset$ koşulu altında idempotent elemanlarının özellikleri ve sayısı bulunacaktır.

Lemma 3.4.1.1'de açıklandığı gibi, D nin 1-16 numaralı diyagrama sahip tam X - altyarılatisleri hiçbir koşula bağlı olmaksızın XI – altyarılatislerdir. Dolayısıyla $Z_8\cap Z_7=\emptyset$ koşulu altındaki idempotent elemanların sayısını bulmak için $Z_8\cap Z_7\neq\emptyset$ koşulu altında XI olan alt yarılatislere ek olarak 17-27 numaralı diyagrama sahip tam X – altyarılatislerin incelenmesi yeterlidir.

Şimdi bir $\alpha\in B_X(D)$ elemanının idempotent olması için gereken koşulları belirleyelim.

Teorem 3.4.2.2.1 $D=\{\breve{D},Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5,Z_6,Z_7,Z_8\}\in\sum_3(X,9)$ ve $Z_8\cap Z_7=\emptyset$ olsun. $\alpha\in B_X(D)$ elemanının idempotent olması için gerek ve yeter koşul Teorem 3.4.2.1.1'in 1-16 şıklarından birinin veya aşağıdaki şıklardan birinin koşullarını sağlamasıdır.

17) $Q_{17}=\{Z_8,Z_7,Z_6\}$ ve $\alpha=(Y_8^\alpha\times Z_8)\cup(Y_7^\alpha\times Z_7)\cup(Y_6^\alpha\times Z_6)$ olmak üzere $Z_8\subseteq Y_8^\alpha$, $Z_7\subseteq Y_7^\alpha$ koşulları sağlanır.

18) $Q_{18}=\{Z_8,Z_7,Z_6,T\}$ ve $\alpha=(Y_8^\alpha\times Z_8)\cup(Y_7^\alpha\times Z_7)\cup(Y_6^\alpha\times Z_6)\cup(Y_T^\alpha\times T)$ olmak üzere $Z_8\subseteq Y_8^\alpha$, $Z_7\subseteq Y_7^\alpha$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\emptyset$ koşulları sağlanır.

19) $Q_{19} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ olmak üzere $Z_8 \subseteq Y_8^\alpha$, $Z_7 \subseteq Y_7^\alpha$, $T \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

20) $Q_{20} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z, T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ olmak üzere $Z_8 \subseteq Y_8^\alpha$, $Z_7 \subseteq Y_7^\alpha$, $Z \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha$, $T \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

21) $Q_{21} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_3, T', \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olmak üzere $Z_8 \subseteq Y_8^\alpha$, $Z_7 \subseteq Y_7^\alpha$, $T \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $Z_3 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha$, $T' \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

22) $Q_{22} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, T', T \cup T'\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times T \cup T'\right)$ olmak üzere $Z_8 \subseteq Y_8^\alpha$, $Z_7 \subseteq Y_7^\alpha$, $T \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $T' \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, koşulları sağlanır.

23) $Q_{23} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T)$ olmak üzere $Z_8 \subseteq Y_8^\alpha$, $Z_7 \subseteq Y_7^\alpha$, $Z_5 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha$, $Z_4 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

24) $Q_{24} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T, \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olmak üzere $Z_8 \subseteq Y_8^\alpha$, $Z_7 \subseteq Y_7^\alpha$, $Z_5 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha$, $Z_4 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha$, $T \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

25) $Q_{25} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olmak üzere $Z_8 \subseteq Y_8^\alpha$, $Z_7 \subseteq Y_7^\alpha$, $T \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $Z_2 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_2^\alpha$, $Z_1 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_1^\alpha$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, koşulları sağlanır.

26) $Q_{26} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olmak üzere $Z_8 \subseteq Y_8^\alpha$, $Z_7 \subseteq Y_7^\alpha$, $T \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $Z_3 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha$, $Z_2 \subseteq$

$Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha$, $Z_1 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

27) $Q_{27} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olmak üzere $Z_8 \subseteq Y_8^\alpha$, $Z_7 \subseteq Y_7^\alpha$, $Z_5 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha$, $Z_4 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha$, $Z_2 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha$, $Z_1 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ idempotent eleman olsun. Bir $f: X \to D$ dönüşümü için $\alpha = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times f(x))$ biçiminde olduğunu düşünülürse her $x \in X$ için $f(x) \in D$ dir. Buradan D nin bir D' alt yarılatisi için $\alpha = \bigcup_{T \in D'}(Y_T^\alpha \times T)$ biçiminde quasinormal gösterime sahiptir. Üstelik $V(D, \alpha) = D' = V(D', \alpha)$ dır. Teorem 2.3.11'den $V(D, \alpha)$ nın XI - alt yarılatis olduğu kullanılırsa D' , XI - alt yarılatistir. O halde D' Lemma 3.4.1.2'de verilen Q_i leri taramak üzere $\alpha = \bigcup_{T \in D'}(Y_T^\alpha \times T)$ biçiminde yazılabilir.

$Q_{17} = \{Z_8, Z_7, Z_6\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{17})$ dir. Üstelik Q_{17}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{17} = V(Q_{17}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.35'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 17. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.35'den $\alpha \in B_X(Q_{17})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{17}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{18} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{18})$ dir. Üstelik Q_{18}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{18} = V(Q_{18}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.35'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 18. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.35'den $\alpha \in B_X(Q_{18})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{18}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{19} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{19})$ dir. Üstelik Q_{19}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{19} = V(Q_{19}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.35'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 19. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.35'den $\alpha \in B_X(Q_{19})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{19}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{20} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z, T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{20})$ dir. Üstelik Q_{20}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{20} = V(Q_{20}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.35'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 20. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.35'den $\alpha \in B_X(Q_{20})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{20}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{21} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_3, T', \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{21})$ dir. Üstelik Q_{21}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{21} = V(Q_{21}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.35'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 21. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.35'den $\alpha \in B_X(Q_{21})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{21}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{22} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, T', T \cup T'\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times T \cup T')$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{22})$ dir. Üstelik Q_{22}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{22} = V(Q_{22}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.40'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 22. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.40'den $\alpha \in B_X(Q_{22})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{22}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{23} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{23})$ dir. Üstelik Q_{23}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{23} = V(Q_{23}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.40'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 23. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.40'den $\alpha \in B_X(Q_{23})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{23}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{24} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{24})$ dir. Üstelik Q_{24}, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_{24} = V(Q_{24}, \alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.40'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 24. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.40'den $\alpha \in B_X(Q_{24})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{24}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{25} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{25})$ dir. Üstelik Q_{25}, XI

- alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{25} = V(Q_{25},\alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 2.4.30'dan verilen koşullar sağlanır. Tersine 25. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 2.4.30'dan $\alpha \in B_X(Q_{25})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{25}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{26} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{26})$ dir. Üstelik Q_{26}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{26} = V(Q_{26},\alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 3.2.4'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 26. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 32..4'den $\alpha \in B_X(Q_{26})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{26}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$Q_{27} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{27})$ dir. Üstelik Q_{27}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{27} = V(Q_{27},\alpha)$ sağlanır. O halde Sonuç 3.1.5'den verilen koşullar sağlanır. Tersine 27. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Sonuç 3.1.5'den $\alpha \in B_X(Q_{27})$ sağ birim elemandır. Böylece $B_X(Q_{27}) \subset B_X(D)$ ve sağ birim eleman aynı zamanda idempotent olduğundan α, $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

Lemma 3.4.2.2.2 X sonlu bir küme, $D \in \Sigma_3(X,9)$ ve $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ olmak üzere $B_X(Q_{26})$ yarıgrubunun idempotent elemanların sayısı

$$\begin{aligned} I^*(Q_{26}) = {} & \left(4^{|Z_5 \setminus Z_6|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_6|}\right) \cdot 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(5^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 4^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\ & \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|} \cdot \\ & \left(4^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_6|}\right) \cdot 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(5^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 4^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\ & \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|} \end{aligned}$$

formülüyle hesaplanır.

İspat: $T \in \{Z_5, Z_4\}$ olmak üzere $Q_{26} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ XI – altyarılatisi ile belirlenen $B_X(Q_{26})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı Teorem 3.2.9'dan

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{26})\right| = \left(4^{|T \setminus Z_6|} - 3^{|T \setminus Z_6|}\right) \cdot 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(5^{|Z_3 \setminus T|} - 4^{|Z_3 \setminus T|}\right) \cdot \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|}$$

dir. $Q_{26}\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\right\}$ ve $|I^*(Q_{26})| = \sum_{D' \in Q_{26}\vartheta_{XI}} \left|\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')\right|$ ve olmasından yararlanılarak

$$
\begin{aligned}
I^*(Q_{26}) = \; & \left(4^{|Z_5 \setminus Z_6|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_6|}\right) \cdot 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(5^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 4^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\
& \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|} \cdot \\
& \left(4^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_6|}\right) \cdot 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(5^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 4^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\
& \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|}
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır.

Lemma 3.4.2.2.3 X sonlu bir küme, $D \in \sum_3(X, 9)$ ve $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ olmak üzere $B_X(Q_{27})$ yarıgrubunun idempotent elemanların sayısı

$$
\begin{aligned}
I^*(Q_{27}) = \; & 3^{|(Z_5 \cap Z_4) \setminus Z_6|} \cdot \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\
& 6^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(7^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 6^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(7^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 6^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 9^{|X \setminus T_9|}
\end{aligned}
$$

formülüyle hesaplanır.

İspat: $Q_{27} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ XI – altyarılatisi ile belirlenen $B_X(Q_{27})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı Teorem 3.1.10'dan

$$
\begin{aligned}
\left|E_X^{(r)}(Q_{27})\right| = \; & 3^{|(Z_5 \cap Z_4) \setminus Z_6|} \cdot \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\
& 6^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(7^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 6^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(7^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 6^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 9^{|X \setminus \breve{D}|}
\end{aligned}
$$

dir. $Q_{27}\vartheta_{XI} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $|I^*(Q_{27})| = \sum_{D' \in Q_{27}\vartheta_{XI}} \left|\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')\right|$ ve olmasından yararlanılarak

$$
\begin{aligned}
I^*(Q_{27}) = \; & 3^{|(Z_5 \cap Z_4) \setminus Z_6|} \cdot \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\
& 6^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(7^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 6^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(7^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 6^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 9^{|X \setminus T_9|}
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır.

Şimdi $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ koşulu altında $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısını hesaplayalım.

Teorem 3.4.2.2.4 X sonlu bir küme olmak üzere $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ koşulu altında $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısı

$$|I_D| = \sum_{i=1}^{27} |I^*(Q_i)|$$

olur.

İspat: $i = 1,2, \dots ,16$ olmak üzere $B_X(Q_i)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısı Teorem 3.4.2.1.3'de hesaplanmıştır. Şimdi $i = 17,18, \dots ,27$ olmak üzere $B_X(Q_i)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısını yazalım. Sonuç 2.4.37, Sonuç 2.4.42 ve Sonuç 2.4.32'den

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{17})\right| = 3^{|X \setminus Z_6|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{18})\right| = \left(4^{|T \setminus Z_6|} - 3^{|T \setminus Z_6|}\right) \cdot 4^{|X \setminus T|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{19})\right| = \left(4^{|T \setminus Z_6|} - 3^{|T \setminus Z_6|}\right) \cdot \left(5^{|T' \setminus Z|} - 4^{|T' \setminus Z|}\right) \cdot 5^{|X \setminus T'|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{20})\right| = \left(4^{|Z \setminus Z_6|} - 3^{|Z \setminus Z_6|}\right) \cdot \left(5^{|T \setminus Z|} - 4^{|T \setminus Z|}\right) \cdot \left(6^{|T' \setminus T|} - 5^{|T' \setminus T|}\right) \cdot 6^{|X \setminus T'|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{21})\right| = \left(4^{|T \setminus Z_6|} - 3^{|T \setminus Z_6|}\right) \cdot \left(5^{|Z_3 \setminus T|} - 4^{|Z_3 \setminus T|}\right) \cdot \left(6^{|T' \setminus Z_3|} - 5^{|T' \setminus Z_3|}\right) \cdot$$
$$\left(7^{|\breve{D} \setminus T'|} - 6^{|\breve{D} \setminus T'|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{22})\right| = 3^{|T \cap T' \setminus Z_6|} \cdot \left(4^{|T' \setminus T|} - 3^{|T' \setminus T|}\right) \cdot \left(4^{|T \setminus T'|} - 3^{|T \setminus T'|}\right) \cdot 6^{|X \setminus T \cap T'|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{23})\right| = 3^{|Z_5 \cap Z_4 \setminus Z_6|} \cdot \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot$$
$$\left(7^{|T \setminus Z_3|} - 6^{|T \setminus Z_3|}\right) \cdot 7^{|X \setminus T'|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{24})\right| = 3^{|Z_5 \cap Z_4 \setminus Z_6|} \cdot \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot$$
$$\left(7^{|T \setminus Z_3|} - 6^{|T \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(8^{|\breve{D} \setminus T'|} - 7^{|\breve{D} \setminus T'|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|}$$

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{25})\right| = 4^{|Z_2 \cap Z_1 \setminus T|} \cdot \left(4^{|T \setminus Z_6|} - 3^{|T \setminus Z_6|}\right) \cdot \left(5^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 4^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot$$
$$\left(5^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 4^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$$

dır. Buradan $|I^*(Q_i)| = \sum_{D' \in Q_i \vartheta_{XI}} \left|\mathrm{E}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{r})}(D')\right|$ eşitliğinden yararlanılarak $i = 17,18, \dots ,25$ için idempotent elemanların sayısı bulunur. Lemma 3.4.2.2.2 ve Lemma 3.4.2.2.3'de $I^*(Q_{26})$ ve $I^*(Q_{27})$ kümelerinin eleman sayısı hesaplanmıştır. O halde Teorem 2.3.10'dan $|I_D| = \sum_{i=1}^{27} |I^*(Q_i)|$ olur.

3.4.3. $B_X(D)$ Yarıgrubunun Regüler Elemanları

$i = 1,2, \dots .16$ olmak üzere Q_i ile tam izomorf olan elemanların kümesi $Q_i\vartheta_{XI}$ kümesini alalım. Not 2.3.13'den bir $D' \in Q_i\vartheta_{XI}$ ile tanımlanan $B_X(D')$ yarıgrubunun regüler elemanlarının kümesi $\mathrm{R}(D')$ olmak üzere, $B_X(Q_i\ )$ yarıgrubunun regüler elemanlarının kümesi

$$R^*(Q_i) = \bigcup_{D' \in Q_i\vartheta_{XI}} \mathrm{R}(D')$$

biçimindedir.

3.4.3.1. $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ Koşulu Altında Regüler Elemanlar

Bu bölümde $B_X(D)$ yarıgrubunun $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ koşulu altında, regüler elemanlarının özellikleri ve sayısı bulunacaktır.

Öncelikle bir $\alpha \in B_X(D)$ elemanının regüler eleman olması için sağlaması gereken koşulları belirleyelim.

Teorem 3.4.3.1.1 $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\} \in \sum_3 (X, 9)$ ve $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ elemanının regüler olması için gerek ve yeter koşul bir $\varphi: V(D, \alpha) \to D' \subset D$, α - izomorfizmasının aşağıdaki şıklardan birinin koşullarını sağlamasıdır.

1) $Q_1 = \{T\}$ ve $\alpha = (X \times T)$ biçimindedir.

2) $Q_2 = \{T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ olmak üzere $\varphi(T) \subseteq Y_T^\alpha$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

3) $Q_3 = \{T, T', T''\}$ ve $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ olmak üzere $\varphi(T) \subseteq Y_T^\alpha$, $\varphi(T') \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

4) $Q_4 = \{Z, Z', T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ olmak üzere $\varphi(Z) \subseteq Y_Z^\alpha$, $\varphi(Z') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

5) $Q_5 = \{Z, Z', T, T', T''\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olmak üzere $\varphi(Z) \subseteq Y_Z^\alpha$, $\varphi(Z') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $\varphi(T') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

6) $Q_6 = \{Z, Z', T, T', T'', \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ olmak üzere $\varphi(Z) \subseteq Y_Z^\alpha$, $\varphi(Z') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $\varphi(T') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

7) $Q_7 = \{Z, T, T', T \cup T'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times T \cup T')$ olmak üzere $\varphi(T) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $\varphi(T') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

8) $Q_8 = \{Z, T, T', T \cup T', Z'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times T \cup T') \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ olmak üzere $\varphi(T) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $\varphi(T') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $\varphi(T \cup T') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

9) $Q_9 = \{Z, T, T', T \cup T', Z', \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times T \cup T') \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ olmak üzere $\varphi(T) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $\varphi(T') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $\varphi(T \cup T') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

10) $Q_{10} = \{Z, Z'T, T', T \cup T'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times T \cup T')$ olmak üzere $\varphi(Z) \subseteq Y_Z^\alpha$, $\varphi(Z') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

11) $Q_{11} = \{Z, T, T', Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olmak üzere $\varphi(Z) \subseteq Y_Z^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $\varphi(T') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $\varphi(Z_2) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha$, $\varphi(Z_1) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

12) $Q_{12} = \{Z, T, T', Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olmak üzere $\varphi(Z) \subseteq Y_Z^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $\varphi(T') \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $\varphi(Z_3) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha$, $\varphi(Z_2) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha$, $\varphi(Z_1) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \emptyset$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

13) $Q_{13} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T)$ olmak üzere $\varphi(Z) \subseteq Y_Z^\alpha$, $\varphi(Z_6) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha$, $\varphi(Z_5) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha$, $\varphi(Z_4) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha$, $\varphi(Z_3) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha$, $Y_6^\alpha \cap \varphi(Z_6) \neq \emptyset$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(Z_5) \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

14) $Q_{14} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olmak üzere $\varphi(Z) \subseteq Y_Z^\alpha$, $\varphi(Z_6, 9 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha$, $\varphi(Z_5) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha$, $\varphi(Z_4) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha$, $\varphi(Z_3) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $Y_6^\alpha \cap \varphi(Z_6) \neq \emptyset$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(Z_5) \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

15) $Q_{15} = \{Z, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olmak üzere $\varphi(Z) \subseteq Y_Z^\alpha$, $\varphi(Z_5) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_5^\alpha$, $\varphi(Z_4) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_4^\alpha$, $\varphi(Z_2) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha$, $\varphi(Z_1) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(Z_5) \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

16) $Q_{16} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olmak üzere $\varphi(Z) \subseteq Y_Z^\alpha$, $\varphi(Z_6) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha$, $\varphi(Z_5) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha$, $\varphi(Z_4) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha$, $\varphi(Z_2) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha$, $\varphi(Z_1) \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$, $Y_6^\alpha \cap \varphi(Z_6) \neq \emptyset$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(Z_5) \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$

koşulları sağlanır.

İspat: Teorem 3.4.2.1.1'de D' Lemma 3.4.1.1'de verilen Q_i leri taramak üzere $\alpha = \bigcup_{T \in D'} (Y_T^\alpha \times T)$ biçiminde yazılabildiği gösterilmiştir. Şimdi $\alpha -$ izomorfizması φ nin şıklardan birinin koşullarını sağladığını gösterelim.

$Q_1 = \{T\}$ ve $\alpha = (X \times T)$ olsun. O zaman $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçiminde olduğunu düşünülürse her $x \in X$ için $f(x) \in Q_1$ olduğundan $f: X \to Q_1 \subset D$ biçiminde tek bir f dönüşümü vardır. Yani $B_X(Q_1)$ tek elemanlı bir kümedir. $B_X(Q_1)$ işleme kapalı olduğundan α regüler elemandır. Üstelik $B_X(Q_1) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_2 = \{T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_2)$ dir. Üstelik Q_2, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_2 = V(Q_2, \alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.14'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 2. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.14'den $\alpha \in B_X(Q_2)$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_2) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_3 = \{T, T', T''\}$ ve $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_3)$ dir. Üstelik Q_3, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_3 = V(Q_3, \alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.14'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 3. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.14'den $\alpha \in B_X(Q_3)$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_3) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_4 = \{Z, Z', T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_4)$ dir. Üstelik Q_4, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_4 = V(Q_4, \alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.14'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 4. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.14'den $\alpha \in B_X(Q_4)$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_4) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_5 = \{Z, Z', T, T', T''\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_5)$ dir. Üstelik Q_5, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_5 = V(Q_5, \alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.14'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 5. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.14'den $\alpha \in B_X(Q_5)$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_5) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_6 = \left\{Z, Z', T, T', T'', \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_6)$ dir. Üstelik Q_6, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_6 = V(Q_6, \alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.14'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 6. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.14'den $\alpha \in B_X(Q_6)$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_6) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_7 = \{Z, T, T', T \cup T'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times T \cup T'\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_7)$ dir. Üstelik Q_7, XI - alt yarılatistir ve $V(D, \alpha) = Q_7 = V(Q_7, \alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.19'da verilen koşullar sağlanır. Tersine 7. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.19'dan $\alpha \in B_X(Q_7)$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_7) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_8 = \{Z, T, T', T \cup T', Z'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times T \cup T'\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_8)$ dir. Üstelik Q_8, XI - alt yarılatistir ve

$V(D,\alpha) = Q_8 = V(Q_8,\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.19'da verilen koşullar sağlanır. Tersine 8. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.19'dan $\alpha \in B_X(Q_8)$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_8) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_9 = \{Z, T, T', T \cup T', Z', \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times T \cup T') \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_9)$ dir. Üstelik Q_9, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_9 = V(Q_9,\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.19'da verilen koşullar sağlanır. Tersine 9. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.19'dan $\alpha \in B_X(Q_9)$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_9) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{10} = \{Z, Z'T, T', T \cup T'\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times T \cup T')$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{10})$ dir. Üstelik Q_{10}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{10} = V(Q_{10},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.19'da verilen koşullar sağlanır. Tersine 10. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.19'dan $\alpha \in B_X(Q_{10})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{10}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{11} = \{Z, T, T', Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{11})$ dir. Üstelik Q_{11}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{11} = V(Q_{11},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.19'da verilen koşullar sağlanır. Tersine 11. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.19'dan $\alpha \in B_X(Q_{11})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{11}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{12} = \{Z, T, T', Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{12})$ dir. Üstelik Q_{12}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{12} = V(Q_{12},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.19'da verilen koşullar sağlanır. Tersine 12. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.19'dan $\alpha \in B_X(Q_{12})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{12}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{13} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{13})$ dir. Üstelik Q_{13}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{13} = V(Q_{13},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.19'da verilen koşullar sağlanır. Tersine 13. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.19'dan $\alpha \in B_X(Q_{13})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{13}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{14} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{14})$ dir. Üstelik Q_{14}, XI

- alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{14} = V(Q_{14},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.19'da verilen koşullar sağlanır. Tersine 14. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.19'dan $\alpha \in B_X(Q_{14})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{14}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{15} = \{Z, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{15})$ dir. Üstelik Q_{15}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{15} = V(Q_{15},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.24'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 15. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.24'den $\alpha \in B_X(Q_{15})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{15}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{16} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{16})$ dir. Üstelik Q_{11}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{16} = V(Q_{16},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 3.3.3'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 16. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 3.3.3'den $\alpha \in B_X(Q_{16})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{16}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

Şimdi $R^*(Q_{16})$ kümesinin eleman sayısını hesaplayalım.

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 3.4.3.1.1 16) daki gibi bir quasinormal gösterimi var olsun. O zaman $Z \in \{Z_7, Z_8\}$ olmak üzere $Q_{16} = \{Z, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ için $V(D,\alpha) = Q_{16}$ eşitliği sağlanır. Buradan

$$Q_{16}\vartheta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\}$$

olduğu kullanılarak $|\Omega(Q_{16})| = 2$ olarak bulunur. Ayrıca Q_{16} nın otomorfizmaları

$$id_{Q_{16}} = \begin{pmatrix} ZZ_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \\ ZZ_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \end{pmatrix},\ \tau_1 = \begin{pmatrix} ZZ_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \\ ZZ_6Z_4Z_5Z_3Z_2Z_1\breve{D} \end{pmatrix}$$
$$\tau_2 = \begin{pmatrix} ZZ_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \\ ZZ_6Z_5Z_4Z_3Z_1Z_2\breve{D} \end{pmatrix},\ \tau_3 = \begin{pmatrix} ZZ_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \\ ZZ_6Z_4Z_5Z_3Z_1Z_2\breve{D} \end{pmatrix}$$

olduğundan $|\Phi(Q_{16})| = 4$ dür. Buradan

$$D_1' = \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \; D_2' = \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$$
$$D_3' = \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}, \; D_4' = \{Z_8, Z_6, Z_4, Z_5, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}$$
$$D_5' = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \; D_6' = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$$
$$D_7' = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}, \; D_8' = \{Z_7, Z_6, Z_4, Z_5, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}$$

ile gösterilirse $R^*(Q_{16}) = \bigcup_{i=1}^{8} \mathrm{R}(D_i')$ olarak hesaplanır.

Lemma 3.4.3.1.2 X sonlu bir küme, $D \in \sum_3(X, 9)$ ve $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ olmak üzere $B_X(Q_{16})$ yarıgrubunun regüler elemanların sayısı

$$\begin{aligned} R^*(Q_{16}) = \quad & 4 \cdot 2 \cdot \left(2^{|(Z_5 \cap Z_4) \setminus Z_6|}\left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right)\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \\ & 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|} \\ & 4 \cdot 2 \cdot \left(2^{|(Z_5 \cap Z_4) \setminus Z_6|}\left(2^{|Z_6 \setminus Z_8|} - 1\right)\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \\ & 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|} \end{aligned}$$

formülüyle hesaplanır.

İspat: $R^*(Q_{16}) = \bigcup_{i=1}^{8} \mathrm{R}(D_i')$ olduğundan, $R^*(Q_{16})$ kümesinin eleman sayısının bulunması için birleşimde yer alan XI – altyarılatislerden, kesişimi boş kümeden farklı olan varsa bulunup, birleşimin eleman sayısından çıkarılması gerekmektedir.

$\alpha \in \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_2')$ olsun.

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_2') \Rightarrow \quad & \alpha \in \mathrm{R}(D_1') \text{ ve } \alpha \in \mathrm{R}(D_2') \\ \Rightarrow \quad & Z_8 \subseteq Y_Z^\alpha, Z_6 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha, \; Z_5 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha, \\ & Z_4 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha, Z_2 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha, \\ & Z_1 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha, Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \emptyset, \\ & Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset \\ & Z_8 \subseteq Y_Z^\alpha, Z_6 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha, \; Z_4 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha, \\ & Z_5 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha, Z_2 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \\ & Z_1 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha, Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \emptyset, \\ & Y_5^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset \end{aligned}$$

olur. Buradan $\emptyset \neq Y_4^\alpha \cap Z_4 \subseteq Y_4^\alpha \cap (Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha)$ elde edilir. Bu sonuç α nın quasinormal gösteriminde Y_T^α kümelerinin ayrık kümeler olmasıyla çelişir. O halde $\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_2') = \emptyset$ dir. Benzer olarak aralarında otomorfizma olan D_1', D_2', D_3', D_4' için de

$$\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_3') = \emptyset, \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_4') = \emptyset, \mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_3') = \emptyset$$

$\mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_4') = \emptyset, \mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_4') = \emptyset$

olduğu görülür.

$\alpha \in \mathrm{R}(D_5') \cap \mathrm{R}(D_6')$ olsun.

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_2') \Rightarrow \quad & \alpha \in \mathrm{R}(D_1') \text{ ve } \alpha \in \mathrm{R}(D_2') \\
\Rightarrow \quad & Z_7 \subseteq Y_Z^\alpha, Z_6 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha,\ Z_4 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha, \\
& Z_5 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha, Z_2 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha, \\
& Z_1 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha, Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \emptyset, \\
& Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset \\
& Z_8 \subseteq Y_Z^\alpha, Z_6 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha,\ Z_4 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha, \\
& Z_5 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha, Z_2 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \\
& Z_1 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha, Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \emptyset, \\
& Y_5^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\emptyset \neq Y_4^\alpha \cap Z_4 \subseteq Y_4^\alpha \cap (Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha)$ elde edilir. Bu sonuç α nın quasinormal gösteriminde Y_T^α kümelerinin ayrık kümeler olmasıyla çelişir. O halde $\mathrm{R}(D_5') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset$ dir. Benzer olarak aralarında otomorfizma olan D_5', D_6', D_7', D_8' için de

$$\mathrm{R}(D_5') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset, \mathrm{R}(D_5') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset, \mathrm{R}(D_6') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset$$
$$\mathrm{R}(D_6') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset, \mathrm{R}(D_7') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset$$

olduğu görülür.

$\alpha \in \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_5')$ olsun.

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_5') \Rightarrow \quad & \alpha \in \mathrm{R}(D_1') \text{ ve } \alpha \in \mathrm{R}(D_5') \\
\Rightarrow \quad & Z_8 \subseteq Y_Z^\alpha, Z_6 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha,\ Z_5 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha, \\
& Z_4 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha, Z_2 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha, \\
& Z_1 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha, Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \emptyset, \\
& Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset \\
& Z_7 \subseteq Y_Z^\alpha, Z_6 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha,\ Z_5 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha, \\
& Z_4 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha, Z_2 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \\
& Z_1 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha, Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \emptyset, \\
& Y_5^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_4^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset
\end{aligned}$$

olur. Buradan $Z_8 \subseteq Y_Z^\alpha$ ve $Z_7 \subseteq Y_Z^\alpha$ olduğu kullanılarak $Z_6 = Z_8 \cup Z_7 \subseteq Y_Z^\alpha$ elde edilir. Ancak aynı zamanda $Z_6 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_6^\alpha$ dir. Böylece Y_T^α kümelerinin ayrık kümeler olmasından dolayı $Y_6^\alpha \cap Z_6 = \emptyset$ olur. Ancak bu sonuç $Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde $\mathrm{R}(D_1') \cap$

$\mathrm{R}(D_5') = \emptyset$ dir. Benzer olarak D_1', D_2', D_3', D_4' ile D_5', D_6', D_7', D_5' kümelerinin kesişimine bakıldığında, her bir kesişimde $Z_8 \subseteq Y_Z^\alpha$, $Z_7 \subseteq Y_Z^\alpha$ ve $Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \emptyset$ denklemleri elde edilecektir. O halde

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset, \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset, \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset, \mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset, \mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset, \mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset, \mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset, \mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset, \mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_4') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset, \mathrm{R}(D_4') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset, \mathrm{R}(D_4') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_4') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset
\end{aligned}
$$

dir. Böylece

$$
\begin{aligned}
|R^*(Q_{16})| = \quad & |\mathrm{R}(D_1')| + |\mathrm{R}(D_2')| + |\mathrm{R}(D_3')| + |\mathrm{R}(D_4')| + |\mathrm{R}(D_5')| + |\mathrm{R}(D_6')| + \\
& |\mathrm{R}(D_7')| + |\mathrm{R}(D_8')|
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. Teorem 3.3.7'den

$$
\begin{aligned}
R^*(Q_{16}) = \quad & 4 \cdot 2 \cdot \left(2^{|(Z_5 \cap Z_4) \setminus Z_6|}\left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right)\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \\
& 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|} \\
& 4 \cdot 2 \cdot \left(2^{|(Z_5 \cap Z_4) \setminus Z_6|}\left(2^{|Z_6 \setminus Z_8|} - 1\right)\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \\
& 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Şimdi $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ koşulu altında $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanlarının sayısını hesaplayalım.

Teorem 3.4.3.1.3 X sonlu bir küme olmak üzere $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ koşulu altında $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanlarının sayısı

$$|R| = \sum_{i=1}^{16} |R^*(Q_i)|$$

olur.

İspat: Lemma 3.4.3.1.2'de 16. diyagrama sahip XI – yarılatisin regüler elemanlarının sayısı hesaplanmıştır. Sonuç 2.1.57, Sonuç 2.4.20 ve Sonuç 2.4.25 kullanılarak 1-15 numaralı diyagramlara sahip XI – yarılatislerimin regüler elemanlarının sayısı benzer olarak hesaplanırsa $|R| = \sum_{i=1}^{16} |R^*(Q_i)|$ olarak bulunur.

3.4.3.2. $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ Koşulu Altında Regüler Elemanlar

Bu bölümde $B_X(D)$ yarıgrubunun $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ koşulu altında, regüler elemanlarının özellikleri ve sayısı bulunacaktır.

Lemma 3.4.1.1'de açıklandığı gibi, D nin 1-16 numaralı diyagrama sahip tam X - altyarılatisleri hiçbir koşula bağlı olmaksızın XI – altyarılatislerdir. Dolayısıyla $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ koşulu altındaki regüler elemanların sayısını bulmak için $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ koşulu altında XI olan alt yarılatislere ek olarak 17-27 numaralı diyagrama sahip tam X – altyarılatislerin incelenmesi yeterlidir.

Öncelikle bir $\alpha \in B_X(D)$ elemanının regüler eleman olması için sağlaması gereken koşulları belirleyelim.

Teorem 3.4.3.2.1 $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\} \in \Sigma_3\,(X, 9)$ ve $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ elemanının regüler olması için gerek ve yeter koşul bir $\varphi: V(D, \alpha) \to D' \subset D$, α – izomorfizmasının, Teorem 3.4.3.1.1'deki 1-16 şıklarından birinin veya aşağıdaki şıklardan birinin koşullarını sağlamasıdır.

17) $Q_{17} = \{Z_8, Z_7, Z_6\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6)$ olmak üzere $\varphi(Z_8) \subseteq Y_8^\alpha$, $\varphi(Z_7) \subseteq Y_7^\alpha$ koşulları sağlanır.

18) $Q_{18} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T)$ olmak üzere $\varphi(Z_8) \subseteq Y_8^\alpha$, $\varphi(Z_7) \subseteq Y_7^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

19) $Q_{19} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ olmak üzere $\varphi(Z_8) \subseteq Y_8^\alpha$, $\varphi(Z_7) \subseteq Y_7^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

20) $Q_{20} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z, T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ olmak üzere $\varphi(Z_8) \subseteq Y_8^\alpha$, $\varphi(Z_7) \subseteq Y_7^\alpha$, $\varphi(Z) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

21) $Q_{21} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_3, T', \breve{D}\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ olmak üzere $\varphi(Z_8) \subseteq Y_8^\alpha$,

$\varphi(Z_7) \subseteq Y_7^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $\varphi(Z_3) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha$, $\varphi(T') \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

22) $Q_{22} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, T', T \cup T'\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times T \cup T'\right)$ olmak üzere $\varphi(Z_8) \subseteq Y_8^\alpha$, $\varphi(Z_7) \subseteq Y_7^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $\varphi(T') \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

23) $Q_{23} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T)$ olmak üzere $\varphi(Z_8) \subseteq Y_8^\alpha$, $\varphi(Z_7) \subseteq Y_7^\alpha$, $\varphi(Z_5) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha$, $\varphi(Z_4) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(Z_5) \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

24) $Q_{24} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T, \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olmak üzere $\varphi(Z_8) \subseteq Y_8^\alpha$, $\varphi(Z_7) \subseteq Y_7^\alpha$, $\varphi(Z_5) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha$, $\varphi(Z_4) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(Z_5) \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

25) $Q_{25} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olmak üzere $\varphi(Z_8) \subseteq Y_8^\alpha$, $\varphi(Z_7) \subseteq Y_7^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $\varphi(Z_2) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_2^\alpha$, $\varphi(Z_1) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_1^\alpha$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, koşulları sağlanır.

26) $Q_{26} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olmak üzere $\varphi(Z_8) \subseteq Y_8^\alpha$, $\varphi(Z_7) \subseteq Y_7^\alpha$, $\varphi(T) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha$, $\varphi(Z_3) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha$, $\varphi(Z_2) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha$, $\varphi(Z_1) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \emptyset$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \emptyset$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

27) $Q_{27} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olmak üzere $\varphi(Z_8) \subseteq Y_8^\alpha$, $\varphi(Z_7) \subseteq Y_7^\alpha$, $\varphi(Z_5) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha$, $\varphi(Z_4) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha$, $\varphi(Z_2) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha$,

$\varphi(Z_1) \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(Z_5) \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(Z_4) \neq \emptyset$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \emptyset$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \emptyset$ koşulları sağlanır.

İspat: Teorem 3.4.2.2.1'de D' Lemma 3.4.2.1.1'de verilen Q_i leri taramak üzere $\alpha = \bigcup_{T\in D'}(Y_T^\alpha \times T)$ biçiminde yazılabildiği gösterilmiştir. Şimdi α – izomorfizması φ nin şıklardan birinin koşullarını sağladığını gösterelim.

$Q_{17} = \{Z_8, Z_7, Z_6\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{17})$ dir. Üstelik Q_{17}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{17} = V(Q_{17},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.34'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 17. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.34'den $\alpha \in B_X(Q_{17})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{17}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{18} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{18})$ dir. Üstelik Q_{18}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{18} = V(Q_{18},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.34'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 18. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.34'den $\alpha \in B_X(Q_{18})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{18}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{19} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{19})$ dir. Üstelik Q_{19}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{19} = V(Q_{19},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.34'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 19. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.34'den $\alpha \in B_X(Q_{19})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{19}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{20} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z, T, T'\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{20})$ dir. Üstelik Q_{20}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{20} = V(Q_{20},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.34'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 20. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.34'den $\alpha \in B_X(Q_{20})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{20}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{21} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_3, T', \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{21})$ dir. Üstelik Q_{21}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{21} = V(Q_{21},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.34'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 21. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.34'den $\alpha \in B_X(Q_{21})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{21}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{22} = \{Z_8, Z_7, Z_6, T, T', T \cup T'\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times T \cup T'\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{22})$ dir. Üstelik Q_{22}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{22} = V(Q_{22},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.39'da verilen koşullar sağlanır. Tersine 22. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.39'dan $\alpha \in B_X(Q_{22})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{22}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{23} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{23})$ dir. Üstelik Q_{23}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{23} = V(Q_{23},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.39'da verilen koşullar sağlanır. Tersine 23. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.39'dan $\alpha \in B_X(Q_{23})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{23}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{24} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, T, \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{24})$ dir. Üstelik Q_{24}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{24} = V(Q_{24},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.39'da verilen koşullar sağlanır. Tersine 24. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.39'dan $\alpha \in B_X(Q_{24})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{24}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{25} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{25})$ dir. Üstelik Q_{25}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{25} = V(Q_{25},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 2.4.29'da verilen koşullar sağlanır. Tersine 25. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 2.4.29'dan $\alpha \in B_X(Q_{25})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{25}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{26} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{26})$ dir. Üstelik Q_{26}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{26} = V(Q_{26},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 3.2.3'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 26. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 3.2.3'den $\alpha \in B_X(Q_{26})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{26}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

$Q_{27} = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ ve $\alpha = (Y_8^\alpha \times Z_8) \cup (Y_7^\alpha \times Z_7) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ olsun. O zaman $\alpha \in B_X(Q_{27})$ dir. Üstelik Q_{27}, XI - alt yarılatistir ve $V(D,\alpha) = Q_{27} = V(Q_{27},\alpha)$ sağlanır. O halde Teorem 3.1.4'de verilen koşullar sağlanır. Tersine 27. şıkta verilen koşullar sağlansın. Yine Teorem 3.1.4'den $\alpha \in B_X(Q_{27})$ regüler elemandır. Böylece $B_X(Q_{27}) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır.

Şimdi $R^*(Q_{26})$ kümesinin eleman sayısını hesaplayalım.

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 3.4.3.2.1 26) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. O zaman $Z \in \{Z_4, Z_5\}$ olmak üzere $Q_{26} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ için $V(D,\alpha) = Q_{26}$ eşitliği sağlanır. Buradan

$$Q_{26}\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\right\}$$

olduğu kullanılarak $|\Omega(Q_{26})| = 2$ olarak bulunur. Ayrıca Q_{26} nın otomorfizmaları

$$id_{Q_{26}} = \begin{pmatrix} Z_8 Z_7 Z_6 Z Z_3 Z_2 Z_1 \breve{D} \\ Z_8 Z_7 Z_6 Z Z_3 Z_2 Z_1 \breve{D} \end{pmatrix}, \ \tau_1 = \begin{pmatrix} Z_8 Z_7 Z_6 Z Z_3 Z_2 Z_1 \breve{D} \\ Z_7 Z_8 Z_6 Z Z_3 Z_2 Z_1 \breve{D} \end{pmatrix}$$
$$\tau_2 = \begin{pmatrix} Z_8 Z_7 Z_6 Z Z_3 Z_2 Z_1 \breve{D} \\ Z_8 Z_7 Z_6 Z Z_3 Z_1 Z_2 \breve{D} \end{pmatrix}, \ \tau_3 = \begin{pmatrix} Z_8 Z_7 Z_6 Z Z_3 Z_2 Z_1 \breve{D} \\ Z_7 Z_8 Z_6 Z Z_3 Z_1 Z_2 \breve{D} \end{pmatrix}$$

olduğundan $|\Phi(Q_{26})| = 4$ dür. Buradan

$$D'_1 = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \ D'_2 = \{Z_7, Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$$
$$D'_3 = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}, \ D'_4 = \{Z_7, Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}$$
$$D'_5 = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \ D'_6 = \{Z_7, Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$$
$$D'_7 = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}, \ D'_8 = \{Z_7, Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}$$

ile gösterilirse $R^*(Q_{26}) = \bigcup_{i=1}^{8} \mathrm{R}(D'_i)$ olarak hesaplanır.

Lemma 3.4.3.2.2 X sonlu bir küme, $D \in \sum_3(X,9)$ ve $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ olmak üzere $B_X(Q_{26})$ yarıgrubunun regüler elemanların sayısı

$$\begin{aligned} R^*(Q_{26}) = \ & 4 \cdot 2 \cdot \left(4^{|Z_5 \setminus Z_6|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_6|}\right) \cdot 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(5^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 4^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\ & \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|} \ \cdot \\ & 4 \cdot 2 \cdot \left(4^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_6|}\right) \cdot 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(5^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 4^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\ & \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|} \end{aligned}$$

formülüyle hesaplanır.

İspat: $R^{*}(Q_{26}) = \bigcup_{\mathrm{i=1}}^{8} \mathrm{R}(D_i')$ olduğundan, $R^{*}(Q_{26})$ kümesinin eleman sayısının bulunması için birleşimde yer alan XI – altyarılatislerden, kesişimi boş kümeden farklı olan varsa bulunup, birleşimin eleman sayısından çıkarılması gerekmektedir.

$\alpha \in \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_2')$ olsun.

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_2') \Rightarrow \quad & \alpha \in \mathrm{R}(D_1') \text{ ve } \alpha \in \mathrm{R}(D_2') \\
\Rightarrow \quad & Z_8 \subseteq Y_8^{\alpha}, Z_7 \subseteq Y_7^{\alpha},\ Z_5 \subseteq Y_8^{\alpha} \cup Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha}, \\
& Z_3 \subseteq Y_8^{\alpha} \cup Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha}, \\
& Z_2 \subseteq Y_8^{\alpha} \cup Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_2^{\alpha}, \\
& Z_1 \subseteq Y_8^{\alpha} \cup Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_1^{\alpha}, Y_T^{\alpha} \cap Z_5 \neq \emptyset, \\
& Y_3^{\alpha} \cap Z_3 \neq \emptyset, Y_2^{\alpha} \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^{\alpha} \cap Z_1 \neq \emptyset, \\
& Z_7 \subseteq Y_8^{\alpha}, Z_8 \subseteq Y_7^{\alpha},\ Z_5 \subseteq Y_8^{\alpha} \cup Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha}, \\
& Z_3 \subseteq Y_8^{\alpha} \cup Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha}, \\
& Z_2 \subseteq Y_8^{\alpha} \cup Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_2^{\alpha}, \\
& Z_1 \subseteq Y_8^{\alpha} \cup Y_7^{\alpha} \cup Y_6^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_1^{\alpha}, Y_T^{\alpha} \cap Z_5 \neq \emptyset, \\
& Y_3^{\alpha} \cap Z_3 \neq \emptyset, Y_2^{\alpha} \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^{\alpha} \cap Z_1 \neq \emptyset
\end{aligned}$$

olur. Buradan $Z_8 \subseteq Y_8^{\alpha}$ ve $Z_8 \subseteq Y_7^{\alpha}$ olduğu kullanılarak $Y_8^{\alpha} \cap Y_7^{\alpha} = Z_8 \neq \emptyset$ elde edilir. Ancak bu sonuç Y_T^{α} kümelerinin ayrık kümeler olmasıyla çelişir. O halde $\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_2') = \emptyset$ dir. Benzer olarak aralarında otomorfizma olan D_1', D_2', D_3', D_4' için de

$$\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_3') = \emptyset, \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_4') = \emptyset, \mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_3') = \emptyset$$
$$\mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_4') = \emptyset, \mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_4') = \emptyset$$

olduğu görülür.

$\alpha \in \mathrm{R}(D_5') \cap \mathrm{R}(D_6')$ olsun.

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathrm{R}(D_5') \cap \mathrm{R}(D_6') \Rightarrow \quad & \alpha \in \mathrm{R}(D_5') \text{ ve } \alpha \in \mathrm{R}(D_6') \\
\Rightarrow \quad & Z_8 \subseteq Y_8^\alpha, Z_7 \subseteq Y_7^\alpha,\ Z_4 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha, \\
& Z_3 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_3^\alpha, \\
& Z_2 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha, \\
& Z_1 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha, Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, \\
& Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset, \\
& Z_7 \subseteq Y_8^\alpha, Z_8 \subseteq Y_7^\alpha,\ Z_4 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha, \\
& Z_3 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_3^\alpha, \\
& Z_2 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha, \\
& Z_1 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha, Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, \\
& Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset
\end{aligned}$$

olur. Buradan $Z_8 \subseteq Y_8^\alpha$ ve $Z_8 \subseteq Y_7^\alpha$ olduğu kullanılarak $Y_8^\alpha \cap Y_7^\alpha = Z_8 \neq \emptyset$ elde edilir. Ancak bu sonuç Y_T^α kümelerinin ayrık kümeler olmasıyla çelişir. O halde $\mathrm{R}(D_5') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset$ dir. Benzer olarak aralarında otomorfizma olan D_5', D_6', D_7', D_8' için de

$$\mathrm{R}(D_5') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset, \mathrm{R}(D_5') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset, \mathrm{R}(D_6') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset$$
$$\mathrm{R}(D_6') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset, \mathrm{R}(D_7') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset$$

olduğu görülür.

$\alpha \in \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_5')$ olsun.

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_5') \Rightarrow \quad & \alpha \in \mathrm{R}(D_1') \text{ ve } \alpha \in \mathrm{R}(D_5') \\
\Rightarrow \quad & Z_8 \subseteq Y_8^\alpha, Z_7 \subseteq Y_7^\alpha,\ Z_5 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha, \\
& Z_3 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_3^\alpha, \\
& Z_2 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha, \\
& Z_1 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha, Y_T^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, \\
& Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset, \\
& Z_8 \subseteq Y_8^\alpha, Z_7 \subseteq Y_7^\alpha,\ Z_4 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha, \\
& Z_3 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_3^\alpha, \\
& Z_2 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha, \\
& Z_1 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha, Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, \\
& Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset
\end{aligned}$$

olur. Buradan $Z_5 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha$ ve $Z_4 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha$ olduğu kullanılarak $Z_3 = Z_4 \cup Z_5 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha$ elde edilir. Ancak aynı zamanda $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$ dir. Bu sonuç Y_T^α kümelerinin ayrık kümeler olmasıyla çelişir. O halde $\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset$ dir. Benzer olarak D_1', D_2', D_3', D_4' ile D_5', D_6', D_7', D_5' kümelerinin kesişimine bakıldığında, her bir kesişimde $Z_5 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha$, $Z_4 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_Z^\alpha$ ve $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$ denklemleri elde edilecektir. O halde

$$\begin{aligned}
&\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset, \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset, \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset, \mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset, \mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset, \mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset, \mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset, \mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset, \mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_4') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset, \mathrm{R}(D_4') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset, \mathrm{R}(D_4') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_4') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset
\end{aligned}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}
|R^*(Q_{26})| = \quad & |\mathrm{R}(D_1')| + |\mathrm{R}(D_2')| + |\mathrm{R}(D_3')| + |\mathrm{R}(D_4')| + |\mathrm{R}(D_5')| + |\mathrm{R}(D_6')| + \\
& |\mathrm{R}(D_7')| + |\mathrm{R}(D_8')|
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Teorem 3.2.7'den

$$\begin{aligned}
R^*(Q_{26}) = \quad & 4 \cdot 2 \cdot \left(4^{|Z_5 \setminus Z_6|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_6|}\right) \cdot 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(5^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 4^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\
& \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|} \cdot \\
& 4 \cdot 2 \cdot \left(4^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_6|}\right) \cdot 5^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(5^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 4^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\
& \left(6^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \breve{D}|}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şimdi $R^*(Q_{27})$ kümesinin eleman sayısını hesaplayalım.

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 3.4.3.2.1 27) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. O zaman $Q_{27} = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ için $V(D, \alpha) = Q_{27}$ eşitliği sağlanır. Buradan

$$Q_{27}\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\right\} = \{Q_{27}\}$$

olduğu kullanılarak $|\Omega(Q_{27})| = 1$ olarak bulunur. Ayrıca Q_{27} nin otomorfizmaları

$$id_{Q_{16}} = \begin{pmatrix} Z_8Z_7Z_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \\ Z_8Z_7Z_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \end{pmatrix},\ \tau_1 = \begin{pmatrix} Z_8Z_7Z_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \\ Z_7Z_8Z_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \end{pmatrix}$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} Z_8Z_7Z_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \\ Z_8Z_7Z_6Z_4Z_5Z_3Z_2Z_1\breve{D} \end{pmatrix},\ \tau_3 = \begin{pmatrix} Z_8Z_7Z_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \\ Z_8Z_7Z_6Z_5Z_4Z_3Z_1Z_2\breve{D} \end{pmatrix}$$

$$\tau_4 = \begin{pmatrix} Z_8Z_7Z_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \\ Z_7Z_8Z_6Z_4Z_5Z_3Z_2Z_1\breve{D} \end{pmatrix},\ \tau_5 = \begin{pmatrix} Z_8Z_7Z_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \\ Z_7Z_8Z_6Z_5Z_4Z_3Z_1Z_2\breve{D} \end{pmatrix}$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} Z_8Z_7Z_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \\ Z_8Z_7Z_6Z_4Z_5Z_3Z_1Z_2\breve{D} \end{pmatrix},\ \tau_3 = \begin{pmatrix} Z_8Z_7Z_6Z_5Z_4Z_3Z_2Z_1\breve{D} \\ Z_7Z_8Z_6Z_4Z_5Z_3Z_1Z_2\breve{D} \end{pmatrix}$$

olduğundan $|\Phi(Q_{27})| = 8$ dür. Buradan

$$D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ D_2' = \{Z_7, Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$$
$$D_3' = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ D_4' = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}$$
$$D_5' = \{Z_7, Z_8, Z_6, Z_4, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ D_6' = \{Z_7, Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}$$
$$D_7' = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_5, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\},\ D_8' = \{Z_7, Z_8, Z_6, Z_4, Z_5, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}$$

ile gösterilirse $R^*(Q_{27}) = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{8} \mathrm{R}(D_i')$ olarak hesaplanır.

Lemma 3.4.3.2.3 X sonlu bir küme, $D \in \sum_3(X, 9)$ ve $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ olmak üzere $B_X(Q_{27})$ yarıgrubunun regüler elemanların sayısı

$$R^*(Q_{27}) = \quad 8 \cdot 3^{|(Z_5 \cap Z_4) \setminus Z_6|} \cdot \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot$$
$$6^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(7^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 6^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(7^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 6^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 9^{|X \setminus T_9|}$$

formülüyle hesaplanır.

İspat: $R^*(Q_{27}) = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{8} \mathrm{R}(D_i')$ olduğundan, $R^*(Q_{27})$ kümesinin eleman sayısının bulunması için birleşimde yer alan $XI-$ altyarılatislerden, kesişimi boş kümeden farklı olan varsa bulunup, birleşimin eleman sayısından çıkarılması gerekmektedir.

$\alpha \in \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_2')$ olsun.

$$
\begin{aligned}
\alpha \in \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_2') \Rightarrow\quad & \alpha \in \mathrm{R}(D_1') \text{ ve } \alpha \in \mathrm{R}(D_2') \\
\Rightarrow\quad & Z_8 \subseteq Y_8^\alpha, Z_7 \subseteq Y_7^\alpha,\ Z_5 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha, \\
& Z_4 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha, \\
& Z_2 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha, \\
& Z_1 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha, Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, \\
& Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset, \\
& Z_7 \subseteq Y_8^\alpha, Z_8 \subseteq Y_7^\alpha,\ Z_5 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha, \\
& Z_4 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha, \\
& Z_2 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha, \\
& Z_1 \subseteq Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha, Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset, \\
& Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $Z_8 \subseteq Y_8^\alpha$ ve $Z_8 \subseteq Y_7^\alpha$ olduğu kullanılarak $Y_8^\alpha \cap Y_7^\alpha = Z_8 \neq \emptyset$ elde edilir. Ancak bu sonuç Y_T^α kümelerinin ayrık kümeler olmasıyla çelişir. O halde $\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_2') = \emptyset$ dir.

Benzer olarak aralarında otomorfizma olan D_1', D_2', D_3', D_4' ,D_5', D_6', D_7', D_8' kümeleri için de

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_2') = \emptyset, \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_3') = \emptyset, \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_4') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset, \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset, \mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_1') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset, \mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_3') = \emptyset, \mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_4') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset, \mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset, \mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_2') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset, \mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_4') = \emptyset, \mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset, \mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset, \mathrm{R}(D_3') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_4') \cap \mathrm{R}(D_5') = \emptyset, \mathrm{R}(D_4') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset, \mathrm{R}(D_4') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_4') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset, \mathrm{R}(D_5') \cap \mathrm{R}(D_6') = \emptyset, \mathrm{R}(D_5') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_5') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset, \mathrm{R}(D_6') \cap \mathrm{R}(D_7') = \emptyset, \mathrm{R}(D_6') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset \\
&\mathrm{R}(D_7') \cap \mathrm{R}(D_8') = \emptyset
\end{aligned}
$$

dir. O halde

$$
\begin{aligned}
|R^*(Q_{27})| = \quad & |\mathrm{R}(D_1')| + |\mathrm{R}(D_2')| + |\mathrm{R}(D_3')| + |\mathrm{R}(D_4')| + |\mathrm{R}(D_5')| + |\mathrm{R}(D_6')| + \\
& |\mathrm{R}(D_7')| + |\mathrm{R}(D_8')|
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. Teorem 3.1.8'den

$$R^*(Q_{27}) = \quad 8 \cdot 3^{|(Z_5 \cap Z_4) \setminus Z_6|} \cdot \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot$$
$$6^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(7^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 6^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(7^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 6^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 9^{|X \setminus T_9|}$$

olarak elde edilir.

Şimdi $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ koşulu altında $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanlarının sayısını hesaplayalım.

Teorem 3.4.3.2.4 X sonlu bir küme olmak üzere $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ koşulu altında $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanlarının sayısı

$$|R| = \sum_{i=1}^{27} |R^*(Q_i)|$$

olur.

İspat: Teorem 3.4.3.1.3'de $\sum_{i=1}^{16} |R^*(Q_i)|$, Lemma 5.3.5 ve Lemma 5.3.6'de $R^*(Q_{26})$ ve $R^*(Q_{27})$ hesaplanmıştır. Sonuç 2.4.30, Sonuç 2.4.35 ve Sonuç 2.4.40 kullanılarak 17-25 numaralı diyagramlara sahip XI – yarılatislerinin regüler elemanlarının sayısı benzer olarak hesaplanırsa $|R| = \sum_{i=1}^{16} |R^*(Q_i)| + \sum_{i=17}^{27} |R^*(Q_i)| = \sum_{i=1}^{27} |R^*(Q_i)|$ olarak bulunur.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez dört ana başlık halinde hazırlanmıştır ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

İlk olarak tezin ana konusunu oluşturan $\sum_3(X,9)$ sınıfının elemanlarının özellikleri incelenmiştir. Boş olmayan bir X kümesinin altkümelerinden oluşan ve elemanları

$$Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D}$$
$$Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D}$$
$$Z_8 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D}$$
$$Z_7 \subset Z_6 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset D$$
$$Z_8 \backslash Z_7 \neq \varnothing,\ Z_7 \backslash Z_8 \neq \varnothing,\ Z_2 \backslash Z_1 \neq \varnothing,\ Z_1 \backslash Z_2 \neq \varnothing,\ Z_5 \backslash Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \backslash Z_5 \neq \varnothing$$

koşullarını sağlayan $D = \{\breve{D}, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$ birleşimlerin tam X - yarılatisine izomorf olan tam X – yarılatislerin sınıfının yapısı ele alınmış, karakteristik kümeler ailesinden, karaktistik dönüşümden ve temel kaynak elemanlarından yararlanılarak D nin tam X -alt yarılatisleri bulunmuş ve hangi koşullar altında XI -alt yarılatis oldukları belirlenmiştir. D ile belirli ikili bağıntıların yarıgrubunun sağ birim, idempotent ve regüler elemanlarının yapısının incelenmiş ve sayılarını veren formüller elde edilmiştir.

Daha sonra ana diyagramın idempotent ve regüler elemanlarının toplamının elde edilebilmesi için alt diyagramlarının $\sum_7(X,8)$ ve $\sum_8(X,8)$ sınıfları için benzer uygulamalar yapılmış ve ve bu sınıf elemanları ile belirli ikili bağıntıların yarıgrubunun sağ birim, idempotent ve regüler elemanlarının yapısının incelenmiş ve sayılarını veren formüller elde edilmiştir.

Son olarak önceki bölümlerde bulunanlardan yararlanılarak $Z_8 \cap Z_7 \neq \emptyset$ ve $Z_8 \cap Z_7 = \emptyset$ koşulu altında $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent ve regüler elemanlarının özellikleri ayrı ayrı incelenmiş ve sayılarını bulan formüller hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR

Clifford A., Preston G., 1977. Algebraic Theory of Semigroups. American Mathematical Society. Mathematical Surveys Number: 7.

Diasamidze Y. I., Makharadze S.,1999. Right zeros of complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci. 159 (3): 376-378.

Diasamideze Y. I., 2000. Complete Semigroups of Binary Relations. Ajara Publ. House, Batumi (in Russian). 176.

Diasamidze Y. I., 2001a. Divisibility of elements in complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci. 164 (2): 225-227.

Diasamidze Y. I., 2001b. Right units and idempotent elements of complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci. 164 (3): 443-446.

Diasamidze Y. I., 2003. Complete semigroups of binary relations. Journal of Mathematical Sciences, 117 (4): 4271-4319.

Diasamidze Y. I, Makharadze S., Partenadze G. ve Givradze O., 2007. On finite X - semilattices of unions. Journal of Mathematical Sciences, 141 (2): 1134-1181.

Diasamidze Y. I., Makharadze S., 2010. Complete semigroups of binary relations defined by X-semilattices of unions. Journal of Mathematical Sciences, 166 (5): 615-633.

Diasamidze Y. I., Makharadze S., 2013. Complete Semigroups of Binary Relations. Kriter Yayınevi, Çanakkale. 520.

Givradze O., 2003. Some properties of a semigroup Bx(D), defined by a semilattice of a class $\sum_1(X, 4)$. Bull. Georgian Acad. Sci. 167 (1): 43-46.

Howie J. M., 2003. Fundamentals of Semigroup Theory. Clarendon Press, Oxford. 158.

Hungerford T. W. 1997. Abstract Algebra. Saunders College Pub., Philadelphia. 588.

Riguet J., 1948. Relations, binaires, fermetures, correspondances. de Galois, Buletin de Socit Mathematique de France, 79: 114-155.

Riguet J., 1950. Quelques propriety's des relations difonctionnelles. Comptes renlus heb-modaires des seances de Academie des Sciences, vol. 230.

Schröder E., 1966. Algebra der Logik (1890–1910), Vols. I–III (reprint), Chelsea.

Whitehead A.N., Russell B., 1925. Principia Mathematica Vol. 1 (2nd ed.). Cambridge University Press. 97.

Yeşil Sungur D., 2014. İkili Bağıntıların Tam Yarı-Gruplarının Sağ Birimleri ve İdempotent Elemanları. Doktora Tezi. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Çanakkale, Türkiye

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Barış ALBAYRAK

Doğum Yeri : Balıkesir

Doğum Tarihi : 25-12-1977

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar

1) Albayrak B., Diasamidze I. Y., Aydın N., 2013. Regular Elements of the Complete Semigroups of Binary Relations of the Class $\sum_7(X,8)$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Volume 86, No.1, 199-216.
2) Albayrak B., Aydın N., Yeşil Sungur D., 2014. Regular Elements of Semigroups Defined by the Generalized X- Semilattice. *General Mathematics Notes*
3) Albayrak B., Aydın N., 2014. Idempotent and Regular Elements of the Complete Semigroups of Binary Relations of the Class $\sum_3$(X,9). *Applied Mathematics*

b) Bildiriler

1) Complete Semigroups of Binary Relations defined by Semilattices of the Class $\sum_3(X,9)$. Modern Algebra and its Applications 19-25 September 2011, Shota Rustaveli State University, Batum/GÜRCİSTAN

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, 2005- 2015

İLETİŞİM

E-posta Adresi : balbayrak77@gmail.com