T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

WEYL MANİFOLDLARI ÜZERİNDE EULER – LAGRANGE VE HAMİLTON HAREKET DENKLEMLERİNİN ANALİZİ

Zeki KASAP

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **05/06/2014**

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN

ÇANAKKALE

Zeki KASAP tarafından Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN yönetiminde hazırlanan ve **05/06/2014** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**Weyl Manifoldları Üzerinde Euler−Lagrange ve Hamilton Hareket Denklemlerinin Analizi**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN ……………………
Başkan

……………………
Prof. Dr. Yakup HACI
Üye

……………………
Doç. Dr. İbrahim TÜRKYILMAZ
Üye

……………………
Doç. Dr. Emin ÖZYILMAZ
Üye

……………………
Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI
Üye

Sıra No:………

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Zeki KASAP

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN'a çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen çok kıymetli eşim Fatma KASAP'a ayrıca kızlarım İclal KASAP ve Feyza KASAP'a ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Zeki KASAP

Çanakkale, Haziran 2014

SİMGELER VE KISALTMALAR

R	Reel sayılar kümesi
M	Diferansiyellenebilir manifold
$F(M)$	M üzerinde bir fonksiyonların kümesi
R^n	$n-$boyutlu Öklid uzay
C^n	$n-$boyutlu kompleks uzay
V	Reel vektör uzayı
TM	Tanjant manifold
T^*M	Kotanjant manifold
T_xM	x noktasındaki tanjant (teğet) uzay
X , Y	Vektör alanları
$\chi(M)$	Vektör alanlar kümesi
$C^\infty(M,R)$	Diferansiyellenebilir reel değerli fonksiyonlar kümesi
∇	Levi$-$Civita konneksiyonu
Φ	Temel $2-$form ya da Kähler form
J	Holomorfik lineer operatör
$\alpha(t)$	Eğri
E^n	$n-$boyutlu Öklid uzayı
$\wedge$	Dış çarpım
g	Metrik tensör
ξ	Semispray
P	Potansiyel enerji
K	Kinetik enerji
δ	Kronecker delta
$L=T-P$	Lagrange fonksiyonu

$H = T + P$	Hamilton fonksiyonu
$V = J\xi$	Liouville vektör alanı
$E_L = V(L) - L$	Lagrange fonksiyonunun enerji fonksiyonu
dE_L	Lagrange enerji fonksiyonunun diferansiyeli
dH	Hamilton enerji fonksiyonunun diferansiyeli
$i_\xi \Phi_L = dE_L$	Lagrangian dinamik formalizmi
$i_{X_H} \Phi = dH$	Hamiltonian dinamik formalizmi
(M, J)	Hemen hemen kompleks manifold
(M, Φ, ξ)	Mekanik sistem
(M, J, ∇)	Weyl yapısı
(M, J, ∇, g)	Tanjant uzayda Hermityen$-$Weyl manifoldu
(M, J^*, ∇, g)	Kotanjant uzayda Kähler$-$Weyl manifoldu
(R_n^{2n}, Φ, ξ)	$W-$kesitsel eğrilikli Weyl mekanik sistem
(R_n^{2n}, W, ∇, g)	$W-$kesitsel eğrilikli uzay form
$((R_n^{2n})^*, W^*, \nabla, g)$	W^*-kesitsel eğrilikli uzay form

ÖZET

WEYL MANİFOLDLARI ÜZERİNDE EULER – LAGRANGE VE HAMİLTON HAREKET DENKLEMLERİNİN ANALİZİ

Zeki KASAP

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi

Danışman : Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN

05/06/2014, 124

Cisimlerin uzay içerisinde hareketlerinin izlediği bir yol (rota, yörünge) vardır. Bilim insanları tarafından cisimlerin rotasının nasıl olacağını tahmin etmek daima merak konusu olmuştur. Bu tezde Weyl uzayı (manifoldu) üzerinde cisimlerin hareketi ile hareket denklemleri incelenecek ve bulunacaktır. Aynı zamanda bu hareket esnasında meydana gelen mekanik ve fiziksel olayların zaman boyutu dikkate alınarak Weyl-matematiksel modellenmesi yapılacaktır. Matematiksel modelleme sonucunda üretilen genelleştirilmiş Euler – Lagrange ve Hamilton hareket denklemlerinin fiziksel ve geometrik bulgularının yorumu yapılacaktır. Ayrıca (korunumlu) mekanik sistemler için elde edilen (kısmi) diferansiyel denklemlerin sembolik hesaplama yazılımları ile çözümü yapılacaktır.

Anahtar sözcükler: Mekanik Sistemler, Lagrangian ve Hamiltonian Formalizm, Euler – Lagrange Denklemleri, Hamilton Denklemleri, Weyl Manifoldları.

ABSTRACT

ANALYSIS OF THE EULER – LAGRANGE AND HAMILTON MOTION EQUATIONS ON WEYL MANIFOLDS

Zeki KASAP

Çanakkale Onsekiz Mart University

Faculty of Science

Doctoral Dissertation

Zeki KASAP

Advisor: Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN

05/06/2014, 124

Movement of objects in space follows a path (route). Prediction of the route of objects has always been an issue of interest to scientists. This thesis examines motion and motion equations of objects on Weyl space (manifold). Furthermore, in this thesis, Weyl-mathematical modeling will be carried out considering time dimension that occurs during this movement of mechanical and physical events. An evaluation is made as to physical and geometric findings of the generalized Euler – Lagrange and Hamilton equations of motion produced as a result of mathematical modeling. Also, at the end of study, (partial) differential equations which have been obtained for (conservative) mechanical systems will be resolved with symbolic computation software.

Keywords: Mechanical Systems, Lagrangian and Hamiltonian Formalism, Euler – Lagrange Equations, Hamilton Equations, Weyl Manifolds.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Yaşadığımız evrenin içinde meydana gelen her olayın gerçekleştiği bir uzay vardır. Fiziksel ve geometrik olayların gerçekleştiği bu uzaya matematik dilinde manifold adı verilir. Manifold kavramı matematiğin, özellikle de geometrinin neredeyse tamamında, analitik mekanikte ve modern teorik fizikte tanım kümesi olarak bilinir. Başka bir ifade ile manifold; dış sınırlamalar altında fiziksel bir sisteme uygun durumların gerçekleşebileceği veya gerçekleşebildiği uzay olarak da tanımlanabilmektedir. Uzayda hareket eden nesnelere de bir sistem denir. Sistem (düzenek) ise birbiriyle etkileşen veya ilişkili olan ve bir bütünü oluşturan cisim veya varlıkların bileşkesidir.

Manifoldlar matematikte özellikle diferansiyel geometri ve topoloji de yeterince küçük bir ölçekte Öklid uzayına çok benzeyen matematiksel bir yapıdır. Öklid uzayının boyutu manifoldun da boyutudur. Örneğin doğru ve çember bir boyutlu, düzlem ve top yüzeyi (küre) iki boyutlu manifoldlardır. Genel bir ifadeyle $n-$boyutlu bir manifoldun her noktasından $n-$boyutlu Öklid uzayına homeomorfik (topolojik dönüşüm) bir komşuluğu vardır. Her ne kadar seçilen bir nokta yakınında manifoldun yapısı Öklid uzayını akla getirse de küresel olarak manifoldun yapısı çok karmaşık şekilde de olabilir. İki boyutlu uzayda bir kürenin yüzeyinde tanımlı bir nokta etrafındaki dairesel alan bir düzlem üzerinde dairesel düz bir alana eşlenebilir. Buna karşın kürenin kendisi düz olmaktan uzaktır yani küre ile düzlem homeomorfik değildirler.

Herhangi bir manifoldun diferansiyellenebilir yapısı haritalar topluluğu olan bir atlasla belirlenir. Bu diferansiyellenebilir yapı sayesinde manifoldlar üzerinde diferansiyel ve integral hesabı yapılabilir. Bu sayede mekanik sistemlere ait dinamik olayların incelenmesine imkân bulunabilir ve hareketler modellenebilir.

Literatürde görünen manifoldlar üzerinde birçok araştırmacı çok sayıda çalışma yapmıştır. Bu çalışmalardan çok kullanılan ve bilinenlerden bazıları; Hermityen, Kähler, Einstein, Heisenberg, Calabi-Yau, Sasakian, Frobenius, Jet, Finsler, Kenmotsu, Lyra, Jordan Ivanov-Petrova, Vaisman ve Weyl manifoldlarıdır.

Yapılan bu çalışmada Weyl manifoldları üzerinde mekanik sistemler ve baz (temel) yapıları ele alınmıştır. Weyl manifoldlarına ait birçok bilgi çeşitli kaynaklarda mevcuttur. Weyl manifoldlarının tanım ve yapısını en açık ve belirgin olarak Folland ve Kadosh, ortaya koymuşlardır (Folland, 1970 ve Kadosh, 1996).

Folland'ın açıklamaları aşağıdaki gibidir. Weyl birleşik alan teorisini formülüze etmek için Riemann geometrisinin bir genellemesini yaparak ortaya koydu (Weyl, 1918). Fakat Weyl'in teorisi fiziksel açıdan hatalı idi. Ancak bu bakış açısı matematiğin güzel bir örneği olarak hatıralarda kaldı. Ayrıca bu teori Riemann olmayan bağlantıların ve kuramların öğretici bir örneğini oluşturdu.

Weyl'in fikirlerinin fiziksel motivasyonu aşağıdaki gibidir. Einstein göreceliğin (rölativite) genel teorisi için fiziksel uzayda bir model olarak Riemann geometrisini kullanmıştır. Ancak evrende her iki nokta arasındaki uzaklığın mutlak (tam, kesin) bir ölçüsü Riemann geometrisi gibi değildir. Çünkü uzayda herhangi iki nokta arasındaki uzaklık mutlak doğrusal değildir. Weyl, Riemann geometrisinde kullanıldığı gibi her bir noktadaki uzaklık (tanjant vektör) için bir skaler çarpım verilmesi yerine skaler çarpımı belirleyen bir pozitif faktör e^f yi önerdi. Böylece bu faktör ile farklı geometrilerdeki rastgele değişikliklerin ortaya konulma imkânına kavuşuldu.

Eğer iki nokta arasındaki söz konusu olabilecek iki farklı tanjant vektörünün büyüklüğünün karşılaştırılması yapılabilirse uzay içinde bir noktaya olan kesin uzaklık bulunabilir. Weyl bu durumun gerçekliğini fark etti ve teorisi sayesinde lineer (doğrusal) bağlantılar ile iki nokta arasındaki uzaklığın benzerlerinin çizebileceğini gösterdi. Böylece belirli iki nokta arasındaki eğriliğin (uzaklık) farklı durumları için bir genelleme yapılabilirdi. Bu sayede her iki nokta arasında bir paralel dönüşüm yapılabilecektir. Weyl'in teorisi ile bir noktaya olan uzaklığı belirtmek için o noktaya olan alternatifli uzaklığın bir yaklaşımı ortaya konuldu (Folland, 1970).

Bu tez çalışmasında Weyl manifoldları üzerinde mekanik sistemlerin incelenmesi için iki farklı baz yapısı kullanılacaktır. İlk yapılacak hesaplamalarda matematiksel modelleme ile Weyl manifoldlarının temel yapısı kullanılarak uzayda hareket eden cisimlerin bilinen (değişmeyen) yörüngeleri için hareketi temsil eden diferansiyel denklemler bulunmuştur. İkinci hesaplamada ise Weyl'in teorisinin e^f yapısı dinamik sistemlerin holomorfik yapılarına aktarılarak matematiksel modelleme yapılmıştır. ile cisimlerin uzaydaki bilinen ve bilinmeyen (değişen) alternatifli yörüngelerine ait genelleştirilmiş hareketlerin modellemesi olan diferansiyel denklemleri literatürde ilk defa bu çalışma ile elde edilmiştir.

Ayrıca korunumlu mekanik sistemler için Weyl'in teoremi dinamik formalizme aktarılarak yeniden cismin uzaydaki dinamik hareketlerine ait diferansiyel denklemler bulunmuştur.

Yukarıda bahsedilen tüm bu çalışmalarda elde edilen ve cisimlerin uzaydaki hareketlerini modelleyen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kapalı formları sembolik hesaplama yazılımları kullanılarak bulunmuştur. Ayrıca kapalı çözümlerdeki fonksiyonlar özel seçilerek grafikleri çizilmiştir.

1.1. Geodezikler

Geodezi, üç boyutlu ve zaman değişkenli uzayda çekim alanı ile birlikte, yeryuvarının ve öteki gök cisimlerinin ölçülmesi ve haritaya aktarılması ile uğraşan bilim dalıdır.

Üzerinde hareketlerin incelendiği konfigürasyon (yapılandırma) uzayda iki nokta arasındaki uzaklığı minimum yapan eğrilere bu uzayın geodezikleri (cisimler için rota veya yörünge) denir. Diğer bir ifade ile belirli iki nokta arasındaki bir uzaklık (eğrilik) tır. Örneğin geodezik bir düzlem için doğru iken bir küre için küre üzerindeki çember yaylarının her biridir. Bu açıdan bakıldığında uzayda fiziki şartlar dikkate aldığında iki nokta arasında çok sayıda alternatifli geodezik bulunabilir.

Geodeziklerin bulunmasında integral hesabının çok etkin bir kullanımı vardır. Ayrıca analitik mekanik geodezikler için alternatif bir yaklaşım sunmaktadır. Analitik mekanik ile mekanik sistemler için dinamik formalizm kullanılarak geodezikleri bulmak mümkündür. Analitik mekanikte geodezikler için dinamik sistemlere ait zamana bağlı hareketi temsil eden Euler – Lagrange ve Hamilton diferansiyel denklemleri modellenir. Yapılan bu çalışmada uzayın geodeziklerini bulmak için Weyl – Euler – Lagrange ve Weyl – Hamilton diferansiyel denklemleri elde edilmiştir.

1.2. Tezin Amacı

Bu tezin yapılmasındaki temel amaç; uzaydaki dinamik cisimlerin (parçacıkların) zamana bağlı hareketi gösteren diferansiyel denklemlerinin Weyl benzerlerini (analogları) yaparak bulmaktır. Açıkçası, Weyl manifoldları üzerinde mekanik sistemlerin zamana bağlı hareketi temsil eden diferansiyel denklemleri elde etmek, ayrıca geometrik ve fiziksel sonuçlar üretmektir. Ayrıca elde edilen denklemleri sembolik hesaplama yazılımları yardımı ile çözmek ve grafiklerini çizmek amaçlanmıştır.

Tezin amacına temel teşkil eden tarihsel süreç aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

Araştırmacılar uzaydaki (evren) cisimlerin hareket mekanizmalarını anlamak, açıklamak ve yorumlamak istemişlerdir. Bu amaca ulaşmak için matematik ve fizik ilk başvurdukları bilim dalları olmuştur. Çünkü matematik ile uzaydaki cisimlerin hareketlerini denklemler yardımıyla modelleyebilmek ve fizik ile de uzaydaki olayların nasıl meydana geldiğini açıklayabilme imkânına kavuşulmuştur.

Matematik sayıların ve şekillerin ilmi olarak tanımlanır. Matematik; biçim, sayı ve çoklukların yapılarını, özelliklerini ve aralarındaki ilişkilerini inceleyen bilimdir ve sayı bilgisi, cebir, uygulamalı matematik ve geometri gibi dallara ayrılır. Uçak ve motor modellemelerinde, uydu yapımında ve daha genel olarak dinamik sistemlerin değişimlerinin ölçümünde uygulamalı matematiğin en etkin araçları olan diferansiyel denklemler ve sayısal analiz teknikleri kullanılır.

Fizik ise maddeyi, maddenin uzay-zaman da hareketini enerji ve kuvveti de kapsamak üzere bütün ilgili kavramlarla birlikte inceleyen doğa bilimidir. Daha genel bir ifadeyle, evren ile ilgili nasılları cevaplamak için doğanın genel bir analizidir. Fizik biliminde cisimlerin hareket mekanizmalarını zamana bağlı hız denklemleri temsil eder.

Fizikte hız ile hareket aynı anlama gelmemektedir. Hız; hareketli bir cismin (nesnenin) birim zamanda aldığı yoldur. Hız, vektörel bir büyüklüktür. Yönü ve şiddeti ile ifade edilir. Ayrıca alınan yolun zamana göre değişimi olarak da tarif edilir. Hareketli cismin yörüngesi doğrusal, dairesel, elips veya eğri biçimde olabilir. Alınan yol doğrusal ise hız çizgisel, dairesel ise açısal olur. Hareketli cismin herhangi bir andaki hızına ani hız, yol boyundaki hızların ortalamasına da ortalama hız adı verilir. Hareketli bir cismin birim zamanda aldığı yola sürat denir. Sürat, hareketli cisimlerin (varlıkların) belirli bir yolu ne kadar zamanda aldığını belirler ve vektörel bir büyüklük değildir. Sürati hesaplayabilmek için bir cismin hareketi boyunca aldığı yolu ve cismin bu yolu alması için geçen zamanın bilinmesi gerekir. Bir cismin hareketi sırasında izlediği yola ise yörünge (rota) denir.

Fizik kendi içinde modern fizik ve klasik fizik olarak dallara ayrılır. Modern fizik; kuantum ve görecelik (rölativisttik) mekaniği ilkelerini kullanır. Kuantum mekaniği mikro düzeyde cisim veya parçacıkların hareketlerini, görecelik mekaniği ise makro düzeyde ışık hızına yakın hızlarda hareket eden cisimlerle ve sistemlerle ilgilenmektedir.

Klasik fizik; klasik mekanik ilkeleriyle cisimlerin hareketlerini ve onlara etki eden kuvvetleri araştırmaktadır. Mekanik; gündelik hayatta karşılaştığımız boyutlardaki cisimlerin konumlarının zamanla değişmesi veya durum ve yapılarının bozulmadan kalabilmesi ile ilgili problemleri inceler. Bu açıdan bakıldığında tüm fizik mekanik olarak görülebilir. Klasik mekanik atomlarla karşılaştırıldığında oldukça büyük cisimlerle ve ışık hızından çok daha düşük hızlarla ilgilenir.

Mekanik; kinematik, statik ve dinamik olmak üzere üçe ayrılır. Kinematik, cisimlerin konumlarının zamanla değişimini yani hareketlerini, statik cisimlerin dengede kalabilmeleri için gerekli koşulları, dinamik ise cisimlerin konumlarının değişmesine yol açan sebepler bilindiğinde cisimlerin hareketlerinin özelliklerinin nasıl bulunacağını yani parçacığın hareketi ile buna etkiyen kuvvet arasındaki bağıntıları incelemektedir (Rızaoğlu ve Sünel, 2008).

Birçok araştırmacı uzaydaki cisimlerin hareket mekanizmaları ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Mekaniğin genel yasalarını ortaya koyan ise Newton $(1717-1738)$ olmuştur. Newton'un yasaları aşağıdaki şeklinde olup ve ampirik (deneye dayalı) yasalar olarak bilinir.

1. Bir cisim üzerine dengelenmemiş bir dış kuvvet etkimedikçe, cisim hareket durumunu (durağanlık veya sabit hızlı hareket) korur.

2. Bir cisim üzerindeki net kuvvet, cismin kütlesi (m) ile ivmesinin (a) çarpımına eşittir $F = ma$.

3. Her etkiye karşılık eşit ve zıt bir tepki vardır.

Newton yasaları üzerine kurulan mekanik 19. yüzyılda d'Alembert $(1717-1783)$, Lagrange $(1736-1813)$, Jacobi $(1804-1851)$, Hamilton $(1805-1865)$ olmak üzere pek çok araştırmacının katkıları ile nerede ise istenilen ideal bir yapıya kavuşturulmuştur.

19. yüzyılda geliştirilen sistematik yapı bugün analitik mekanik veya analitik dinamik ve Newton yasaları üzerine kurulan yapı ise klasik mekanik veya Newton mekaniği olarak bilinmektedir.

Newton'un denklemlerinin vektörel bir yapıda olması sebebiyle uygulamada toplam kuvvetin bilinmesine gereksinim duyulması en büyük güçlüğü oluşturmaktadır. Bu nedenle daha basit skaler büyüklüklerin kullanıldığı, kuvvet vektörünün içinde doğrudan yer almadığı ilke ve yöntemlerin bulunmasına çalışılmıştır. Bulunan ve zamanla daha da geliştirilen bu ilke ve yöntemlerin tümü bugün analitik dinamik olarak bilinmektedir. Analitik dinamiğin verdiği sonuçlar Newton denklemlerinin verdiği sonuçların aynıdır. Analitik dinamik temel olarak $\text{Euler}-\text{Lagrange}$ ve Hamilton denklemlerinden oluşmaktadır.

$\text{Euler}-\text{Lagrange}$ denklemleri 1750 yıllarında kendi çalışmaları ile bağlantılı olarak eş zamanlı eğri (izokron-tautochrone) için İsviçreli matematikçi Leonhard Euler ve İtalyan matematikçi Joseph-Louis Lagrange tarafından geliştirilmiştir. $\text{Euler}-\text{Lagrange}$ yöntemi mekaniğin skaler büyüklükleri kullanarak yeniden kurulması açısından önemlidir. Euler – Lagrange yöntemi mekanik ile ilgili problemlerin çözümünde çok başarılıdır. Ancak bu yöntemin en önemli yönü Hamilton yönteminin çıkışına yol açmasıdır.

Euler – Lagrange yöntemi mekanik sistemlerin dinamik hareketlerinin denklemlerini elde etmeyi kolaylaştırmasına rağmen bu denklemlerin çözümlerinde sistematik bir yol göstermemiştir.

Hamilton yöntemi ile elde edilen denklemler birinci mertebeden ve Euler – Lagrange yöntemi ile elde edilen denklemler ise ikinci mertebedendir. Hamilton yöntemi ile elde edilen denklemlerin doğrudan çözülebilmeleri açısından Euler – Lagrange yöntemiyle elde edilen denklemlere göre daha basittir. Hamilton denklemlerinin fizikteki asıl önemi kolay integral edilebilmelerini sağlayan yöntemlerin geliştirilmesine açık olmasıdır. Ayrıca bu denklemler mekaniğin dışında örneğin mikroskobik cisimlerin arasında süratleri ışığın süratiyle kıyaslanamayacak kadar küçük olan cisimlerin davranışlarını açıklayan kuantum mekaniği alanında da başarıyla uygulanabilmesidir.

Klasik mekanik; cisimlerin hareketlerini, ancak cisimlerin boyutlarının ve süratlerinin belirli sınırlar içinde kalması durumunda deneysel ve gözlem sonuçlarıyla tam olarak uyuşan bir biçimde açıklayabilir. Sınırların dışına çıkıldığında verdiği sonuçlar deney ve gözlem sonuçlarıyla uyuşmaz. Bu sebeple klasik mekanik yerini daha sonra kurulan teorilere bırakır. Bunlar özel ve genel görecelik teorileri ile kuantum mekaniği ve kuantum alanları teorileridir. 20. yüzyılda Riemann, Einstein ve Weyl yaptığı çalışmalar ile mekaniğe birçok yenilik getirmişlerdir.

Riemann, matematiğin analiz ve diferansiyel geometri dallarına çok önemli katkılarda bulunmuştur. Daha sonra izafiyet teorisinin geliştirilmesinde önemli rol oynamıştır. Riemann iki nokta arasındaki doğrusal uzaklığın ölçülmesi için iç çarpımı tanımlamıştır.

Einstein, uzaydaki tüm cisimlerin hareketlerini açıklamak için çalışmalar yapmıştır. Özel görecelik (izafiyet) teorisini ortaya koymuştur. Einstein'a kadar dünya dâhil dünyadaki her şeyin genişlik, derinlik ve yükseklik olmak üzere üç boyutlu olduğu bilinmekte idi. Einstein buna dördüncü olarak zaman boyutunu ekledi. İşte bu dört boyutlu uzaydan oluşan sistem izafiyet teorisini oluşturur. Bunun anlamı, uzayda ilerlendikçe bulunulan yere göre günlerin, ayların ve yılların uzayıp kısalması mümkündür. Yani zaman her yerde mutlak olarak birbirine eşit değildir yani hız arttırılırsa gidilen yere varış zamanı azalacaktır.

Einstein fiziksel uzayda iki nokta arasındaki uzaklık (uzunluk) için Riemann geometrisini bir model olarak kullanmıştır. Ancak evren gerçekte bir Riemann manifoldu gibi değildir. Evrenin şeklinin küresel olması ve cisimlerin harita üzerindeki gibi kuş bakışı hareket etmesi mümkün olmadığından herhangi iki nokta arasındaki uzaklığın mutlak ölçümü yoktur. Yani her iki nokta arasındaki uzaklık her zaman doğrusal değildir. 1918'de Weyl'in kabul ettiği: g ve g' iki metrik, f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere e^f pozitif olmak şartı ile

$$e^f g = g' \tag{1.1}$$

$$F\left(e^f g\right) = F(g) - df \tag{1.2}$$

(F bir fonksiyon ve df, f nin diferansiyeli) konformal (açıyı koruyan) dönüşümle Riemann geometrisini genelleyip tüm uzay için bir teori ortaya koydu (Folland, 1970; Dragomir ve Ornea, 1997).

Weyl'e göre eğer iki nokta arasında doğrusal olmayan özel bir eğrilik (uzaklık) varsa açıyı koruyan paralel bir dönüşümle (konformal) bu noktalar arasındaki uzaklık vektörel (doğrusal) hale dönüştürülebilir. Bu sebeple Weyl'in teorisi iki nokta arasındaki (etrafındaki) uzaklığı belirlemede genel bir yaklaşım ortaya koymaktadır.

Kısaca özetlenirse, bu tezde fiziksel kanun ve prensipler göz önüne alındığı konfigürasyon uzayında Weyl'in teoremini kullanarak cisimlerin uzaydaki hareketlerine ait konformal Weyl – Euler – Lagrange ve Weyl – Hamilton hareket denklemleri bulunacaktır. Yapılan bu çalışmada aşağıda belirtilen durumlar ele alınmıştır.

1. Cisimlerin yörüngelerinin değişmediği durumları matematiksel modelleme,

2. Cisimlerin her türlü yörüngesine ait durumları matematiksel modelleme,

3. Korunumlu dinamik sistemleri matematiksel modelleme,

4. Hareketi temsil eden ve matematiksel modelleme ile elde edilen diferansiyel denklemleri sembolik hesaplama yazılımları yardımı ile çözme.

Yapılan bu çalışmanın sonunda ise Weyl uzayında meydana gelen mekanik, geometrik ve fiziksel olayların modelleme sonucunda üretilen diferansiyel denklemler sembolik hesaplama yazılımları kullanılarak çözülmüştür. Ayrıca elde edilen çözümlerin grafikleri çizilmiş ve yorumlanmıştır.

BÖLÜM 2
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Manifoldlar (uzay) üzerine aktarılan mekanik sistemlere ait modellenen hareket denklemleri astronomi, fizik ve matematikte çok önemli bir yere sahiptir. Bu birliktelik sadece matematiğin düzenli formülasyonu olarak değil aynı zamanda hareketin görecelik ve fiziksel anlamını daha iyi anlamaya katkı sağlamaktadır. Çünkü görecelik ve fiziksel dünyada meydana gelen olayların oluş nedenleri kadar nasıl olduğu veya nasıl gerçekleştiği ve hareketin nasıl bir geometrik rota ile devam edeceği de önem arz etmektedir.

Görecelik ve fiziksel olayların veya hareketlerin modellenmesi gerektiğini düşünen araştırmacılar makro ve mikro cisimlerin hareket mekanizmaları ve yörüngelerinin nasıl olacağına ilgi duymuş ve hala duymaktadırlar. Araştırmacılar fiziki uzay üzerinde modelleme yapabilmek için mekanik ilkelerine ve olayların geometrilerine uygun türevli ifadeleri içeren diferansiyel geometri ve diferansiyel denklemlere başvurmuşlardır. Bu yüzden hareketlerin matematiksel ifade karşılığı olan diferansiyel geometri ile mekanik iç içe girmiştir.

İlk insanların hayatında dahi mekaniğin uygulama alanı bulduğu bilinmektedir. İnsanlar tarihsel süreç içerisinde mekanik ile cisimlerin konum ve momentumlarını kullanarak çeşitli kuvvet alanları altında nasıl hareket edilmesi gerektiğini bulmaya çalışmışlardır.

İnsanlık tarihinde ilk bilinen çalışmalar Arşimet’e aittir. Arşimet (M.Ö.287 – M.Ö.212) matematikçi, fizikçi, astronom, filozof ve mühendistir. Bir hamamda yıkanırken bulduğu iddia edilen suyun kaldırma kuvveti bilime en çok bilinen katkısıdır. Suyun kaldırma kuvveti; cismin batan hacmi, içinde bulunduğu sıvının yoğunluğu ve yerçekimi ivmesinin çarpımına eşittir. Ayrıca, pek çok matematik tarihçisine göre integral hesabın kaynağı da Arşimet'tir. Kaldıraçları ve suyun kaldırma kuvvetini kapsayan tarihteki ilk yazılı mekanik prensipleri Arşimet’e aittir. Arşimet’in makara, eğik düzlem ve somun anahtarı ile ilgili çalışmaları da antik metinlerde kaydedilmiştir.

Arşimet’ten sonra gelen İbn-i Heysem, İbn-i Sina, İbn Bacce, El-Cezerî gibi bazı doğulu araştırmacılar ile Galileo, Kepler, Leonardo da Vinci, Varignon, d'Alembert, Stevinus, Newton, Lagrange gibi bazı batılı araştırmacıların çalışmaları sayesinde mekanik neredeyse bugünkü seviyesine ulaşmıştır.

Mekaniğin kökleri çok eskiye dayansa da başlangıcının Newton'un prensipleri olduğunu kabul etmek doğru bir yaklaşımdır. Sonraki zamanlarda Euler, Lagrange, Jacobi, Hamilton, Poisson, Maxwell, Boltzman, Einstein ve Weyl gibi birçok araştırmacı tarafından mekaniğe çok farklı bakış açıları getirilmiştir. Birçok alanda bu yenilikler başarılı bir biçimde sistemlere uygulanmıştır.

2.1. Mekanik Sistemler Üzerindeki Literatür

Bu kısımda analitik mekanik alanında daha önce yapılan çalışmalara ait bir özet verilmiştir.

Newton $(1642-1727)$ fizikçi, matematikçi, astronom, mucit, filozof ve ilahiyatçıdır. 1687'de yayınlanan kitabı *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* ile klasik mekaniğin temelini atılmıştır. Bu kitap tarihin en önemli bilimsel kitaplarından biri olmuştur. Newton kitabında evrensel kütle çekimini ve hareketin üç kanununu ortaya koymuştur. Sonraki üç yüzyıl boyunca bu bakış açısı bilim dünyasına egemen olmuştur. Newton; dünyadaki cisimlerin hareketleri ile gökyüzündeki cisimlerin aynı doğal yasalardan yönetildiklerini ve kendi kütle çekim kanunu ile Kepler'in gezegen hareketleri kanununun arasındaki tutarlılıkları göstermiştir. İlk yansıtmalı teleskobu Newton geliştirmiştir.

Lagrange $(1736-1813)$ astronomi, güneş sistemi, mekanik, dinamik, akışkanlar mekaniği, olasılık ve genel matematiğin temelleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Analiz, sayılar kuramı, klasik mekanik ve gök mekaniği alanlarına önemli katkılarda bulunmuştur. Sayılar kuramında her pozitif tamsayının dört adet tam karenin toplamı olarak yazılabileceğini göstermiştir. Bu konuda analitik değişkenler hesabını bulmuş ve kuramını dinamik problemlerine uygulamıştır. 1788 yılında *Analitik Mekanik* isimli kitabını yayınlamıştır. Bu kitapta Lagrange'ın mekanik alanında yapmış olduğu bütün çalışmalar özetlenmiştir. Mekaniği matematiksel analizin bir koluna dönüştürmüştür. Kitabında geometriden hiçbir şekilde yararlanmamıştır. Ayrıca Newton kuramının gezegenlerin devinimine uygulanabileceğini göstermiştir. Newton hareket denklemlerini farklı bir yöntemle ifade etmiştir. Lagrange'ın geliştirdiği bu yönteme "*Lagrange Mekaniği*" adı verilmiştir. Lagrange mekaniğinde yapılan iş Newton mekaniğindeki ile aynıdır. Fakat koordinat sistemi değiştiği zaman denklemlerin formu değişmemektedir. Lagrange mekaniğinin uygulamalarıyla dalga yayılımı ve eğrilerin maksimum ve minimum problemlerinin sonuçlarını tanıtmıştır.

Hamilton (1805 – 1865) matematikçi, fizikçi ve astronomdur. Optik ve dinamik üzerine son derece özgün çalışmalar yapmıştır. Optik aletlerin kuramını gerçekleştirmiştir. Hamilton hem optiği hem de dinamiği tek bir genel ilkeden çıkarmaya çalışmıştır. Optik ve dinamiği varyasyon hesabının iki yönü haline getirmiştir. Bir diğer önemli katkısı fizik ve mekanik yasalarının bir integralin değişiminden türetilmesidir. Modern görecelik ve kuantum mekaniğinin altında yatan ilke Hamilton fonksiyonlarıdır.

Riemann (1826 – 1866) analiz ve diferansiyel geometri alanlarına çok önemli katkılarda bulunmuştur. Söz konusu katkıları daha sonra izafiyet teorisinin geliştirilmesinde önemli rol oynamıştır. Ayrıca belirli integral için çok önemli bir yaklaşım getirmiştir. Riemann ismi aynı zamanda zeta fonksiyonu, Riemann hipotezi, Riemann manifoldları ve Riemann yüzeyleri ile de bağlantılıdır.

Einstein (1879 – 1955) Newton mekaniğinin yasalarını değiştiren ve kütle ile enerjinin eşdeğerli olduğunu öne süren özel görecelik, eğrisel ve sonlu olarak düşünülen dört boyutlu bir evrene ait çekim teorisini veren genel görecelik, elektro-manyetizma ve yerçekimini aynı alanda birleştiren daha geniş kapsamlı teori denemeleri yapmıştır. İlk iki teorinin geçerliliği atom fiziği ve astronomi alanında yapılan deneylerle çok başarılı bir biçimde sınanmıştır.

Weyl (1885 – 1955) matematik ve fizikçi olup Hilbert ve Minkowski tarafından yetiştirilmiştir. Weyl'in ana çalışma alanları kuramsal fizik ve sayılar teorisidir. Weyl yaptığı çalışmalarla 20. yüzyılda bilim adamlarını en fazla etkileyenlerden biri olmuştur. Weyl diferansiyel geometri, uzay-zaman, madde, filozofik, mantık, simetri ve matematik tarihi gibi alanlardaki çalışmaları kitap olarak bastırılmıştır. Ayrıca elektromanyetizma yasalarını genel görecelik kuramı ile birlikte düşünen ilk araştırmacılardandır.

Klein (1962, 1968a, 1968b) Lagrange mekanik sistemi için yeni bir bakış açısı geliştirmiştir. Lagrangian formalizmini,

$$i_{\xi}\Phi_L = dE_L \tag{2.1}$$

formunda ifade etmiştir. Klein’in Lagrangian formalizmini yeniden yorumlayarak hemen hemen tanjant geometrinin gelişimine ve özel dış türev hesaplarına katkıda bulunmuştur. Daha sonra bu bakış açısı yüksek dereceden tanjant demetlerine genişletilmiştir. Ayrıca Hamilton mekanik sistemi için kotanjant demeti kullanmış ve Hamiltonian formalizmini

$$i_{X_H}\Phi = dH \tag{2.2}$$

şeklinde ortaya koymuştur.

Crampin (1981) Euler$-$Lagrange denklemlerinin diferansiyel geometrisi ve Lagrangian dinamiğinin ters problemi üzerine bir çalışma yapmıştır.

De Leon ve Rodrigues (1986) hemen hemen tanjant geometri (TM üzerinde $J^2 = 0$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ = m$ ile verilen TM üzerindeki (1,1) tipinden bir J tensör alanı) ve yüksek dereceden mekanik sistemler üzerine çalışmışlardır. Ayrıca, hemen hemen tanjant geometride yüksek dereceden mekanik sistemlerin bazı sonuçlarını ortaya koydular.

De Leon (1987) ikinci mertebeden diferansiyel denklemler ve korunumsuz Lagrangian mekaniği çalışmasında Lagrange teorisinin geometrik formülüzasyonunu incelemiştir.

De Leon ve Lacomba (1989) Lagrange alt manifoldları ve yüksek mertebeden mekanik sistemler üzerine bir çalışma yapmışlardır. Ayrıca yüksek mertebeden Lagrange ve Hamilton sistemlerinin (zamana bağlı ve bağımsız) simplektik yüksek mertebeden tanjant demetlerinin Lagrangian alt manifoldları üzerinde durmuşlardır.

De Andres ve ark. (1991) fiber manifoldlar ve bağlantılarının terimleri üzerinde alan teorisinin geometrik formülünü kurmuştur. Bu formülasyon ile tek alan teorisininim algoritmasını inşa edip geliştirmişlerdir. Bu algoritmayı mekanik sistemlere genişletmişlerdir.

De Leon ve ark. (1991a) zamana bağlı dejenere Lagrangian'ların kısıtlanması üzerinde çalışma yapmışlardır.

De Leon ve ark. (1991b) yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için Lagrangian dinamiğinin ters problemine geometrik bir yaklaşım sunmuşlardır.

De Leon ve Rodrigues (1992) düzenli Lagrangian ile ilgili yüksek mertebeden tanjant demetlerinde konneksiyonları ve yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için Lagrangian dinamiğinin ters problemi üzerine bir çalışma yapmışlardır.

Özer (1994) bağlantılı integre edilebilir Hamilton sistemlerini incelemiştir.

Civelek (1996) vektör demetlerinde Lagrange ve Hamilton denklemlerini incelemiştir.

Shiriaev ve ark. (2000) ters sarkacın pasifliği tabanlı kontrolün küresel özellikleri incelemiştir. Çalışmalarında Lagrange ve Hamilton sistemlerinin belli bir hedef pozisyonunun istikrar problemini ele almışlardır.

Adak, Dereli ve Ryder (2001)'de nötrino salınımının yer çekimi problemi için Riemann – Cartan uzay-zaman ve dinamik faz hesabını Dirac – Hamilton fonksiyonunu kullanarak incelediler.

Tekkoyun (2002) genelleştirilmiş Kähler manifoldları üzerinde Euler – Lagrange ve Hamilton denklemlerinin yüksek mertebeden liftlerini incelemiştir.

Panza (2003) mekanik sistemleri tarihsel süreç içerisindeki gelişim adımlarını incelemiştir.

Aycan (2003) $J^k\pi$ jet demeti üzerinde hemen hemen tanjant yapı verilerek Euler – Lagrange ve Hamilton denklemlerini elde etmiştir. Daha sonra Euler – Lagrange ve Hamilton denklemlerini lift teorisini kullanılarak genişletilmiş jet demetlerine genelleştirmiştir. Zamana bağlı Euler – Lagrange denklemleri oluşturulmuş ve benzer şekilde bu denklemler zamana bağlı genişletilmiş jet demetleri üzerinde ifade edilmiştir.

Tekkoyun (2005) para – Kähler manifoldları üzerinde para – kompleks Euler – Lagrange ve Hamilton denklemlerini elde etmiştir. Aşağıdaki para – kompleks yapılarını baz alarak,

$$J\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = -j\frac{\partial}{\partial z^i}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{z}^i}\right) = j\frac{\partial}{\partial \dot{z}^i},$$

$$J^*\left(dz^i\right) = -j dz^i, \; J\left(d\dot{z}^i\right) = j\,\dot{z}^i \tag{2.3}$$

para – Euler – Lagrange ve para – Hamilton denklemlerini,

$$j\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial z^i}\right) + \frac{\partial L}{\partial z^i} = 0, \; j\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^i} = 0,$$

$$\frac{dz_i}{dt} = -j\frac{dH}{d\dot{z}_i}, \; \frac{d\dot{z}_i}{dt} = j\frac{dH}{d\dot{z}_i} \tag{2.4}$$

şeklinde bulmuştur. Ayrıca bu mekanik sisteme ait bazı geometrik ve fiziksel sonuçlar vermiştir.

Adak ve ark. (2006) bir Riemann – Cartan uzay-zaman ve dinamik fazların hesabında

Dirac-Hamiltonian fonksiyonunu göz önüne alarak metriksiz ve sıfırsız simetrik

tele − paralel çekim modelini geliştirmişlerdir. Metriksiz tensörde Lagrangian kuadratik yapıları kullanmışlardır.

Tekkoyun (2006a) para − Kähler manifoldlarda Poisson parantezli para − kompleks Hamilton hareket denklemlerini,

$$J\left(\partial/\partial x^i\right)=\partial/\partial y^i,\ J\left(\partial/\partial y^i\right)=\partial/\partial x^i,\ \ \text{ve}\ \ J^*\left(dx^i\right)=-dy_i,\ J^*\left(dy^i\right)=-dx^i \tag{2.5}$$

yapılarını kullanarak,

$$dz_i/dt=-\{z_i,H\}\ \text{ve}\ d\dot{z}_i/dt=-\{\dot{z}_i,H\} \tag{2.6}$$

olarak hesaplamıştır.

Tekkoyun (2006b) kısıtlanmış reel Hamilton denklemleri kompleks versiyonuna genellemiştir.

$$J^*\left(dz_i\right)=idz_i,\ \ J^*\left(d\bar{z}_i\right)=-id\bar{z}_i \tag{2.7}$$

yapılarını kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\frac{dz_i}{dt}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial H}{\partial \bar{z}_i}+\Lambda^a\left(B_a\right)_i\right),\\
&\frac{d\bar{z}_i}{dt}=-\frac{1}{i}\left(\frac{\partial H}{\partial z_i}+\Lambda^a\left(A_a\right)_i\right),\\
&\left(A_a\right)_i\frac{dz_i}{dt}+\left(B_a\right)_i\frac{d\bar{z}_i}{dt}=0,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

kısıtlı Kähler manifoldlarda kompleks Hamilton hareket denklemlerini bulmuştur.

Tekkoyun ve Görgülü (2006) yüksek mertebeden tam ve dikey kompleks liftlerin Euler − Lagrange ve Hamilton denklemlerini Kähler manifoldlarda ortaya koymuşlardır. Bunu elde ederken,

$$J_0^{c^k}\left(\frac{\partial}{\partial z^{ri}}\right)=i\frac{\partial}{\partial z^{ri}},\ \ J_0^{c^k}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{ri}}\right)=-i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{ri}} \tag{2.9}$$

$$J_0^{v^k}\left(Z^{c^k}\right)=\left(J_0 Z\right)^{v^k}, \quad J_0^{c^k}\left(Z^{c^k}\right)=\left(J_0 Z\right)^{c^k} \tag{2.10}$$

ile verilen yapılarını kullanarak Euler – Lagrange ve Hamilton denklemlerini;

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L^{c^k}}{\partial z^{ri}}\right)-\frac{\partial L^{c^k}}{\partial z^{ri}}=0, \quad i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L^{c^k}}{\partial \dot{z}^{ri}}\right)+\frac{\partial L^{c^k}}{\partial \dot{z}^{ri}}=0 \tag{2.11}$$

$$\frac{dz_{ri}}{dt}=\frac{1}{i}\frac{\partial H^{c^k}}{\partial \bar{z}_{ri}}, \quad \frac{d\bar{z}_{ri}}{dt}=-\frac{1}{i}\frac{\partial H^{c^k}}{\partial z_{ri}} \tag{2.12}$$

olarak elde ettiler.

Adak ve Sert (2006) Riemann olmayan uzay-zaman geometrilerinde kütle çekim teorileri Dahl′in Lagrangian altmanifoldlarında Hamilton-Jacobi denkleminin çözümleri üzerine durmuşlardır.

Blair ve Draghici (2009) hemen hemen kompakt Kähler manifoldların integrallenebilmesi üzerinde Kirchberg'in bazı yeni sonuçlarını biraz daha farklı bir sunum ile $4-$boyutlu Kirchberg'in teoremin uzantısı olarak verdiler.

Tekkoyun (2009a)'de Kähler manifoldları üzerinde kompleks Hamilton mekanik sistemlerinin liftlerini incelemiş ve k. mertebeden dikey liftlerin zamana bağlı kompleks Hamilton denklemlerini aşağıdaki gibi

$$\frac{dz_{r_i}}{dt}=\frac{1}{i}\frac{\partial H^{v^k}}{\partial \bar{z}_{0_i}} \quad \text{ve} \quad \frac{d\bar{z}_{r_i}}{dt}=-\frac{1}{i}\frac{\partial H}{\partial z_{0_i}} \tag{2.13}$$

bulmuştur.

Tekkoyun (2009b) sabit J eğriliğin para – Kähler manifoldlarda bir modeli için R_n^{2n} üzerinde Euler – Lagrange ve Hamilton denklemlerini ortaya koymuştur. Aşağıdaki

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)=-\frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{ve} \quad J^*\left(dx_i\right)=dx_i, \; J^*\left(dy_i\right)=-dy_i \tag{2.14}$$

yapılarını kullanarak,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_j}=0,\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y_j}\right)+\frac{\partial L}{\partial y_j}=0 \text{ ve } \frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i},\ \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad \textbf{(2.15)}$$

hareket denklemlerini ortaya koymuştur.

Tekkoyun (2009c) mekanik sistemlerin modellenmesinde Lagrangian ve Hamilton sistemlerinin tanjant ve kotanjant demetlerindeki dikey ve tam durumlarını incelemiştir. Bunu yaparken,

$$F\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)=-\frac{\delta}{\delta y^i},\ F\left(\frac{\delta}{\delta y^i}\right)=\frac{\delta}{\delta x^i} \text{ ve } F^*\left(dx^i\right)=-\delta y^i,\ F^*\left(\delta y^i\right)=dx^i \qquad \textbf{(2.16)}$$

yapılarını kullanarak,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)+\frac{\delta L}{\delta x^i}=0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial y^i}=0,\text{ ve } \frac{dx^i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y^i},\ \frac{dy^i}{dt}=-\frac{\delta H}{\delta x^i}, \qquad \textbf{(2.17)}$$

Euler – Lagrange ve Hamilton denklemlerini bulmuş geometrik ve fiziksel sonuçlarını ortaya koymuştur.

Tekkoyun ve Sarı (2010) kompleks ve parakompleks manifoldlar üzerindeki polinom yapıları kullanılarak tanjant demetlerinin geometrileri üzerinde mekanik sistemleri aktarmışlardır.

$$P^{\mp}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)=-e^{\mp}\frac{\partial}{\partial z_i},\ P^{\mp}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right)=e^{\mp}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \text{ ve } P^{*\mp}\left(dz^i\right)=-e^{\mp}dz^i,\ P^{*\mp}\left(d\bar{z}^i\right)=-e^{\mp}d\bar{z}^i \qquad \textbf{(2.18)}$$

yapılarını kullanarak,

$$\left(e^+-e^-\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial z^i}\right)+\frac{\partial L}{\partial z^i}=0,\ \left(e^+-e^-\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{z}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial \bar{z}^i}=0 \qquad \textbf{(2.19)}$$

$$\frac{dz_i}{dt}-\left(e^+-e^-\right)\frac{\partial H}{\partial \bar{z}_i}=0,\ \frac{d\bar{z}_i}{dt}-\left(e^+-e^-\right)\frac{\partial H}{\partial z_i}=0 \qquad \textbf{(2.20)}$$

Euler – Lagrange ve Hamilton hareket denklemlerini bulmuşlardır.

Tekkoyun ve Çelik (2013) Finsler manifoldlarının hemen hemen Kähler modeli üzerinde Euler – Lagrange ve Hamilton denklemlerinin yeni bir analogunu ortaya koymuşlardır.

2.2. Weyl Manifoldları Üzerindeki Literatür

Folland (1970) Weyl'in fikirlerinin yapısını, klasik tanımını ve özelliklerini düzenli bir şekilde tanıtmıştır. Ayrıca bir Weyl yapısının kartezyen doğrultusundaki konneksiyonunun denklik sınıfını göstermiştir. Modern araçlar ve notasyonlar kullanarak Weyl'in yapısına ait klasik sonuçları ispatlamıştır.

Pedersen ve ark. (1993) Kähler-Einstein manifoldları üzerinde uygun kompleks yapılar ile Einstein-Weyl manifoldlarının tor (torus) demeti olduğunu gösterilmişlerdir.

Kadosh (1996) Weyl geometrisi hakkında bir doktora tez çalışması yapmıştır. Bu çalışmada Weyl manifoldları ile Riemann geometrisini karşılaştırmıştır.

Wheeler (1997) konformal bağlantı için Maurer-Cartan yapı denklemlerini ve sıfır eğrilikli çözümlerini her bir parçacık için Hamilton yapı denklemleri oluşturarak türetmiştir.

Bokan ve ark. (1997) konformal dönüşümlü Weyl manifoldları için Laplace tipi doğal operatörleri tanımladılar. Weyl geometrisi içinde bu operatörleri inşa etmek için ısı denkleminin asimptotiklerini kullandılar.

Madsen ve ark. (1997) yaptıkları çalışma ile en az dört-boyutlu simetri grubu ile kompakt dört-boyutlu Einstein-Weyl manifoldlarının geometrik bir sınıflandırmasını vermişlerdir.

Ornea (1998) yerel konformal Kähler şartlarının kuaterniyon geometri uzantılarını incelemiş ve onun kompleks manifoldlar üzerinde olduğunu tespit etmiştir.

Le Brun (1998) bir kompakt Riemann 4-manifoldunın Weyl eğriliğinin L^2-normu için Seiberg$-$Witten denklemlerinin önemsiz olmayan alt sınırının çözüm yolunun olduğunu göstermiştir.

Yoshioka (1998) Weyl manifoldu üzerinde kontakt yapısını kullanarak derece operatör alanlarını tanıtmıştır.

Glanc ve Jakubowicz (2000) genelleştirilmiş Reissner$-$Nordstrom uzay-zaman Weyl eğrilik tensörü için Penrose varsayımı ile ilgili tanımlar vermiş ve teoremleri kanıtlamışlardır.

Wojtkowski (2000) W$-$akımlarını sunmuş ve bir Weyl manifoldu üzerinde geodezik akışı değiştirerek onların izokinetik dinamikleri ile aynı olduğunu göstermiştir. Ayrıca negatif eğrilik ile Weyl yapısının ve hiperbolik $W-$akışları arasında bir bağlantı kurmuştur.

Cap ve Slovak (2000) ölçme notasyonunu kapalı ve tam Weyl bağlantıları ile Rho-tensörü ve bu tür nesnelerin sınıflarını karakterize ederek genişlettiler.

Apostolov ve Armstrong (2000) yaptıkları çalışmada, herhangi bir kompakt hemen hemen Kähler'in Einstein $4-$manifold olması için Weyl tensörünün bir kökünün temel formu mutlaka Kähler olması gerektiğini gösterdiler.

Tiwari (2001) bir kuantum sisteminin durumunu Hilbert uzayında bir vektör tarafından temsil edilmesini incelemiştir.

Ornea (2001) kuaterniyon Hermityen Weyl (yerel konformal kuaterniyon Kähler) ve hiperhermityen Weyl (yerel konformal hiperkähler) manifoldlarda bir araştırma yapmıştır.

Wojtkowski (2002) Weyl konneksiyonu ile Gaussian termostatı arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Blazic ve ark. (2003) Weyl konformal eğrilik tensörü ile ilişkili Jacobi operatör ünitesinin uzay-zaman gibi tanjant vektörlerine ait sabit öz vektörlere sahip olduğunu incelediler.

Belgun (2003) holomorfik kendinden çift konformal yapılarla kompleks $4-$manifold üzerinde çalışma yapmıştır.

Hirica ve Nicolescu (2004) Weyl manifoldları geometrik özelliklerini Weyl cebirlerinin cebirsel özellikleri ve iki konformal Weyl bağlantı ile ilişkili deformasyon cebiri arasındaki ilişkiyi karakterize eden araştırma yaptılar.

David (2005) Sasaki manifoldu kavramının doğal bir genellemesi olan Sasaki-Weyl manifoldu kavramını incelemiştir.

Ünal ve Uysal (2005) bir Weyl manifoldu üzerinde bir yarı-simetrik konneksiyon buldular. Yarı-simetrik bir bağlantı ile ilgili olarak eğrilik tensörüne ait bazı özellikleri verdikten sonra projektif ve konformal eğrilik tensörünü incelediler.

Sharif ve Fatima (2005) Einstein, Landau-Lifshitz, Papaterou ve Moller'in önerilerini kullanarak Weyl metriği için momentum ve enerji yoğunluğunun dağılımlarını incelediler.

Arsan ve Yıldırım (2005) bir Weyl hiperyüzeyinde bir genel daire için Weyl uzayını çevreleyen dairede genelleme yapmak için gerekli ve yeterli koşulları verdiler.

Reason (2005) Weyl'in karakter formülü yarı basit Lie cebiri indirgenemez temsillerinin yapısını anlamada yararlı bir araç olduğunu incelemiştir.

Kim ve Do (2006) yaptıkları çalışmada $4-$boyutlu anti-Kähler manifoldun Weyl eğriliğinin kaybolduğunu gösterdiler. Özellikle sıfır skaler eğrilik ile herhangi bir

4-boyutlu anti-Kähler manifoldun düz (düzgün) olduğunu buldular.

Özdeğer (2006)'daki çalışmasında aşağıdaki sonuçlara ulaşmıştır.

i) Weyl manifoldunun her bir noktasındaki kesitsel eğrilik seçilen düzlemden bağımsızdır.

ii) Weyl manifoldunun skaler eğriliği bir yerel Einstein manifoldu olur ve Weyl manifoldunun skaler eğriliğinin bir uzatılmış kovaryant sabitidir.

Jackiw (2007) geometrik konformal tensörlerin boyutunu n den $(n-1)$ e indirilmesi üzerine bir çalışma sunmuştur. Konformal Weyl ve Kotton tensörlerinin bir Kaluza-Klein prosedürü ile boyutun azaltılması olduğunu göstermiştir.

Ornea ve Verbitsky (2008) kompakt bir Hermityen Einstein-Weyl yapısının karmaşık birçoklu hacmi şeklinde belirlendiğini ve bu sonuç teklik belirten Calabi'nin teoremi ile Kähler metriğinin bir konformal analoğu olduğunu gösterdiler.

Sagerschnig (2008) $5-$boyutlu bir manifold üzerinde jenerik rank ve iki dağılım ile ilgili bir doktora tez çalışması yapmıştır. Çalışmasında ana sonuçların parabolik geometrileri için Weyl yapılarını kullanmıştır.

Özkara Canfes (2009) yarı simetrik bağlantısı olan her izotropik Weyl manifoldunun yarı-simetrik bağlantısı ile bir yerel konformal Einstein manifoldu olduğunu ispatlamıştır.

Ghosh (2009) kontakt metrik manifoldlar çerçevesinde Einstein-Weyl yapılarını incelemiştir.

Hinterleitner ve Mikes (2009)'da Weyl manifoldları üzerindeki Afin konneksiyonları ile bağlantılı özel $n-$boyutlu manifoldların geodezik haritalaması üzerine bir çalışma yaptılar.

Özdeğer (2010) Einstein-Weyl manifoldunun her ikisini konformal yapmak için gerekli ve yeterli koşulları vermiştir. Daha sonra manifoldlar arasında herhangi bir konformal haritalama ile genel dairesel konformal haritalamadan sorumlu vektör alanında yerel bir gradient olduğunu ispatlamıştır. İki izotropik Weyl manifoldu arasında herhangi bir konformal haritalamada genel bir dairesel eşleme olduğunu bulmuştur.

Tod (2010) Roger Penrosenin iki fikri ve aralarındaki ilişkiyi tartışmıştır. Bu fikirler; otuz yıl önce onun Weyl eğrilik hipotezi ve konformal-döngüsel evren için yaptığı son fikri ve bir konformal silindirik evrene ait fikirleridir.

Belgun ve Moroianu (2010) konformal manifoldlar üzerindeki Weyl yapılarının paralel ağırlıksız formlarını incelediler. Konformal yapılar ve çalıştığı basit özelliklerinin konformal çarpımlarının notasyonlarını tanımladılar.

Gilkey ve ark. (2010) herhangi bir Weyl eğrilik modelinin bir Weyl manifoldu tarafından geometrik olarak gerçekleşebileceğini gösterdiler.

Gilkey ve Nikčević (2010) eğer eğrilik operatörü Kähler tanımı ile birleştirilse boyutu 6 ve daha fazla olan bir hemen hemen $-$ Hermityen Weyl manifoldunun Weyl yapısının sıradan olduğunu gösterdiler.

Kumar ve Petwal (2010) Weyl'in konformal eğrilik tensörü ile ilgili kozmolojik literatürdeki son gelişmeleri sundular. Weyl manifoldunun bu tensöre göre genel tekrarlanan özelliklerini özetleyerek daha sonra Newton sınırını tanımladılar.

Kitson ve ark. (2011) Hilbert uzayı operatörleri ve onun tensör çıkarımına Weyl teoremi aktarılırken yaklaşık yüzde elli oranında başarısız olduğunu gördüler. Bir sonuç olarak karmaşık düzlemde çevrenin limaçon olduğunu buldular.

Bahuguna ve Petwal (2011) Weyl'in ölçme geometrisinin bazı temel yönlerini ve Ricci akışı tarafından onun evrimine bir özel ortam olarak hizmet vereceğini tartıştılar.

Scholz (2011) Weyl geometrisinin fizik temelleri için açık bir araştırma potansiyelinin var olduğunu elde etmiştir.

Brozos-Vazquez ve ark. (2011) her Kähler-Afin eğrilik modelinin geometrik olarak gerçekleşebileceğini gösterdiler.

Gilkey ve Nikčević (2011) cebirsel pseudo $-$ Hermityen Kähler $-$ Weyl eğrilik tensörlerinin uzayını ve $4-$ boyutlu para $-$ Hermityen Kähler $-$ Weyl eğrilik tensörlerinin uzayını belirlediler.

Romero ve ark. (2011) Riemann geometrisi kullanmadan göreceliğin genel teorisini

Weyl geometrisi olarak sundular. Weyl alanının özelliklerini kullanarak aynı yerçekimi olayının farklı resimlerinin yeni bir matematik formalizmine yol açabileceğini gösterdiler.

Catino ve Mantegazza (2011) bir Riemann manifoldunun Ricci akışı altında Weyl tensörünün evrim eşitliği hesapladılar. Ayrıca yerel konformal düz Ricci çözümlerinin sınıflandırılması için bazı sonuçları tartıştılar.

Dvornikov (2012) bir kuantum masif Weyl alanının tutarlı bir teorisini inşa etmiştir. Masif Weyl alanlarının açıklanması için klasik alan teorisi yaklaşımının oluşturulması ile işe başlamıştır. Masif Weyl alanlarının açıklanmasında klasik alan teorisini uygulamış ve genişletilmiş Hamiltonian veya Lagrangian formalizminin kullanabileceğini gösterdi.

Gilkey ve Nikčević (2012a) (para) Kähler Weyl yapılarının geometrik ve cebirsel ortamlardaki (para) kompleks formlarını incelediler.

Gilkey ve Nikčević (2012b) eğer eğrilik operatörü ile Kähler birleştirilse herhangi bir $4-$boyutlu $para-$Hermityen manifoldunun bir tek $para-$Kähler$-$Weyl yapısını içine aldığının ispatını verdiler. Daha sonra parakompleks yapıyı komplekse çevirmek için analitik işlemleri sürdürdüler.

Fatibene ve Francaviglia (2012a) standart olmayan bir alanda akışkan bir maddeyi belirlemek için Weyl geometrilerini ve korunum yasalarını sundular.

Fatibene ve Francaviglia (2012b) bir akışkanın korunum yasası üzerine önemsiz olmayan Weyl geometrilerinin sonuçlarını araştırdılar.

Bejan ve Chiriac (2012) bir yeni kovaryant diferansiyeli ${}^{A}\nabla$ bir parakontakt yapısına adapte edilmesini tanıttılar ve onun bir Weyl yapısıyla ilişkisini kanıtladılar.

Deruelle ve ark. (2012) Einstein yerçekimindeki serbestliğin bir Weyl terim ile yerel Lorentz simetri kırılmasını çağıran basit bir mekanizma sayesinde olağanüstü derecede olduğunu gösterdiler.

Jelonek (2013) kompakt konformal Kähler-Eintein-Weyl manifoldlarına ait Ricci tensörünün verilen tanımında Hermityen olduğunu göstermiştir.

Datchev ve Dyatlov (2013) hiperbolik sıkıştırma setleri ile asimptotik hiperbolik kollektörler için temel spektrum etrafındaki rezonans sayısı üzerinde bağlı bir üst fraktalı ispatlamışlardır.

Özdeğer (2013) bir Weyl manifoldu için genelleştirilmiş Einstein tensörünü elde etmiştir.

Chen ve Jing (2013) çalışmalarında uzay zamanında $4-$boyutlu kara delik için Weyl düzeltme ile elektromanyetik pertürbasyonun öncelikle ana denklemini sundular.

Gilkey ve Nikčević (2013) herhangi bir $4-$boyutlu $para-$Hermityen manifoldunun tek bir $para-$Kähler$-$Weyl yapıyı gösteren temel bir ispatını verdiler.

Catino ve Mantegazza (2013) bir Riemann manifoldunun Ricci akışı altında Weyl tensörünün evrim eşitliğini hesapladılar ve yerel konformal düz Ricci çözümlerinin sınıflandırılması için bazı sonuçları tartıştılar.

Eckes (2013) Weyl'in bazı biyografik çalışmalarını özetleyen bir sunum yapmıştır.

BÖLÜM 3
MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde; matematik, geometri ve fiziğin temel tanım ve teoremleri, Lagrangian ve Hamiltonian dinamik formalizmi ile konformal ve Weyl geometrisi materyal olarak verilmiştir. Verilen bu materyaller analitik yöntem kullanılarak işlemlere alınmıştır. Kullanılan analitik yöntemle elde edilecek olan diferansiyel denklemlerin bulunmasına ait kısa ve özet bilgi verilmiştir.

3.1. Tanımlar

Vektör uzayı: V boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise V kümesi K cismi üstünde bir *vektör uzayıdır* denir. $\forall u,v,w \in V$ ve $\forall a,b \in K$ için

(1) V kümesi $+$ (toplama) işlemine göre aşağıdaki özellikler vardır.

(V1.1) $u+v \in V$

(V1.2) $(u+v)+w = u+(v+w)$

(V1.3) $u+0 = 0+u$

(V1.4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$

(V1.5) $u+v = v+u$

(2) $K \times V \to V$, $(a,u) \to au$ biçiminde skaler ile çarpma işlemine göre aşağıdaki özellikler vardır.

(V2.1) $a(u+v) = au+av$

(V2.2) $(a+b)u = au+bu$

(V2.3) $(ab)u = a(bu)$

(V2.4) $1u = u$

Vektör: Bir vektör uzayının her bir elemanına *vektör* adı verilir.

Baz: V bir vektör uzayı olmak üzere, $\forall u \in V$ vektörü bir $S = (u_1, u_2, ..., u_n)$ vektör kümesindeki vektörlerin tek bir lineer bileşimi olarak yazılabiliyorsa S kümesi V nin bir *bazıdır*. Eğer V nin $n-$elemanlı bir bazı varsa V ye sonlu $n-$boyutlu veya $n-$boyutludur denir.

Dual uzay: V bir vektör uzayı olsun. Bir V vektör uzayından K cismine tanımlanan lineer fonksiyonellerin kümesi L_1 ve L_2, V de lineer fonksiyoneller ve $\forall u \in V$, $\forall k \in K$ olmak üzere,

(D1) $(L_1 + L_2)(u) = L_1(u) + L_2(u)$

(D2) $(k\, L_1)(v) = k\, L_1(v)$

şeklinde tanımlanan toplama ve skaler çarpım özellikleriyle K üzerinde yine bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya V nin *dual uzayı* denir ve V^* ile gösterilir.

Dual baz: V bir vektör uzayı ve K bir cisim olmak üzere, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ kümesi V nin bir bazı olsun.

$$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \in V^*,\ \phi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} i = j & ,1 \\ i \neq j & ,0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan lineer fonksiyoneller olsunlar. Bu durumda $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ kümesi, V^* ın bir bazıdır. Bu $\{\phi_i\}$ bazı $\{v_j\}$ ye *dual olan baz* veya *dual baz* olarak adlandırılır.

Lie (parantez) operatörü: V bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $[\ ,\ ]: V \times V \to V$ dönüşümünde;

(L1) Bilineer

(L2) Alternedir $(\forall X, Y \in V;\ [X, Y] = -[Y, X])$.

(L3) $\forall X, Y, Z \in V;\ [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

olarak verilsin. $[\ ,\ ]$ dönüşümüne V üstünde bir *Lie operatörü* denir.

Afin uzay: Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde tanımlı bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f : A \times A \to V$ fonksiyonu varsa A ya V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir *Afin uzay* denir.

(A1) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

(A2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

İç çarpım uzayı: V, reel cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. $x, y \in V$ vektörlerine bir $<,>$ fonksiyonuyla bir $<x, y>$ reel sayısını karşılık getirsin. Bu fonksiyon $\forall x, y, z \in V$ vektörleri ve $\forall \alpha \in R$ skaleri için,

(i) $x \neq 0$ ise $<x, x> \in R^+$

(ii) $<x, y> = <y, x>$

(iii) $<x+y, z> = <x, z> + <y, z>$

(iv) $<\alpha x, y> = \alpha <y, x>$

aksiyomları sağlanıyor ise V üzerinde *iç çarpım* ve üzerinde bir iç çarpım tanımlanan V uzayında bir *iç çarpım uzayı* adı verilir (Başar, 2012).

Öklid uzay: Bir reel Afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak;

$$<,>: V \times V \to R$$
$$(x, y) \to < x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \quad ,(i = 1,...,n)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A Afin uzayı da yeni bir ad olarak *Öklid uzayı* adını alır ve $n-$boyutlu Öklid uzayı E^n ile gösterilir.

$$< \alpha, \beta > = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathrm{y_i} = \|\alpha\| \|\beta\| \cos\theta .$$

Açı: $\forall x, y, z \in E^n$ için $x\hat{y}z$ açısının ölçüsü

$$\cos\theta = \frac{< \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} >}{\left\|\overrightarrow{xy}\right\| \left\|\overrightarrow{yz}\right\|}$$

den hesaplanan θ reel sayısıdır.

Ortogonal: V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $<u, v>=0$ ise u, v ye ortogonaldir (diktir) ve $u, v \in V$ vektörlerine de *ortogonal* vektörler denir.

Ortogonal: V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $<u, v>=0$ ise u, v ye ortogonaldir (diktir) ve $u, v \in V$ vektörlerine de *ortogonal* vektörler denir.

Öklid çatısı: E^n de sıralı bir $\{P_0,...,P_n\}$ nokta $(n+1)-$lisine R^n de karşılık gelen $\left\{\overrightarrow{P_0P_1},...,\overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ $n-$lisine R^n için bir ortonormal baz ise $\{P_0,...,P_n\}$ sistemine E^n in bir *dik çatısı* veya *Öklid çatısı* denir. $E_0=(0,...,0), E_n=(0,...,1)$ ve $\{E_0,...,E_n\}$ çatısına da standart Öklid çatısı denir ve $<\overrightarrow{E_0E_i},..., \overrightarrow{E_0E_j}>=\delta_{ij}$ şeklinde ifade edilir.

Öklid koordinat sistemi: E^n de bir X noktasının E^n deki standart Öklid çatısına göre ifadesi $\overrightarrow{E_0X}=\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{E_0E_i}$ dir. Burada $x_i : E^n \to R$, $1 \le i \le n$ fonksiyonları X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları denir. $\{x_1, x_2,..., x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyon $n-$lisine de E^n in *Öklid koordinat sistemi* denir.

Öklid koordinat fonksiyonu: U ve V sırası ile E^m ve E^n de birer açık cümle olsunlar. Bir

$$\psi : U \to V$$
$$x \to \psi(x) = \left(f_1(x),..., f_n(x)\right)$$

fonksiyonu için bütün $f_i : U \to R$ koordinat fonksiyonları C^k-sınıfından iseler $\psi \in C^k(U,V)$ dir denir. $C^\infty(U,V)=\left\{\psi \middle| \psi \in C^k(U,V),\ \forall k \in N\right\}$. f_i fonksiyonlarına ψ nin *Öklid koordinat fonksiyonları* denir.

Uzaklık:

$$d : E^n \times E^n \to R$$
$$(x, y) \to d(x, y) = \left\|\overrightarrow{xy}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir.

Öklid metriği:

$$d : E^n \times E^n \to R$$
$$(x, y) \to d(x, y) = \left\|\overrightarrow{xy}\right\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de *Öklid metriği* denir.

Metrik: X boş olmayan bir küme olsun.

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to R \\ (x, y) &\to d(x, y) \end{aligned}$$

fonksiyonu verilsin. $\forall\, x, y, z \in X$ olmak üzere;

(M1) $d(x, y) \geq 0$

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlıyorsa d ye X üzerinde bir *metrik* ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir. (2), (3) ve (4) özellikleri sağlanıyorsa pseudo-metriği denir.

Topoloji: X boş olmayan bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. Bu koleksiyon aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir *topoloji* adını alır.

(T1) $X, \varnothing \in \tau$

(T2) $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \bigcap A_2 \in \tau$

(T3) $A_i \in \tau,\ i \in I,\ \bigcup A_i \in \tau$

Burada I bir indeks cümlesidir.

Topolojik uzay: Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan $\left(X, \tau\right)$ ikilisine bir *topolojik uzay* denir.

Homeomorfizim (topolojik dönüşüm): X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir *homeomorfizim (topolojik dönüşüm)* denir.

Hausdorff uzayı: X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için X de sırası ile P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \varnothing$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir *Hausdorff uzayı* denir.

Topolojik manifold: M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğruysa M ye bir *topolojik n-manifold* denir.

(M1) M bir Hausdorff uzayıdır.

(M2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(M3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Diffeomorfizim: E^n in iki açık alt cümlesi U ve V olsun. Bir $\psi : U \to V$ fonksiyonu için şu iki önerme doğru ise ψ ye C^k sınıfından bir *diffeomorfizim* ve U ile V ye de k. dereceden diffeomorfiktirler denir.

(D1) $\psi \in C^k(U,V)$

(D2) $\psi^{-1} : V \to U$ var ve $\psi^{-1} \in C^k(V,U)$.

Harita: M bir $n-$boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. O zaman topolojik manifold tanımı gereğince U bir ψ homeomorfizmi ile M nin bir W açık alt cümlesine eşlenebilir. $\psi : U \subset E^n \to W \subset M$ olmak üzere (ψ, W) ikilisine M de bir *koordinat komşuluğu* veya *harita* denir.

Atlas (koordinat komşuluğu sistemi): M bir $n-$boyutlu topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ yazılır. E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayı olmak üzere, E^n de U_α ya ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle U_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α, U_α) haritalarının $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir *atlas (koordinat komşuluğu sistemi)* denir.

Diferansiyellenebilirlik: $f : E^n \to R$, $a \in E^n$ olsun.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f\,'(a)$$

limiti mevcut ise f ye $a \in E^n$ noktasında *türevlenebilirdir* (*diferansiyellenebilirdir*) denir.

E^n de diferansiyellenebilirlik: Bir $a \in E^n$ noktasında türevlenebilen reel değerli fonksiyonların kümesi $C(a,R)$ ile gösterilir. $\forall a \in E^n$ için $f \in C(a,R)$ ise f ye E^n *de diferansiyellenebilirdir* denir ve E^n de türevlenebilir fonksiyonların kümesi $C(E^n, R)$ ile gösterilir.

Diferansiyellenebilir yapı: Bir topolojik $n-$manifold M ve M nin bir atlası $S=\left\{\left(\psi_\alpha,W_\alpha\right)\right\}_{\alpha\in A}$ olsun. Eğer S atlası için, $W_\alpha\bigcap W_\beta\neq\emptyset$ olmak üzere, $\forall\alpha,\beta\in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonlar C^k-sınıfından diferansiyellenebilir iseler S ye C^k-sınıfından diferansiyellenebilir denir. S atlası M üzerinde C^k-sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k-sınıfından *diferansiyellenebilir yapı* adı verilir.

Diferansiyellenebilir manifold: M bir topolojik $n-$manifold olsun. M üzerinde C^k-sınıfından diferansiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k-sınıfından bir *diferansiyellenebilir manifold* denir.

Tanjant vektörü: V bir vektör uzayı ile birleşen bir Afin uzay A olsun. $P\in A$ ve $\left(P,\vec{v}\right)$ sıralı ikilisine A Afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü nedir. Fiziksel olarak kuvvet, tatbik noktası ile birlikte bir *tanjant vektördür*. A Afin uzayının $P\in A$ noktasındaki tanjant vektörlerin cümlesi $T_A\left(P\right)$ ile gösterilir.

Tanjant uzay: $\left\{T_A(P),\oplus,\otimes,+,\bullet\right\}$ vektör uzayına A Afin uzayının $P\in A$ noktasındaki *tanjant uzayı* denir ve kısaca $T_A\left(P\right)$ ile gösterilir.

Yöne göre türev: $f:E^n\to R$ diferansiyellenebilir ve $\overrightarrow{v_p}\in T_{E^n}(P)$ olsun. Bu durumda $\overrightarrow{v_p}=\overrightarrow{PQ}$ olmak üzere

$$\overrightarrow{v_p}\left[f\right]=\frac{d}{dt}\left(f(P_1+t(Q_1-P_1),...,P_n+t(Q_n-P_n))\right)\Big|_{t=0}$$

reel sayısına f nin $\overrightarrow{v_p}$ *tanjant vektörü yönündeki türevi* denir. Kısaca aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\overrightarrow{v_p}\left[f\right]=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P .$$

Vektör alanı: E^n $n-$boyutlu Öklid uzayı ve E^n in $p\in E^n$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{E^n}(p)$ olsun. Buna göre bir $X:E^n\to\bigcup\limits_{p\in E^n}T_{E^n}(p)$ fonksiyonu için $\pi oX:E^n\to E^n$

olacak şekilde bir $\pi : \bigcup_{p\in E^n} E^n \to E^n$ fonksiyonu mevcutsa X e E^n üzerinde bir *vektör alanı* adı verilir.

Kısaca: Bir manifoldun bir alt kümesinde tanımlanmış ve bu kümenin her bir noktasına, bu noktada bir teğet vektör karşılık getiren bir fonksiyondur. Başka bir ifade ile bir manifoldun her noktasına bir tanjant vektörü eşleyen dönüşüme bir vektör alanı denir.

C^∞ **vektör alanı:** $V = (v_1,...,v_n) = \sum v_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^n)$ verilsin. $v_i : E^n \to R$ fonksiyonları $C^\infty -$sınıfından ise $V \in \chi(E^n)$ *vektör alanıda* $C^\infty -$*sınıfındandır* denir.

Bir vektör alanı yönünde türev: $X \in \chi(M)$ ve $f \in C(E^n, R)$ olsun. $\forall P \in E^n$ için $\left(X(f)\right)(P) = X_P\left[f\right]$ olmak üzere $X\left[f\right] \in C(E^n, R)$ fonksiyonuna f *nin* X *yönündeki türevi* denir.

Kotanjant uzayı: $T_{E^n}(P)$ nin cebirsel duali $T^*_{E^n}(P)$ ile gösterilir ve E^n in $P \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzayı adını alır. $T^*_{E^n}(P)$ nin her bir elemanına $P \in E^n$ noktasında *kotanjant vektör* adı verilir. $T^*_{E^n}(P) = \left\{\alpha^* \middle| \alpha^* : T_{E^n}(P) \xrightarrow{\text{lineer}} R\right\}$ bir lineer dönüşümdür.

Gradient fonksiyonu:

$$\begin{aligned} Grad &: C(E^n, R) \to \chi(E^n) \\ & f \to Grad(f) \end{aligned}$$

öyle ki E^n de E^n bir koordinat sistemi olmak üzere E^n şeklinde tanımlı Grad fonksiyonuna E^n de $\{x_0,...,x_n\}$ koordinat sistemine göre *gradient fonksiyonu* denir ve ∇ ile gösterilir. Sembolik olarak;

$$Grad(f) = \nabla f \,,\; \frac{\partial f}{\partial x_i} = D_i f \,,\; \nabla = \sum_{i=1}^{n} D_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{ve} \quad \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

dir.

0-form: E^n de bir açık alt cümle U olmak üzere bir $f : U \to R$ fonksiyonunun k. mertebeden bütün kısmı türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k sınıfından diferansiyellenebilirdir denir. Özel olarak f sadece sürekli ise C^0 sınıfındandır denir. U

üstünde tanımlı C^1 sınıfından fonksiyona U üstünde bir *0-form* adı verilir.

Diferansiyel operatör:

$$d : C(E^n, R) \longrightarrow \chi^*(E^n)$$
$$f \longrightarrow df$$

öyle ki $\forall X \in \chi(E^n)$ için $df(X) = X[f]$ şeklinde tanımlı d fonksiyonuna *diferansiyel operatör* denir.

Diferansiyel form (1-form): Bir $n-$değişkenli fonksiyon yardımı ile elde edilen $\Phi = \sum a_i dx_i$, $a_i = a_i(x_1,...,x_n)$ ifadesine $n-$değişkenli 1. mertebeden bir *diferansiyel form* veya *1-form* denir.

Tam diferansiyel: $z = f(x_1,...,x_n)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

$1-$form olarak tanımlanır. Özel olarak aşağıdaki tanımlama yapılabilir. E^3 ün bir Öklid koordinat fonksiyonu (x_1, x_2, x_3) ise

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{3} f_i dx_i = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

ye $1-$form ve

$$\Phi_2 = \sum f_{ij} dx_i dx_j = \sum_i \sum_j f_{ij} dx_i dx_j = f_{i2} dx_i dx_2 + f_{i2} dx_1 dx_2 + f_{i3} dx_i dx_3$$

ye $2-$form denir.

Dış türev: $f_i \in C(E^n, R)$ için $df_i \in \chi^*(E^n)$ olsun. $\Phi = \sum f_i dx_i$ $1-$formu verilsin. $d\Phi = \sum df_i \wedge dx_i$ $2-$formuna Φ $1-$formunun *dış türevi* (*diferansiyeli*) denir.

Tensör: V , K halkası üzerinde bir modül ve V^*, V nin bir dual modülü olsun. Her ikisi de aynı anda sıfır olmayan $r \geq 0$ ve $s \geq 0$ tamsayıları için

$$A : (V^*)^r \times (V)^s \to K$$

$A-$çoklineer fonksiyonuna V üzerinde (r, s) tipinde bir *tensör* denir (O'Neill, 1983).

Tensör alanı: M bir diferansiyellenebilir manifold olmak üzere, M nin her x noktasında $K(x) \in T_s^r(T \times M)$ şeklinde belli bir tensör karşılık getiren K dönüşümüne M manifoldu üzerinde (r,s) tipinden bir *tensör alanı* adı verilir.

Lineer dönüşüm: V ve U bir F cismi üzerinde birer vektör uzayı ve $f:V \to U$ bir fonksiyon olsun. $\forall v_1, v_2 \in V$ ve $\forall a \in F$ için,

(L1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

(L2) $f(a\, v_1) = a\, f(v_1)$

şartları sağlanırsa f ye V den U ya *lineer dönüşüm (doğrusal dönüşüm, vektör uzayı homomorfizması ya da lineer transformasyon)* denir.

Grup homomorfizmi: $(G,.)$, $(H,*)$ iki grup olsun. $f:G \to H$ fonksiyonu $\forall a,b \in G$ için

$$f(ab) = f(a) * f(b)$$

oluyorsa f ye bir *grup homomorfizmi* denir.

İzomorfizm: Eğer f grup homomorfizmi $1:1$ ve örten ise *izomorfizm* adını alır.

Endomorfizm: Eğer f grup homomorfizminde $G = H$ ise f *endomorfizm* adını alır. Başka bir ifade ile bir kümeden yine kendisine tanımlanan fonksiyonlarına endomorfizm denir.

Türev dönüşümü: M ve N, C^∞ manifoldlar, $\varphi: M \to N$, C^∞ dönüşüm, $m, p \in M$ ve $v_p \in T_pM$ tanjant vektörüne p noktasında teğet olan bir eğri $\alpha: I \subset R \to M$ olsun. $(\varphi_*)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}M$ ile tanımlanan dönüşüme φ nin $p \in M$ noktasındaki *türev dönüşümü* denir.

Regülerlik: E^nve E^m, n ve $m-$boyutlu birer Öklid uzayı olmak üzere, bir $F: E^n \to E^m$ dönüşümünün $\forall p \in E^n$ noktasındaki $(F_*)p$ türev dönüşümü $1:1$ ise bu $(F_*)p$ türev dönüşümüne *regülerdir* denir.

Bilineer form: V bir reel vektör uzayı olsun. $<.,.>: V \times V \to R$ dönüşümü $\forall a,b \in R$, $\forall u,v,w \in V$ için, (B1) $< au+bv,w >= a < u,w > + b < v,w >$

(B2) $< u,av+bw >= a < u,v > + b < u,w >$

oluyorsa $< .,. >$ dönüşümüne bir V vektör uzayı üzerinde bir *bilineer form* denir.

Dejenerelik ve nondejenerelik: V bir $n-$boyutlu reel vektör uzayı ve $g: V\times V \to R$ bir simetrik bilineer dönüşüm olsun. Eğer bir $w \neq 0$ vektörü için , $g(w,v)=0$ ise g ye *dejenere* denir. Eğer $\forall v \in V$ için $g(w,v)=0$ olması $w=0$ olmasını gerektiriyor ise g ye *nondejenere* denir.

Lif: E ve M $C^{\infty}-$manifoldlar, $\pi: E \to M$ bir dönüşüm olsun. Eğer π bir örten submersiyon ise (E,π,M) üçlüsüne bir *lifli manifold* denir. Bir (E,π,M) lifli manifoldunda E ye total uzay, M ye taban uzay, π ye projeksiyon ve her bir $p \in M$ noktası için E nin $\pi^{-1}(p)=E(p)$ alt cümlesine de p üzerindeki *lif* denir (Civelek, 1993; Tekkoyun, 2002).

Demet: E manifoldu tüm uzay, M manifoldu baz uzay ve Ψ de projeksiyon olmak üzere $\Psi: E \to M$ bir örten submersiyonsa (E,Ψ,M) üçlüsüne bir *demet* adı verilir.

Tanjant manifold: M bir manifold olmak üzere, $TM = \bigcup_{P\in M} T_P M$, $C^{\infty}-$manifolduna M nin bir *tanjant manifoldu* denir.

Tanjant demet: M bir manifold ve TM tanjant manifold olsun. $\pi_M: TM \to M$ doğal projeksiyon (izdüşüm) olmak üzere (TM,π_M,M) ye M manifoldunun bir *tanjant demeti* denir.

Kotanjant demet: M bir manifold olsun. $\pi_M: T^*M \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere (T^*M,π_M,M) ye M manifoldunun *kotanjant demeti* denir.

Bir matrisin rankı: Bir A matrisi verilsin. A matrisinin basamak biçime dönüştürülmüşü olan matrisin, sıfırdan farklı satırları sayısına A *matrisinin rankı* denir ve rank(A) ile gösterilir.

Kovaryant türev: Diferansiyellenebilir bir manifold M olsun. M nin üzerinde

$$\nabla : \chi(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi(M)$$
$$(X,Y)\rightarrow\nabla_X Y$$

şeklinde tanımlı fonksiyon;

(K1) $\nabla_X Y$, X de $C^\infty(M,R)$ -lineerdir

(K2) $\nabla_X Y$, Y de R -lineerdir

(K3) $\nabla_X(fY)=X(f)Y+f\nabla_X Y$, $\forall f\in C^\infty(M,R)$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde bir konneksiyon ve $\nabla_X Y$ ye ∇ konneksiyonu için X e göre Y nin *kovaryant türevi* denir. Yani $y_i\in C^\infty(E^n,R)$ ise Y nin X e göre kovaryant türevi

$$D_X Y=\left(X_P\left[y_1\right],...,X_P\left[y_n\right]\right)$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill, 1983).

Kovaryant tensör alanı: Diferansiyellenebilir bir M^n manifoldu için s. mertebeden bir *kovaryant tensör alanı* D (kısaca bir $(0,s)-$tensör alanı) $D:\chi\left(M^n\right)\times\chi\left(M^n\right)\times...\times\chi\left(M^n\right)\rightarrow C^\infty\left(M^n,R\right)$ şeklinde tanımlanan çok lineer bir dönüşümdür.

Riemann manifold: M bir $C^\infty-$manifold ve reel değerli $C^\infty-$fonksiyonların halkası $C^\infty\left(M,R\right)$ olmak üzere $g:\chi\left(M\right)\times\chi\left(M\right)\rightarrow C^\infty\left(M,R\right)$ şeklinde bir iç çarpım tanımlıysa M ye bir *Riemann manifoldu* denir. Burada g, M üzerinde bir iç çarpımdır. Metrik tensör, Riemann metriği veya diferansiyellenebilir metrik olarak da adlandırılır.

Semi-Riemann manifold: M bir $C^\infty-$manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi\left(M\right)$ ve reel değerli $C^\infty-$fonksiyonların halkası da $C^\infty\left(M,R\right)$ olmak üzere $<.,.>:\chi\left(M\right)\times\chi\left(M\right)\rightarrow C^\infty\left(M,R\right)$

(S1) 2-Lineer

(S2) Simetrik

(S3) $\forall X\in\chi\left(M\right)$ için $<X,Y>=0\Leftrightarrow Y=0\in\chi\left(M\right)$

şartları sağlanıyorsa $<.,.>$ fonksiyonu semi-Riemann metriği ve M ye de *semi-Riemann* *manifoldu* olarak adlandırılır.

Levi-Civita konneksiyonu: Bir M yarı (semi) Riemann manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

(L1) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

(L2) $X_g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ olacak şekilde bir tek ∇ konneksiyonu vardır. ∇ ya M nin *Levi-Civita konneksiyonu* denir.

Riemann eğrilik tensörü: Bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu M ve Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X,Y,Z) \to R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde $(1,3)$ tensördür. $R(X,Y)Z$ veya $R(X,Y,Z)$ ile gösterilen bu tensöre M nin *Riemann eğrilik tensörü* denir (O'Neill, 1983).

Dönme (torsiyon) tensörü: M bir diferansiyellenebilir manifold ve M üzerinde ∇ bir konneksiyon olsun. Bu takdirde

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X,Y) \to T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

şeklinde tanımlanan $(1,2)$ tensör alanına *dönme (torsiyon) tensörü* denir (Yano ve Kon, 1984).

Konfigürasyon (yapılandırma) manifoldu: Klasik mekanikte, dış sınırlamalar yardımıyla fiziksel bir sisteme uygun durumların gerçekleşebildiği uzaya bir *konfigürasyon uzayı* denir. Tipik bir sistemin konfigürasyon uzayı bir manifold yapısına sahiptir ve bundan dolayı konfigürasyon manifoldu olarak adlandırılır.

Hız faz uzayı: M bir konfigürasyon manifoldu olsun. $\pi_M : TM \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere (TM, π_M, M) ye M manifoldunun tanjant demetidir. Böylece bir $p \in M$ için $\pi_M^{-1}(p)$ lifi T_pM tanjant uzayıdır. Dolayısıyla TM tanjant uzayı bir *hız faz uzayıdır.*

Momentum faz uzayı: M bir konfigürasyon manifoldu olsun. $\pi_M : T^*M \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere $\left(T^*M, \pi_M, M\right)$ ye M manifoldunun kotanjant demetidir. Bu yüzden bir $p \in M$ için $\pi_M^{-1}\left(p\right)$ lifi T_p^*M kotanjant uzayıdır. Sonuç olarak T^*M kotanjant uzayı bir *momentum faz uzayıdır.*

Hemen hemen tanjant yapı: $n-$reel boyutlu bir manifold M ve M nin tanjant demeti TM olsun. TM üzerinde $J^2 = 0$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ = n$ ile verilen TM üzerindeki $(1,1)$ tipinden bir J tensör alanına bir *hemen hemen tanjant yapı* denir.

Hemen hemen simplektik manifold: $2n-$reel boyutlu bir M manifoldunun herhangi bir p noktasında ω anti simetrik $2-$formu regüler yani $boyM = rank\omega$ ise ω $2-$formuna bir *hemen hemen simplektik yapı* denir. (M,ω) ikilisine bir *hemen hemen simplektik manifold* denir.

Simplektik manifold: $2n-$reel boyutlu bir M manifoldunun üzerinde ω hemen hemen simplektik yapı kapalı yani $d\omega = 0$ ise ω $2-$formuna *simplektik yapı* denir. (M,ω) ikilisine bir *simplektik manifold* denir.

Holomorfik fonksiyon: D, C^n nin bir açık alt kümesi olsun. f, D üzerinde kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere D nin her bir $p = z_0$ noktasında

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f\left(z_0^\alpha + \Delta z^\alpha\right) - f\left(z_0^\alpha\right)}{\Delta z^\alpha}$, $\left(\Delta z^\alpha = \Delta x^\alpha + i\Delta y^\alpha\right)$ her $\left(\alpha = 1,2,...,n\right)$ için limit var ve bu limit $\Delta z^\alpha \to 0$ a yaklaştığında $\dfrac{\Delta y^\alpha}{\Delta x^\alpha}$ yönüne bağlı değilse, f fonksiyonu p noktasında holomorfiktir. Her $p \in D$ için bu şart sağlanıyorsa f *fonksiyonuna holomorfiktir* denir.

Kompleks manifold: C^n kompleks uzayda birim açık diskler üzerinde tanımlanan haritaların oluşturduğu atlasa sahip ve geçiş haritaları holomorfik olan manifolda *kompleks manifold* denir.

Holomorfik dönüşüm: M ve N iki kompleks manifold, $\Omega : M \to N$ sürekli bir dönüşüm ve $p \in M$ olmak üzere $\Omega(p)$ nin bir komşuluğu üzerinde tanımlanan holomorfik fonksiyon f olsun. Bu durumda $p \to \Omega(p)$ ile tanımlanan Ω sürekli dönüşümünün Ω^* dual dönüşümü $1-$formları $1-$formlara dönüştürüyorsa Ω diferansiyellenebilir dönüşümüne bir *holomorfik dönüşüm* denir.

Hemen hemen kompleks yapı: $n-$reel boyutlu bir manifold M ve M nin tanjant demeti TM olsun. TM üzerinde $J^2=-I$ eşitliğini sağlayan ve *rankJ=n* ile verilen TM üzerindeki bir $(1,1)$ tipinden J tensör alanına bir *hemen hemen kompleks* yapı denir.

Hemen hemen kompleks manifold: Üzerinde hemen hemen kompleks yapı tanımlanan manifolda bir *hemen hemen kompleks manifold* denir.

Nijenhuis tensörü: $2n-$boyutlu bir manifold M ve M üzerinde J bir hemen hemen kompleks yapı olsun. M üzerinde herhangi iki vektör alanı X ve Y için;

$$N_J(X,Y)=2\{[JX,JY]-J[X,JY]-J[JX,Y]-[X,Y]\}$$

şeklinde tanımlı N $(1,2)$ tensörüne J nin *Nijenhuis tensörü* denir (Martin, 1991; Brown, 2006).

İntegrallenebilir kompleks yapı: Eğer M manifoldunun TM tanjant manifoldu üzerinde uzanan bir kompleks yapı J ile kurulan N_J Nijenhuis tensörü sıfır ise J ye hemen hemen bir *integrallenebilir kompleks yapı* denir.

Hermit metriği: Bir J hemen hemen kompleks yapısıyla bir hemen hemen kompleks manifold M ve g, M üzerinde tanımlı Riemann metriği olsun. Bu durumda $g(X,Y)=g(JX,JY)$, $\forall\, X,Y\in\chi(M)$ olmak üzere g Riemann metriğine M üzerinde *Hermit metriği* denir.

Hermit manifold: Bir Hermit metriği ile bir M hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen *Hermit manifoldu* denir.

Kähler form: M kompleks manifoldu üzerinde bir kapalı $2-$form ω olsun. ω ayrıca bir Hermityen metrik olan $h=g-i\,\omega$ nin negatif kompleks bir kısmındadır ve bir *Kähler form* olarak adlandırılır. Hermityen metriğin reel kısmı g dir. Hemen hemen kompleks yapı J, Hermit metriği h ve $\forall X,Y\in\chi(M)$ için $h(X,Y)=h(JX,JY)$ ve $g(X,Y)=\omega(X,JY)$ Kähler formunun kombinasyonu olarak ifade edilir.

Kähler metriği: M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerinde ω Kähler formu kapalı ($d\omega=0$) ise M üzerinde tanımlanan bir Hermit metriğine *Kähler metriği* denir.

Hemen hemen Kähler manifold: Bir Kähler metriğiyle hemen hemen kompleks manifolda bir *hemen hemen Kähler manifoldu* denir.

Kähler manifold: Bir kompleks manifold üzerinde bir Kähler metriği tanımlanabiliyorsa bu kompleks manifolda bir *Kähler manifoldu* denir.

Hemen hemen parakompleks yapı: $n-$reel boyutlu bir manifold M ve M nin tanjant demeti TM olsun. TM üzerinde $J^2 = I$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ = n$ ile verilen TM üzerindeki bir $(1,1)$ tipinden J tensör alanına bir *hemen hemen parakompleks yapı* denir.

Hemen hemen parakompleks manifold: Üzerinde hemen hemen parakompleks yapı tanımlanan manifolda bir *hemen hemen parakompleks manifold* denir.

Diferansiyellenebilir dönüşüm: E^n ve E^m sırasıyla n ve $m-$boyutlu Öklid uzayları olmak üzere $F : E^n \to E^m$ fonksiyonu verilmiş olsun. F fonksiyonunun koordinat fonksiyonu olan $f_i : E^n \to R$ fonksiyonları diferansiyellenebilir ise $F = \left(f_1, ..., f_m \right)$ fonksiyonu da diferansiyellenebilirdir. Bu durumda $F : E^n \to E^m$ fonksiyonuna bir *diferansiyellenebilir dönüşüm* denir.

Eğri: $I \subseteq R,\ I = (a,b)$ bir açık alt aralık olmak üzere

$$\alpha : I \to E^n, \quad \alpha(t) = \left(\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)\right)$$

diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\alpha(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n bir *eğri* (*parametrik eğri*) denir.

Ayrıca (I, α) ikilisine eğrinin koordinat komşuluğu, I alt kümesine eğrinin parametre aralığı ve $t \in I$ reel sayısına da eğrinin parametresi denir. Bir eğri $\alpha(I) \subset E^n$ şeklinde veya kısaca α ile gösterilir. Eğer $\alpha : I \to E^n$, C^k sınıfından ise α ya C^k sınıfından bir eğri denir.

Hız vektörü: E^n de bir $\alpha(t)$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \to E^n$ fonksiyonunun koordinat fonksiyonları $\alpha_1, ..., \alpha_n$ olmak üzere $\alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)) \subset E^n$ yazılabilir. Buradan elde edilen

$$\alpha'(t) = \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{\alpha(t)} = \left(\left.\frac{d\alpha_1}{dt}\right|_{\alpha(t)}, ..., \left.\frac{d\alpha_n}{dt}\right|_{\alpha(t)} \right) = \left.\left(\frac{d\alpha_1}{dt}, ... \frac{d\alpha_n}{dt} \right)\right|_{\alpha(t)}$$

vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki *hız vektörü* denir. Başka bir gösteri ile $(\alpha(t),\alpha'(t))=\alpha'(t)\big|_{\alpha(t)}=\left.\dfrac{d\alpha}{dt}\right|_{\alpha(t)}\in T_{\alpha(I)}(\alpha(t))$ dir. Kısa olarak $\alpha'(t)\big|_{\alpha(t)}$ veya $\alpha'(t)$ olarak yazılır (Yüce, 2013).

Regüler eğri: Her noktasında hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Her t için $\alpha'(t)\neq\vec{0}$ oluyorsa (yani $\|\alpha'(t)\|\neq 0$) ise α ya *regüler eğri* denir.

Paralel vektör alanı ve geodezik eğri: $\alpha: I\to E^n$; C^∞ eğrisi ve $Y\in\chi(E^n)$ de α eğrisine kısıtlanmış bir $C^\infty-$vektör alanı olsun. Eğrinin hız vektör alanı da T olmak üzere α eğrisi boyunca $D_TY=0$ ise Y vektör alanına α eğrisi boyunca *paralel vektör alanı* denir. Eğer $D_TT=0$ ise α eğrisine bir *geodezik eğri* adı verilir. Burada D_TT için $\alpha(t)=(\alpha_1(t),...,\alpha_n(t))$ ve $T_P=\left.\dfrac{d\alpha}{dt}\right|_P=\left(\left.\dfrac{d\alpha_1}{dt}\right|_P,...,\left.\dfrac{d\alpha_n}{dt}\right|_P\right)$ olmak üzere

$$D_TT\big|_P=\left(T_P\left[\frac{d\alpha_1}{dt}\right],...,T_P\left[\frac{d\alpha_n}{dt}\right]\right)=\left.\left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2},...,\frac{d^2\alpha_n}{dt^2}\right)\right|_P=\left.\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right|_P=\alpha''(t)\big|_P$$

bulunur (Yüce, 2013).

İntegral eğrisi: E^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Öklid uzayı ve E^{n+1} de parametrik bir eğri $\alpha: I\to E^{n+1}$ olsun. Yani $t\to\alpha(t)=\left(\alpha_1(t),...,\alpha_{n+1}(t)\right)$ dir. E^{n+1} üzerinde bir vektör alanı ξ olmak üzere $\forall t\in I$ için $\dfrac{d\alpha}{dt}=\xi\left(\alpha(t)\right)$ ise α eğrisine ξ vektör alanının *integral eğrisi* denir.

Semispray: $n-$reel boyutlu bir M manifoldunun TM tanjant demeti üzerinde bir hemen hemen tanjant yapı J olsun. TM üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^i,v^i\right)$, $i=1,...,n$ ve $\xi=v^i\dfrac{\partial}{\partial q^i}+\xi^i\dfrac{\partial}{\partial v^i}$, $v^i=\dot{q}^i$, $\xi^i=\dot{v}^i=\ddot{q}^i$ vektör alanına M üzerinde bir *semispray (ikinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklem)* denir.

Liouville vektör alanı: J bir hemen hemen tanjant yapı ve ξ bir semispray olmak üzere $V=J\xi=v^i\dfrac{\partial}{\partial v^i}$ ile verilen V vektör alanına *Liouville vektör alanı* denir.

Kinetik enerji: $n-$reel boyutlu bir manifold M ve M nin tanjant demeti TM olsun. M manifoldu üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^i\right)$, $i=1,...,n$ ve TM üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^i,v^i\right)$ olsun m_i, M üzerinde m parçacıklı sistemin kütlesi olmak üzere $T=\frac{1}{2}m_i\left(\dot{q}^i\right)^2=\frac{1}{2}m_i\left(v^i\right)^2$ ile verilen $T:TM\to R$ dönüşümüne sistemin *kinetik enerjisi* denir.

Potansiyel enerji: $n-$reel boyutlu bir manifold M ve M manifoldu üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^i\right)$, $i=1,...,n$ olsun. M üzerinde m parçacıklı sistemin kütlesi m_i, yer çekimi ivmesi g ve sistemin orijine uzaklığı h olmak üzere $P=m_igh$ ile verilen $P:M\to R$ dönüşümüne sistemin *potansiyel enerjisi* denir.

Lagrangian fonksiyonu: $n-$reel boyutlu bir manifold M, M nin tanjant demeti TM, $\tau_M:TM\to M$ kanonik projeksiyon olsun. $T=\frac{1}{2}m_i\left(\dot{q}^i\right)^2=\frac{1}{2}m_i\left(v^i\right)^2$ ve $P=m_igh$ sırasıyla sistemin kinetik ve potansiyel enerjisi olmak üzere $L=T-P$ ile verilen $L:TM\to R$ dönüşümüne *Lagrangian fonksiyonu* denir.

Enerji fonksiyonu: Liouville vektör alanı $V=v^i\dfrac{\partial}{\partial v^i}$ ve Lagrangian fonksiyonu L olmak üzere tanjant manifold TM üzerinde $E_L=V(L)-L$ fonksiyonuna L ye bağlı *enerji fonksiyonu* denir.

Dikey türev: Bir M manifoldu üzerinde her bir X vektör alanı için X ile bir ω $p-$formunun $i_X\omega$ iç çarpımı veya *dikey türevi* aşağıdaki gibi tanımlanır.

(D1) $i_X\omega=0,\ p=0$

(D2) $i_X\omega=\omega(X),\ p=1$

(D3) $i_X\omega(Y_1,...,Y_{p-1})=\omega(X,Y_1,...,Y_{p-1}),\ Y_1,...,Y_{p-1}\in\chi(M)$

bu durumda $i_X\omega\in\wedge^{p-1}(M)$ olur (De Leon ve Rodrigues,1989).

Euler$-$Lagrange vektör alanı: $n-$reel boyutlu bir M manifoldunun TM tanjant demeti üzerinde $\Phi_L=-dd_JL$ kapalı $2-$form ve $\chi\left(TM\right)$, TM üzerindeki vektör alanlarının cümlesi ve $\wedge^1T^*M$, T^*M üzerindeki $1-$formların cümlesi olsun. Bu durumda;

$TM_{\Phi} : \chi(TM) \to \wedge^{1} T^{*} M$ izomorfizmi için $i_{X_L}\Phi_L = dE_L$ eşitliğini sağlayan bir tek X_L vektör alanı vardır ki bu vektör alanına *Euler – Lagrange vektör alanı* denir.

Lagrange sistem: TM, M nin tanjant demeti, Φ_L kapalı $2-$form, X_L Euler – Lagrange vektör alanı (semispray) ve E_L, L ye bağlı enerji fonksiyonu olmak üzere $\left(TM, \Phi_L, X_L\right)$ veya $\left(TM, \Phi_L, E_L\right)$ üçlüsüne *Lagrange sistem* adı verilir.

Euler – Lagrange denklemleri: $n-$reel boyutlu bir M manifoldunun TM tanjant demeti üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^{i}, p_{i}\right)$, $i = 1,...,n$ olsun. Lagrange fonksiyonu L, E_L L ye bağlı enerji fonksiyonu ve X_L Euler – Lagrange vektör alanı olmak üzere $i_{X_L}\Phi_L = dE_L$ eşitliğinden

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^{i}} = 0$$

Euler – Lagrange denklemi bulunur

Dual hemen hemen tanjant yapı: $n-$reel boyutlu bir manifold M ve M nin kotanjant demeti $T^{*}M$ olsun. $T^{*}M$ üzerinde $J^{*2} = 0$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ^{*} = n$ ile verilen $T^{*}M$ üzerindeki $(1,1)$ tipinden J^{*} tensör alanına $T^{*}M$ üzerinde *dual hemen hemen tanjant yapı* denir.

Liouville form: $n-$reel boyutlu bir manifold M ve M nin kotanjant demeti $T^{*}M$ olsun. $T^{*}M$ üzerinde J^{*} dual hemen hemen tanjant yapı ve ω $1-$form olsun. M manifoldu üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^{i}\right)$, $i = 1,...,n$ ve $T^{*}M$ üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^{i}, p_{i}\right)$ olmak üzere ω $1-$formu için $T^{*}M$ üzerinde lokal olarak $\Omega_M = J^{*}\omega$ ile verilen Ω_M ye *Liouville form* adı verilir.

Hamilton fonksiyonu: $n-$reel boyutlu bir manifold M ve M nin kotanjant demeti $T^{*}M$ olsun. $H : T^{*}M \to R$ ile verilen ve L Lagrangian fonksiyona karşılık gelen H enerji fonksiyonuna Hamilton fonksiyonu denir.

Hamilton vektör alanı: $n-$reel boyutlu bir manifold M ve M nin kotanjant demeti $T^{*}M$ olsun. $H : T^{*}M \to R$ bir Hamilton enerji olsun. $\chi\left(TM\right)$, TM üzerinde vektör alanların cümlesi ve $\wedge^{1} T^{*} M$, $T^{*}M$ üzerindeki $1-$formların cümlesi olsun. Bu durumda $TM_{\Phi} : \chi(TM) \to \wedge^1 T^* M$ izomorfizm dönüşümü $i_{X_H}\Phi = dH$ biçiminde tanımlanmak üzere T^*M üzerinde bir tek X_H vektör alanı vardır ki bu vektör alanına H Hamilton enerjiyle beraber *Hamilton vektör alanı* denir.

Hamilton sistem: T^*M , M nin kotanjant demeti, Φ kapalı $2-$form, X_H Hamilton vektör alanı olmak üzere (T^*M, Φ, X_H) üçlüsüne Hamilton sistem denir.

Hamilton denklemleri: T^*M , M nin kotanjant demeti ve M üzerinde lokal koordinatlar $\left(q^i, p_i\right)$, $i = 1,...,n$ olsun. H Hamilton fonksiyon X_H Hamilton vektör alanı olmak üzere $i_{X_H}\Phi = dH$ eşitliğinden

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

şeklinde elde edilen denklemlere *Hamilton denklemleri* adı verilir.

Einstein toplam kuralı: $\sum_{j=1}^{n} a_j x^j$ ifadesindeki gibi bir indis (bir kez üstte bir kez altta olmak üzere) iki kez tekrarlanırsa $\sum$ işaretini kaldırıp sadece $a_j x^j$ yazarak, indise alması mümkün değerleri vermek suretiyle elde edilen, bütün terimlerin toplanması kabulüne *Einstein toplam kuralı* adı verilir.

Kesitsel eğrilik: Bir p noktasında M manifoldunun iki lineer bağımsız u_i ve v_i tanjant vektörleri tarafından gerilen (u,v) yüzeyine teğet bir Riemann manifoldunun $2-$boyutlu geodezik alt manifoldunun Gauss eğriliği, *kesitsel eğrilik* olarak adlandırılır ve K ile gösterilir. $p \in M$ için u_i ve v_i ortogonal birim vektörler olmak üzere (u,v) yüzeyinde kesitsel eğrilik;

$$K = \frac{R_{hijk} u^h v^i u^j v^k}{(g^{hk} g^{ij} - g^{hj} g^{ik}) u^h v^i u^j v^k}$$

dir.

Sabit eğrilik: p noktasında K kesitsel eğriliği (u,v) yüzeyinden bağımsızsa $R_{hijk} = K(g^{hk} g^{ij} - g^{hj} g^{ik})$ için M manifoldu, p de *sabit eğriliklidir* denir. $n-$boyutlu bir bağlantılı Riemann manifoldunun $K(p)$ kesitsel eğriliği $n > 2$ için her bir p noktasında bütün yüzeylerden bağımsızdır, o zaman $K(p)$ mutlak sabittir ve bu yüzden

M manifoldu sabit eğriliklidir.

Uzay form: M manifoldunun kesitsel eğriliği (u,v) yüzeyinin bütün noktalarında sabitse sabit eğrilikli bir manifold veya bir *uzay form* olarak adlandırılır.

Kompleks uzay form: c sabit holomorfik kesitsel eğrilikli $n-$boyutlu bir Kähler manifolduna bir *kompleks uzay formu* denir.

Kähler uzay form: M Kähler manifoldunun kesitsel eğriliği (u,v) yüzeyinin bütün noktalarında sabitse sabit eğrilikli bir Kähler manifoldu veya bir *Kähler uzay form* olarak adlandırılır.

Parakompleks uzay form: c sabit para-holomorfik kesitsel eğrilikli $n-$boyutlu bir para-Kähler manifolduna bir *parakompleks uzay formu* denir.

Para-Kähler uzay form: M para-Kähler manifoldunun kesitsel eğriliği (u,v) yüzeyinin bütün noktalarında sabitse sabit eğrilikli bir para-Kähler manifoldu veya bir para-Kähler uzay form olarak adlandırılır.

3.2. Holomorfik Fonksiyon

Holomorfik (düzenli) fonksiyonlar kompleks analizin temel işlem gördüğü araçlarından biridir. Holomorfik fonksiyonlar C karmaşık düzlemin açık bir altkümesinde tanımlıdır. Bu altkümedeki her noktada kompleks anlamda türevli olup aldığı değerler yine C içinde olan fonksiyonlardır. Holomorfik fonksiyon sonsuz kere türevlenebilir ve Taylor serisi ile kolayca tanımlanabilir. Her ne kadar daha geniş anlamda fonksiyonun tanım kümesi içindeki her noktanın komşuluğunda fonksiyonun Taylor serisine eşit olması anlamına gelse de *analitik fonksiyon* teriminin holomorfik fonksiyon terimi yerine de kullanıldığı yerler vardır.

Analitik fonksiyonlar sınıfının kompleks analizde holomorfik fonksiyonlar sınıfı ile aynı olması önemli bir teoremdir. Karmaşık düzlemin tümünde holomorfik olan fonksiyona *tam fonksiyon* adı verilir ve *a* noktasında holomorf olma terimi *a* noktasında türevli anlamına gelmekle beraber aynı zamanda kompleks düzlemde *a* noktası etrafındaki belli bir açık disk içindeki her noktada türevlenebilir anlamına da gelmektedir.

Tanım: U kümesi C nin açık bir kümesi ise, $f:U\to C$, U üzerinde tanımlı karmaşık bir fonksiyonsa ve U kümesine ait bir z_0 noktasındaki

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad \textbf{(3.1)}$$

limiti varsa, f ye z_0 noktasında karmaşık türevli denilir.

Burada limit z_0 noktasına yaklaşan karmaşık sayıların tüm dizileri üzerinden alınır ve bu tür tüm diziler için farkların oranı tek bir sayıya yaklaşmak zorundadır ki o sayı da $f'(z_0)$ dır. f fonksiyonu z_0 da karmaşık türevliyse ve z_0' a r yönünden yaklaşılırsa, o zaman görüntüler de çarpımın karmaşık sayılar çarpımı olduğu $f'(z_0)$. r çarpımı yönünden $f(z_0)$ noktasına yaklaşır. Türevliliğin bu tip tanımı gerçel türevlilik ile belli başlı ortak özellikleri; her iki türev de lineerdir ve her iki türev de türevdeki çarpma, bölme ve zincir kuralını sağlarlar. f fonksiyonu U kümesi içindeki her z_0 noktasında holomorf ise f fonksiyonu U üzerinde holomorftur denir. f fonksiyonu z_0 etrafındaki bir komşuluk içinde holomorfik ise z_0 noktasında holomorftur denilir. Açık olmayan bir A kümesinde f ye holomorfik diyebilmek için ise f nin A kümesini de içeren bir açık küme üzerinde holomorfik olması gerekmektedir.

Gerçel türevlilik ve karmaşık türevlilik arasındaki ilişki ise şudur: Eğer $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ karmaşık fonksiyonu holomorfik ise o zaman u ve v nin x ve y ye göre sol kısmi türevleri vardır ve Cauchy-Riemann denklemleri olarak bilinen aşağıdaki ifadeyi sağlarlar:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \textbf{(3.2)}$$

Ancak bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Doğru olan daha basit bir ters ifade ise şudur: u ve v nin sürekli ve kısmi türevleri var ise u ve v Cauchy-Riemann denklemlerini sağlıyorsa o zaman f holomorftur. Standart Öklid uzayı (R^n, ω_0) ve onun standart kompleks yapısı J_0 ile birlikte R^n de kompleks simplektik manifold elde edilir (Wikipedia).

3.3. Mekanik Sistemler

3.3.1. Matematiksel modelleme

Matematiksel modelleme yaklaşımı dinamik sistemlerin daha iyi anlaşılmasının, analiz edilmesinin ve tasarımının etkin olan ekonomik yollarından biridir. Modelleme yaklaşımı karmaşık parametrelerin belirlenmesi için çok iyi tanımlamalara ihtiyaç duyar. Çünkü karmaşık olaylar ancak bu şekilde matematiksel ifadeler şekline getirilebilir, formülüze edilebilir ve modellenebilir. Bu sebeple iyi bir matematiksel yaklaşım gerekmektedir. Bu açıdan modelleme bir sanattan çok bir uzmanlık alanı ve bilim dalı olarak tanımlanabilir.

Bir model kurucu için en önemli karar ise model seçiminde, sistemi etkileyen değişkenler arasındaki ilişkileri belirlemektir. Çünkü belirlenen matematik ilişkilerin bazıları sistemin özelliklerinden uzak kalabilmektedir. Değişkenler arasındaki doğru seçilmiş ilişkilerle kurulan ve en küçük değişikliği gösteren iyi bir yaklaşım, model kurucuyu hassas ve daha iyi sonuçlara götürecektir. Hareketi içeren modellemelerde değişkenlerdeki değişiklikleri en iyi gösteren ve en çok kullanılan matematiksel ifadeler çok geniş kullanım alanına sahip olan diferansiyel denklemlerdir.

Büyük sistemler için kurulan basit (doğrusal) modeller sistemin dinamiklerini temsilde zayıf kalabilmektedir. Çünkü gerçek dünya karmaşık, bilinmeyeni çok ve doğrusal olmayan (nonlineer) çok değişkenli bir yapıdadır. Böyle sistemler için kullanılanabilecek genel bir yaklaşım tekniği yoktur. Bu nedenle mekanik sistemler için kurulacak model oldukça hassas ve değişimlerin neredeyse tamamını gösterecek yetenekte olması istenir.

Ayrıca modelleme ekonomik açıdan ele alınması gereken bir diğer konudur. Şirketlerin çoğunda maliyet veya kâr önde gelen amaç olarak ele alınmaktadır. Çünkü dünyanın kaynakları sınırlı, kısıtlı ve tükenmeye mahkûmdur. O halde bir sistem için modelleme ile en kısa ve ekonomik çözüm üretmek gerekmektedir. Modellemeye harcanan emek ve maliyet kazanılacak fayda ve maliyetten daha az olmalıdır ki yapılan çalışma anlamlı ve faydalı olsun.

Gerçek dünyanın yapısındaki durumların çeşitliliği model kurucuların çalışmalarını etkilemektedir. Bu ise zaman ve para şeklinde maliyet boyutunu da gündeme getirmektedir. Araştırmaların çoğunda başta gelen temel amaç; faaliyet koşulları altındaki bir süreci kontrol etmek ve geleceği en yakın tahminle bilmektir. Tüm bu koşullar altında yapılacak hesaplamaların en kısa gerçek zamanda (sürede) gerçekleştirilebilmesi beklenir. Araştırmaları talep edenler tarafından zaman faktörü genellikle en önde gelen bir sınırlama (kısıt) olarak kabul edilir.

Hayatımıza giren modellemelerin kullanıldığı birçok yer vardır. Bu yerlerin başlıcaları uzay ve askeri araştırmalarıdır. Füze yönetimi ve kontrolü, otomatik pilot ile uzay aracı kontrolü, izleme sistemlerinde nükleer denizaltıların seyri ve kontrolü ayrıca ateş kontrol sistemleri modelleme ile yapılabilmektedir.

Bu çalışma ile cisimlerin uzaydaki hareketine ait bir matematiksel modelleme yapılacaktır. Uzayda belirli iki nokta arasındaki alternatifli yollar (en kısası olan geodezikler) için diferansiyel denklemlerin uygulanabilirliği kullanılarak Euler $-$ Lagrange ve Hamilton tipi denklemler bulunacaktır.

3.3.2. Euler $-$ Langrange denklemlerinin matematiksel modellemesi

Lagrangian mekaniği dinamik sistemlere ait enerjinin korunumu ile momentumun korunumunun birleştirilmesiyle klasik mekaniğin yeniden formüle edilmesidir. İlk olarak Fransız matematikçi Joseph-Louis Lagrange tarafından (1788) tanımlanmıştır. Şimdi bu formülüzasyon aşağıda verilecektir.

M bir $n-$boyutlu diferansiyellenebilir manifold, $F(M)$ de M üzerindeki fonksiyonların kümesi, $\chi(M)$ vektör alanları kümesi, $\wedge^1(M)$ $1-$formların kümesi ve $\sum_{j=1}^{n} a_j\, x^j = a_j\, x^j$ Einstein toplamını göstersin.

Ayrıca TM tanjant manifold (demet) göstersin. M manifoldunun koordinatı (q^i) ve TM nin koordinatı $(p^i, \dot{q}^i)$, $i = 1,...,n$ dir. Lagrange fonksiyonu L olup $L: TM \to R$ ile tanımlıdır. Dinamik sistemin kinetik enerjisi T ile potansiyel enerjisi P ise $L = T - P$ dir.

Lagrangian dinamik formalizmi $i_\xi \Phi_L = dE_L$ dir. Burada i_ξ $2-$formu $1-$forma dönüştüren indirgeme fonksiyonudur ve $i_\xi \Phi_L = \Phi_L(\xi)$ dir.

Yukarıdaki açıklamalar ışığında izlenecek yola ait bir örnek aşağıda verilmiştir. Dinamik denklemin sol kısmının hesabında aşağıdaki yol izlenir. TM üzerinde seçilmiş herhangi bir vektör alanı (semispray) $\xi = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y_i}$, $X^i = \dot{x}_i = y_i$, $Y^i = \dot{y}_i$, $i = 1,...,n$ gibi bir yapıda seçilir. Tanımlı uzaya ait holomorfik yapılar

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i},\quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}$$

olduğu gibi göz önüne alınır. $J : TM \to TM$ lineer dönüşümünün bileşkesi olan $J^2 = J \circ J = -I$ olup J kompleks yapıdır. Φ_L simplektik 2-form ve

$$\Phi_L = -dd_J L = -d(d_J L)$$

şeklindedir. i_J indirgeme fonksiyonu $i_J : \wedge^2 TM \to \wedge^1 TM$ şeklinde tanımlıdır. d_J dış dikey türev ise $d_J = [i_J, d] = i_J d - d\, i_J$ şeklindedir. Böylece

$$d_J = Jd = J\left(\frac{\partial}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial}{\partial y_i} dy_i\right) = \frac{\partial}{\partial y_i} dx_i - \frac{\partial}{\partial x_i} dy_i$$

olur. Bu yapıya Lagrange fonksiyonu L eklenerek $d_J L = \frac{\partial L}{\partial y_i} dx_i - \frac{\partial L}{\partial x_i} dy_i$ formu elde edilir. Buradan

$$\Phi_L = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i} dx_i \wedge dx_j - \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i} dy_i \wedge dx_j + \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i} dx_i \wedge dy_j - \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial x_i} dy_i \wedge dy_j\right]$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\Phi_L(\xi) = {} & X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i} dx_j - X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i} \delta_i^j dx_i - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i} dx_j + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i} \delta_i^j dy_i \\ & + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i} dy_j - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i} \delta_i^j dx_i - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial x_i} dy_j + Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial x_i} \delta_i^j dy_i\end{aligned}$$

dir. Kronecker delta yardımıyla $dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) dy_i = \frac{dx_j}{\partial x_i} dy_i = \delta_i^j dy_i$,

$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) dy_i = \frac{dx_i}{\partial x_i} dy_i = dy_i$ ve $dy_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) dx_i = 0$ olur (Hacısalihoğlu, 1993a ve 1993b).

Dinamik denklemin sağ kısmındaki terim dinamik sistemin Lagrange fonksiyonuna ait E_L enerji fonksiyonu $E_L = V(L) - L$ dir. V Liouville vektör alanı olmak üzere

$$V = J(\xi) = J\left(X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = X^i \frac{\partial}{\partial y_i} - Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

gibi hesaplanır. Böylece sisteme ait enerji fonksiyonunun diferansiyeli

$$dE_L = X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i} dx_j - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i} dx_j + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i} dy_j - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial x_i} dy_j$$

şeklindedir. Yapılan hesaplamalar ile dinamik denklemin sağ ve sol kısımları birbirine eşitlenir ve gerekli sadeleştirmeler yapılır. Bu kısımda ξ vektör alanının etkisini ortadan kaldırmak için integral eğrisinin $\xi(\alpha(t)) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ tanımı kullanılır.

TM tanjant manifold, Φ_L simplektik $2-$form ve ξ vektör alanı ile beraber (TM, Φ_L, ξ) üçlüsü "Lagrangian Mekanik Sistem" olarak adlandırılır. O halde (TM, Φ_L, ξ) dinamik denkleminin temsil ettiği (TM, J, g) manifold yapısı üzerinde dinamik sisteme ait hareketin ikinci mertebeden Euler$-$Lagrange diferansiyel denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0 \text{ ve } \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

formatında elde edilir.

3.3.3. Hamilton denklemlerinin matematiksel modellemesi

Hamiltonian mekaniği klasik mekaniğin yeniden formüle edilmesidir. İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından (1883) tanımlanmıştır.

M manifoldunun TM tanjant demetinin duali T^*M kotanjant demeti ile gösterilmektedir. T^*M de koordinatlar (q^i, p^i), $i = 1,...,n$ dir. Hamilton fonksiyonu $H : T^*M \to R$ ile tanımlıdır. Kinetik enerji T ve potansiyel enerji P olmak üzere $H = T + P$ toplamına eşittir.

$i_{X_H}\Phi = dH$ eşitliği Hamilton dinamik formalizmidir. Denklemin sol kısmının hesabı aşağıdaki gibidir.

$$X_H = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

ile verilen bir vektör alanını kuralım. i_{X_H} indirgeme fonksiyonu olmak üzere $i_{X_H}\Phi = \Phi(X_H)$ dir. $\omega = \frac{1}{2}(x_i dx_i + y_i dy_i)$ şeklinde özel bir $1-$form seçelim. $\Omega = J^*\omega$

ifadesi $J^* : T^*M \to T^*M$ lineer dönüşümü olmak üzere Liouville $1-$formdur. Burada J^*, J nin dual yapısı olup

$$J^*(dx_i) = dy_i\,,\ J^*(dy_i) = -dx_i$$

formundadır.

$$\Omega = J^*(\omega) = J^*\left(\frac{1}{2}(x_i dx_i + y_i dy_i)\right) \text{ ve } \Omega = \frac{1}{2}(x_i dy_i - y_i dx_i)$$

olur. $\Phi = -d\Omega$ simplektik $2-$form olarak isimlendirilir. $\Phi = dy_j \wedge dx_j$ şeklinde hesap edilir. Bulunan ifadeye $X_H = X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i} + Y^i \dfrac{\partial}{\partial y_i}$ vektör alanı etki ettirilerek aşağıdaki formda yazılır.

$$\Phi(X_H) = (dy_j \wedge dx_j)(X^i \frac{\partial}{\partial x_j} + Y^i \frac{\partial}{\partial y_j}).$$

Yukarıda bahsedilen dış çarpım ve Kronecker delta özellikleri kullanılarak $\Phi(X_H) = -X^i \delta_i^j dy_j + Y^i \delta_i^j dx_j$ hesaplaması yapılır. Hamilton dinamik formalizmin sağ kısmı için $d = \dfrac{\partial}{\partial x_j} dx_j + \dfrac{\partial}{\partial y_j} dy_j$ diferansiyel ifadesine H Hamilton fonksiyonu etkiletilirse $dH = \dfrac{\partial H}{\partial x_j} dx_j + \dfrac{\partial H}{\partial y_j} dy_j$ olur. Bulunan bu iki kısım birbirine eşitlenerek $X^i = \dfrac{dH}{dy_i}$ ve $Y^i = -\dfrac{dH}{dx_i}$ elde edilip $X_H = X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i} + Y^i \dfrac{\partial}{\partial y_i}$ ifadesinde yerlerine yazılır. Öte yandan

$$X_H\left(\alpha(t)\right) = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\alpha(t)} + \frac{dy_i}{dt}\frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_{\alpha(t)}$$

integral eğrisi tanımı dikkate alınır. Elde edilen X_H ifadelerindeki aynı indisli terimler birbirine eşitlenerek hareket denklemleri bulunur.

Sonuç olarak, T^*M kotanjant manifold, Φ simplektik form ve X_H vektör alanı ile (T^*M, Φ, X_H) üçlüsü ile gösterilen dinamik denklemin temsil ettiği (T^*M, J^*, g) manifold yapısı üzerinde dinamik sisteme ait Hamilton hareket denklemleri

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = \frac{dx_i}{dt} \text{ ve } \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{dy_i}{dt}$$

formatında bulunur.

3.4. Konformal Geometri

Bir konformal haritalama açıyı koruyan bir fonksiyonel dönüşümdür. Konformal geometri ile tanımlı bir uzayda veya manifold üzerinde uzunluğu koruyan bir dönüşümün kurulması sağlanır. $2-$boyutlu reel uzayda konformal geometri tam Riemann yüzeylerinin geometrisi gibidir. Boyutun ikiden daha fazla olduğu durumlarda (Öklid uzayı veya bir küre yüzeyi gibi) bir yüzeye dönüşümü tanımlar. Daha genel bir ifade ile skaler metrik tanımının bir denklik sınıfı ile (pseudo) Riemann manifoldu olur. Yapıların yüzeylerinin çalışması bazen mobius geometrisi (şeridi) gibi veya bir Klein geometrisi (dik izdüşüm) nin tipindedir.

Bir konformal manifold (pseudo) Riemann manifoldunun bir denklik sınıfı ile bir diferansiyellenebilir manifold tarafından donatılmıştır. g ve h gibi iki metriğin denk olması için

$$h = \Psi^2 g \qquad \textbf{(3.3)}$$

gerek ve yeter şarttır. Burada Ψ diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. Adı geçen metriklerin denklik sınıflarının her birine konformal metrik veya konformal sınıf denir. Böylece bir konformal metrik bir skaler olarak alınabilir ve genellikle konformal metrikler konformal sınıfından metriklerden seçilerek hareket edilir. Konformal metriklerin oluşturduğu kümeye konformal yapı denir ve G ile gösterilir.

Tanım 3.4.1. Bir manifold G konformal yapı ile konformal manifold olarak adlandırılır. Bir konformal manifold da bir noktadaki iki vektör arasındaki açıyı veya vektörlerin uzunluğunun açısı korunmasına rağmen tam uzunluğu tanımlanamaz. Ayrıca, vektör alanlarının simetrik veya asimetrik-simetrik dönüşüm notasyonu olan T simetrik olması için gerek ve yeter şart X ve Y iki vektör alanları olmak üzere

$$g(TX,Y) = g(X,Y), \quad g \in G \qquad \textbf{(3.4)}$$

dir.

3.5. Weyl Manifoldları

Bu kısımda kullanılan M, $n-$boyutlu diferansiyellenebilir bir manifolddur. Ayrıca, T_pM, bir p noktasında M nin tanjant uzayı ve $\wedge^1(M)$ de M üzerinde $1-$formların kümesidir.

Tanım 3.5.1. M manifoldu üzerinde g ve g' ile verilen iki metriğin birbirine *açıyı koruyacak şekilde denk* olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$g' = e^f g \tag{3.5}$$

dir. M üzerinde $f : M \to R$ diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. Bu bağıntı $g' \approx g$ ile gösterilir. Söz konusu $\approx$ ye bir denklik bağıntısı ve denklik sınıflarına da açıyı koruyan (konformal) sınıf adı verilir (Folland, 1970).

Tanım 3.5.2. C metriklerin bir konformal sınıfı olmak üzere (M,C) ikilisi bir konformal yapı olarak adlandırılır (Kadosh, 1996).

Tanım 3.5.3. M üzerinde açıyı koruyan C yapısı ile Riemann metriklerinin denklik sınıfı olan G birbirine denktir ve $C \approx G$ ile gösterilir (Kadosh, 1996).

Tanım 3.5.4. Eğer u_i, $g \in C$ metriği ile bir ortonormal baz ise $\{u_i\}_{1\le i\le n} \subseteq T_pM$ kolleksiyonuna p de bir konformal taban (çerçeve) denir (Kadosh, 1996).

Tanım 3.5.5. Eğer $\gamma : [a,b] \to M$ nin her parçası için bir konformal taban $\{V_i(a)\}_i$ ile γ nin paralel vektör alanları boyunca her kolleksiyonu $\{V_i\}_{1\le i\le n}$ olmak üzere M üzerindeki bir D konneksiyonuna *uyumludur* denir. O zaman $\{V_i(b)\}_i$ ayrıca bir konformal tabandır (Kadosh, 1996).

Teorem 3.5.1. M üzerinde D bir konneksiyon ve uygun bir metrik $g \in C$ olarak seçilsin. (M,C) ile D nin uyumlu olması için gerek ve yeter şart

$$D_X g + \omega(X) g = 0 \tag{3.6}$$

eşitliğini sağlayan ω bir $1-$formu vardır (Kadosh, 1996).

İspat:

$\Leftarrow$: Burada $D_X g + \omega(X)g = 0$ eşitliğini sağlayan bir ω $1-$formu olduğunu varsayalım. $\{V_i\}_{1\le i\le n}$ bir paralel vektör alanı boyunca $\{V_i(a)\}_i$ bir konformal taban ile bir eğrilik $\gamma:[a,b]\to M$ alalım. $c>0$ için $g(V_i(a),V_i(a)) = c,\ 1\le i\le n$ olsun. Böylece

$$\frac{dg(V_i(t),V_j(t))}{dt} = \left(D_{\dot\gamma(t)}g\right)(V_i(t),V_j(t)) = -\omega(\dot\gamma(t))g(V_i(t),V_j(t)).$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklem çözülerek

$$g(V_i(t),V_j(t)) = c_{ij}\, e^{-\int_a^t \omega(\dot\gamma(s))ds}$$

bulunur. Buradaki c_{ij} katsayısı $c_{ij} = \begin{cases} 0 & ,i=j \\ c & ,i\neq j \end{cases}$ şeklindedir.

$\Rightarrow$: Farzedelim ki D uyumlu bir konneksiyondur. Uygun olarak $v\in T_pM$ verilsin. $D_X g$, X için doğrusal ve uygun olarak $r\in R$ için $D_v g = r\,g(p)$ dir. Bir eğri olarak $\dot\gamma(a) = v$ ile $\gamma:[a,b]\to M$ seçelim. $\{V_i(a)\}_i$ nin ortonormali g ile beraber γ paralel vektör alanı boyunca $\{V_i\}_{1\le i\le n}$ olsun. θ^i paraleldir ve dual bir formu olarak $\theta^i = V_i^*$ olsun. $\forall t\in[a,b]$ için konformal baz $\{V_i(t)\}_i$ olmak üzere $f:[a,b]\to R$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon vardır ve $e^f\left(\sum_i \theta^i\otimes\theta^i\right) = g(\gamma(t))$ dir. Böylece

$$D_v g = \frac{D}{dt}(go\gamma)\Big|_{t=a} = \left(\frac{de^f}{dt}\left(\sum_i\theta^i\otimes\theta^i\right) + e^f\frac{D}{dt}\left(\sum_i\theta^i\otimes\theta^i\right)\right)\Big|_{t=a} = \frac{de^f}{dt}\Big|_{t=a} g(p).$$

Tanım 3.5.6. Bir uyumlu burulmasız (torsiyonsuz) konneksiyon olan D bir Weyl konneksiyonu olarak alınırsa bu takdirde (M,C,D) üçlüsü bir Weyl yapısı olarak adlandırılır (Kadosh, 1996).

Teorem 3.5.2. $g\in C$ deki herhangi bir metrik ve ω $1-$form olmak üzere $D_X g + \omega(X)g = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek D Weyl konneksiyonu vardır. Böylece D aşağıdaki eşitliği sağlar (Kadosh, 1996).

$$g(D_X Y, Z) = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} X(g(Y,Z)) + \omega(X)\, g(Y,Z) - g([X,Z],Y) \\ +Y(g(X,Z)) + \omega(Y)\, g(Z,X) - g([Y,X],Z) \\ -Z(g(X,Y)) + \omega(Z)\, g(X,Y) - g([Z,Y],X) \end{array}\right\}. \qquad \textbf{(3.7)}$$

İspat:

Varlık:

D nin tanımı **(3.7)** da kullanılırsa D nin bir düz-ileri hesaplama ile serbest dönme konneksiyonu uygun olarak $D_X g + \omega(X) g = 0$ eşitliğini sağladığı görülür. Böylece **Teorem 3.5.1** yardmıyla D M üzerinde bir uyumlu konneksiyondur.

Teklik:

D bir serbest dönme konneksiyonu ve uyumlu olarak $D_X g + \omega(X) g = 0$ ile verilsin. D nin **(3.7)** nin açık formuna sahip olduğunu gösterelim.

$$(D_X g)(Y,Z) + g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) = X(g(Y,Z))$$

yardımıyla aşağıdaki şekilde bulunur.

$$g(D_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + \omega(X) g(Y,Z) - g(Y, D_X Z).$$

Serbest dönme şartları kullanılarak $D_X Z = [X,Z] + D_Z X$ elde edilir. Bu ifadeler yerlerine yazılarak,

$$g(D_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + \omega(X) g(Y,Z) - g([X,Z],Y) - g(D_Z X, Y).$$

Benzer olarak

$$g(D_Y Z, X) = Y(g(Z,X)) + \omega(Y) g(Z,X) - g([Y,X],Z) - g(D_X Y, Z).$$

ve

$$g(D_Z X, Y) = Z(g(X,Y)) + \omega(Z) g(X,Y) - g([Z,Y],X) - g(D_Y Z, X).$$

Yukarıdaki ilk iki eşitlik toplanır ve üçüncü eşitlikten çıkarılırsa istenen sonuç elde edilir.

Tanım 3.5.7. $F(g,\omega) = D$ olacak şekilde

$F : \{M \text{ üzerinde } 1- \text{formlar}\} \times C \rightarrow \{\text{Weyl konneksiyonları}\}$ şeklinde bir fonksiyon olsun. Burada **Teorem 3.5.1** ye göre $D = D(g,\omega)$ bir Weyl konneksiyonudur (Kadosh, 1996).

Önerme:

i) F örtendir.

ii) $F(g,\omega)=F(e^f g,\eta) \Leftrightarrow \eta=\omega-df$

İspat:

(i) **Teorem 3.5.1** e göre F örtendir. Gerçekten, **Teorem 3.5.1** ile uyumlu serbest dönme konneksiyonu D ve $\forall g \in C$ için burada $F(g,\omega)=D$ ile $1-$form olan ω vardır.

(ii) $F(g,\omega)=F(e^f g,\eta)=D$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} D_X(e^f g)+\eta(X)e^f g &= X(e^f g)+e^f D_X g+\eta(X)e^f g \\ &= df(X)e^f g+e^f D_X g+\eta(X)e^f g=0 \end{aligned}$$

elde edilir. $D_X g=-(df(X)+\eta(X))g)$ dir. Ayrıca $D_X g=-\omega(X)g$ ve $\omega=df+\eta$ olup tersine $\eta=\omega-df$ dir. $D=F(g,\omega)$ den $D=F(e^f g,\eta)$ **Teorem 3.5.2.** ye göre tektir o zaman kolaylıkla gösterilebilir ki $D_X(e^f g)+\eta(X)e^f g=0$ dır. Yani

$$\begin{aligned} D_X(e^f g)+\eta(X)e^f g &= e^f df(X)g+e^f D_X g+(\omega(X)-df(X))e^f g \\ &= e^f(D_X g+\omega(X)g)=0. \end{aligned}$$

Tanım 3.5.8. G konformal yapısı ile birlikte M manifoldu üzerinde bir Weyl yapısı: $F:G\to\wedge^1(M)$ ve bir diferansiyellenebilir fonksiyon f ile

$$F(e^f g)=F(g)-df \qquad \textbf{(3.8)}$$

şeklinde tanımlanır. Weyl yapısı ile birlikte manifolda Weyl manifoldu denir. Bir Weyl yapısını belirlemek için g bir Riemann metriği ve φ bir $1-$form ile $F:G\to\wedge^1(M)$ bir fonksiyoneldir ve g nin denklik sınıfı G için $F(e^f g)=\varphi-df$ olarak tanımlıdır (Folland, 1970).

Tanım 3.5.9. F nin farklı her bir formunun bir Weyl yapısına eğrilik mesafesi denir. Onlar yaygın olarak dış türevlere sahiptir ve tam formlar tarafından belirlenir (Folland, 1970).

Teorem 3.5.3. Bir Weyl manifoldu M nin bir lineer konneksiyonunun Weyl yapısı ile uygun olması için gerek ve yeter şart G den üretilen skaler çarpımın paralel dönüşümüne sahip olmasıdır (Folland, 1970).

Tanım 3.5.10. Bir M konformal manifoldu üzerinde bir Weyl yapısı Ψ metrik demetleri üzerinde bir konneksiyondur (Folland, 1970).

3.6. Weyl Eğrilik Tensörü

Weyl eğrilik tensörü; uzay-zaman içindeki bir eğriliğin ölçülmesinde kullanılır. Riemann eğrilik tensörü gibi Weyl tensörü de geodezikler boyunca olan hareket ile ilgilenir.

Weyl eğrilik tensörü Riemann eğrilik tensöründen farklıdır ve değişen (değişken) eğriliklerde de kullanılabilir. Eğer boyutlar 2 veya 3 ise Weyl eğrilik tensörü özdeş olarak kaybolur. Boyutlar 4 ve daha fazla ise Weyl eğrilik tensörü genellikle sıfırdan farklıdır.

3.7. Holomorfik Eğrilik

Simplektik topolojiler (manifoldlar) için $J-$holomorfik eğrilik teorisi Gromov tarafından ortaya konmuştur. $J-$holomorfik eğriler teorisi son zamanlarda simplektik geometri çalışmalarında simplektik manifoldların genel yapısını incelemek için devrim gibi olan yeni tekniklerden biri olmuştur (Gromov, 1985).

Darboux'un teoremine göre bütün simplektik formlar yerel diffeomorfiktir ve R^{2n} Öklid uzayı üzerinde standart lineer formu aşağıdaki gibidir.

$$\omega_0 = dx_1 \wedge dx_2 + ... + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n} \tag{3.9}$$

Bir hemen hemen kompleks simplektik manifoldun temel örneği (R^{2n}, ω_0) standart Öklid uzayıdır ve onun standart hemen hemen kompleks J_0 yapısı $n-$boyutlu kompleks C^n üzerinde de geçerlidir. Bu yapılar:

$$z_j = x_{2j-1} + i\, x_{2j} \tag{3.10}$$

$j = 1,2,...,n$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$J_0(\partial_{2j-1}) = \partial_{2j},\ J_0(\partial_{2j}) = -\partial_{2j-1}. \tag{3.11}$$

Burada $T_x R^{2n}$ in standart bazının açık ifadesi $\partial_j = \partial / \partial x_j$ şeklindedir (McDuff ve Salamon, 1995; Sato, 2003).

BÖLÜM 4
WEYL MEKANİK SİSTEMLER

4.1. Weyl – Euler – Lagrange Hareket Denklemleri

Bu kısımda kuantum ve klasik mekanikte çok kullanılan hemen hemen (para) Kähler–Weyl manifoldu $(M, J_{\pm}, g)$ üzerinde Euler – Lagrange hareket denklemleri elde edilecektir.

Bir manifold Weyl yapısı ile Weyl manifoldu olarak adlandırılır. Her bir Weyl manifoldunun doğrusal bağlantı ile uyumlu dönmesi (burulması) tektir. Bu nedenle Weyl yapısı (M, J, ∇) ile gösterilecektir. Burada M manifold, J holomorfik eğrilik formu ve ∇ ya M üzerinde bir serbest dönme konneksiyonudur. Eğer (M, J, ∇) Weyl manifoldu ise g metriği ile beraber (M, J_{-}, ∇, g) ye hemen hemen pseudo – Hermityen – Weyl manifoldu denir. M manifoldu üzerinde J_{-} hemen hemen kompleks yapı bir endomorfizm ise $J_{-}g = g$ için $J_{-}^{2} = -I$ ve dual formu $J_{-}^{*}g = g$ için $J_{-}^{*2} = -I$ dır. Benzer olarak (M, J_{+}, ∇) Weyl manifoldu ise g metriği ile beraber (M, J_{+}, ∇, g) ye hemen hemen para – Hermityen – Weyl manifoldu denir. Eğer M manifoldu üzerinde J_{+} hemen hemen parakompleks yapı bir endomorfizm ise $J_{+}g = g$ için $J_{+}{}^{2} = I$ ve dual formu $J_{+}^{*}g = g$ için $J_{+}^{*2} = I$ dır.

$(\pm)$ formalizmi $(+)$ parakompleks ile $(-)$ kompleks paralel geometrileri tartışmaya ve karşılaştırmaya izin verecektir. Örneğin hemen hemen (para) kompleks manifold $(M, J_{\pm})$ nin (para) Nijenhuis tensörü N ile gösterilirse (Newlander ve Nirenberg, 1957);

$$N_{\pm}(X,Y) = [X,Y] \mp J_{\pm}[J_{\pm}X, Y] \mp J_{\pm}[X, J_{\pm}Y] \pm [J_{\pm}X, J_{\pm}Y] \qquad \textbf{(4.1)}$$

dir. Gilkey ve Nikčević eğrilik operatörü Kähler özdeşliğini sağladığında 6 ve daha fazla boyutlu hemen hemen Hermityen – Weyl manifoldlarının Weyl yapısına açık olacağını gösterdiler. Eğer $J_{\pm}$ bir integrallenebilir hemen hemen (para) kompleks yapısı ile $P \in M$ de herhangi bir nokta verildiğinde hemen hemen (para) Hermityen – Weyl geometrisinde integrallenebilir hemen hemen para – kompleks yapısı olarak,

$$J_{\pm}\partial_{x_{2i-1}} = \partial_{x_{2i}} \text{ ve } J_{\pm}\partial_{x_{2i}} = \pm\partial_{x_{2i-1}}, \qquad i = 1,..,n \qquad \textbf{(4.2)}$$

yerel koordinatları önermişlerdir (Gilkey ve Nikčević, 2010). Bu yapıların paraholomorfik özelliği bakıldığında J_+ nın bileşkesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} J_+^2\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) &= J_+ \circ J_+\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) = J_+\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \\ J_+^2\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) &= J_+ \circ J_+\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) = J_+\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \end{aligned} \quad \textbf{(4.3)}$$

$J_+^2 = I$ olup hemen hemen parakomplekstir. J_- yapısı için;

$$\begin{aligned} J_-^2\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) &= J_- \circ J_-\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) = J_-\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \\ J_-^2\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) &= J_- \circ J_-\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) = J_-\left(\frac{-\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_{2i}} \end{aligned} \quad \textbf{(4.4)}$$

şeklinde $J_-^2 = -I$ olup hemen hemen komplekstir.

Yukarıdaki iki yapıya bakılarak $(M, J_\pm, \nabla, g)$ dörtlüsü bir hemen hemen para/pseudo Hermityen − Weyl manifoldu olarak adlandırılır. Eğer $J_\pm$ integrallenebilir ve izi $\nabla(J_\pm) = 0$ ise $(M, J_\pm, \nabla, g)$ dörtlüsüne (para) Kähler − Weyl manifoldu denir.

4.1.1. J_+ paraholomorfik yapılı Weyl − Euler − Lagrange hareket denklemleri

İlk olarak (M, J_+, ∇, g) hemen hemen para − Kähler − Weyl manifoldu J_+ paraholomorfik yapısı alınır ve onun koordinat fonksiyonu olarak (x_{2i-1}, x_{2i}) seçilirse;

$$J_+\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \text{ ve } J_+\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \quad \textbf{(4.5)}$$

dir. Hemen hemen parakompleks Weyl geometrik yapıları üzerindeki özel bir vektör alanı (semispray) ξ olmak üzere (Tekkoyun, 2005):

$$\xi = X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}},\ X_{2i-1} = \dot{x}_{2i-1} = x_{2i},\ X_{2i} = \dot{x}_{2i} = \ddot{x}_{2i-1} \quad \textbf{(4.6)}$$

şeklinde kurulur. Hemen hemen para − Kähler − Weyl geometrik yapıları üzerindeki para − Liouville vektör alanı $V_+ = J_+(\xi)$ olup,

$$V_+ = J_+(\xi) = X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i}} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \tag{4.7}$$

olarak hesaplanır. Hemen hemen para – Kähler – Weyl kapalı 2 – form ise $\Phi_L = -dd_{J_+}L$ olarak tanımlanır (Crampin, 1981). d_{J_+} formu ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$d_{J_+} = \frac{\partial}{\partial x_{2i}}dx_{2i-1} + \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i}. \tag{4.8}$$

Yapılan bu işlemlerin sonucunda $d_{J_+}L$;

$$d_{J_+} = \frac{\partial}{\partial x_{2i}}dx_{2i-1} + \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i} :\ F(M) \rightarrow \wedge^1 M \ \text{ yardımıyla}$$

$$d_{J_+}L = \frac{\partial L}{\partial x_{2i}}dx_{2i-1} + \frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i} \tag{4.9}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}\Phi_L = &-\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1}\wedge dx_{2i-1} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1}\wedge dx_{2i}\\ &-\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j}\wedge dx_{2i-1} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j}\wedge dx_{2i}\end{aligned} \tag{4.10}$$

olup gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}\Phi_L = &\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\wedge dx_{2j-1} + \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\wedge dx_{2j-1}\\ &+\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\wedge dx_{2j} + \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\wedge dx_{2j}\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir.

$$dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) = \frac{\partial x_{2i-1}}{\partial x_{2i}} = \delta_{2i}^{2i-1} = 0 \ \text{ ve } \ dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) = \frac{\partial x_{2i-1}}{\partial x_{2i-1}} = \delta_{2i-1}^{2i-1} = 1 \tag{4.12}$$

işlemleri dikkate alındığında;

$$\Phi_L(\xi)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\wedge dx_{2j-1}+\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\wedge dx_{2j-1} \\ +\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\wedge dx_{2j}+\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\wedge dx_{2j} \end{bmatrix}\left(X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}+X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)$$

(4.13)

yardımıyla

$$\begin{aligned}
\Phi_L(\xi)= & X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}\left[dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j-1}-dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i-1}\right] \\
& +X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j-1}-dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i}\right] \\
& +X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}\left[dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j}-dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i-1}\right] \\
& +X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j}-dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i}\right] \\
& +X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}\left[dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j-1}-dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i-1}\right] \\
& +X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j-1}-dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i}\right] \\
& +X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}\left[dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j}-dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i-1}\right] \\
& +X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j}-dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i}\right]
\end{aligned}$$

(4.14)

olur. Yukarıdaki ifadede sadeleştirmeler yapılarak aşağıdaki form bulunur.

$$\Phi_L(\xi)=\begin{bmatrix} X_{2i-1}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}\left[dx_{2j-1}-dx_{2i-1}\right]+X_{2i-1}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}\left[0dx_{2j-1}-dx_{2i}\right] \\ +X_{2i-1}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}\left[dx_{2j}-0dx_{2i-1}\right]+X_{2i-1}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}\left[0dx_{2j}-0dx_{2i}\right] \\ +X_{2i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}\left[0dx_{2j-1}-0dx_{2i-1}\right]+X_{2i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2j-1}-0dx_{2i}\right] \\ +X_{2i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}\left[0dx_{2j}-dx_{2i-1}\right]+X_{2i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2j}-dx_{2i}\right] \end{bmatrix}.$$

(4.15)

İşlemlere devam edilirse,

$$\begin{aligned}\Phi_L(\xi)=&X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1}-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\\ &+X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j}+X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\\ &+X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\end{aligned} \qquad \textbf{(4.16)}$$

olarak dinamik denklemin sol tarafı elde edilir. Dinamik denklemin sağ tarafının hesabında Lagrange enerji fonksiyonunu $E_L=V_+(L)-L$ olup burada $V_+(L)=[J_+(\xi)](L)$ dir. Ayrıca $V_+(L)=X_{2i-1}\dfrac{\partial L}{\partial x_{2i}}+X_{2i}\dfrac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}$ bulunur. Böylece

$$E_L=V_+(L)-L=X_{2i-1}\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}+X_{2i}\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}-L \qquad \textbf{(4.17)}$$

elde edilir. Bu denklemin diferansiyelini alınıp dE_L

$$\begin{aligned}dE_L=&X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1}+X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1}-\frac{\partial L}{\partial x_{2j-1}}dx_{2j-1}\\ &+X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j}+X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j}-\frac{\partial L}{\partial x_{2j}}dx_{2j}\end{aligned} \qquad \textbf{(4.18)}$$

olarak hesaplanır. $\Phi_L(\xi)=dE_L$ ifadesi kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1}-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\\
&+X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j}+X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\\
&\quad+X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\\
&=\\
&X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1}+X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1}-\frac{\partial L}{\partial x_{2j-1}}dx_{2j-1}\\
&\quad+X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j}+X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j}-\frac{\partial L}{\partial x_{2j}}dx_{2j}
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

bulunur. Her iki taraftaki aynı terimli ifadelerin sadeleştirmeler yapılırsa; aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\\
&-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}=-\frac{\partial L}{\partial x_{2j}}dx_{2j}-\frac{\partial L}{\partial x_{2j-1}}dx_{2j-1}.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

İndis uyumu için $j \to i$ alınıp aynı indisli terimler birbirine eşitlenir ve

$$
\begin{aligned}
&-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\\
&-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}=-\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}dx_{2i}-\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

bulunur. Böylece birinci ve ikinci denklem,

$$
\begin{aligned}
&-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}=-\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1}\\
&-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}=-\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}dx_{2i}
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

dir. Yukarıdaki ifadelerde düzenlemeler ile,

$$-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i}}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i}}=-\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}},$$
$$-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i-1}}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}=-\frac{\partial L}{\partial x_{2i}} \qquad \textbf{(4.23)}$$

olur. Gruplandırmalar yapılarak birinci ve ikinci denklem,

$$-\left(X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i}}+X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}=0,$$
$$-\left(X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i-1}}+X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}=0, \qquad \textbf{(4.24)}$$

olup aşağıdaki forma getirilir.

$$-\left(X_{2i-1}\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}+X_{2i}\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}=0, \qquad \textbf{(4.25)}$$

$$-\left(X_{2i-1}\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}+X_{2i}\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}=0. \qquad \textbf{(4.26)}$$

$\xi=X_{2i-1}\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}+X_{2i}\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}$ vektör alanı yerine yazılarak,

$$-\xi\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}=0,\quad -\xi\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}=0 \qquad \textbf{(4.27)}$$

olur. $\xi(\alpha(t))=\dot{\alpha}(t)=\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ integral eğrisi tanımı yukarıdaki formda göz önüne alınırsa;

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}=0,\quad -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}=0 \qquad \textbf{(4.28)}$$

şeklinde elde edilir. **(4.28)** de elde edilen denklemler hemen hemen para$-$Kähler$-$Weyl manifoldu (M,J_+,∇,g) üzerinde (M,Φ_L,ξ) mekanik sistem yapısı ile cisimlerin uzaydaki hareketlerinin zamana göre modellemesi olan Weyl$-$Euler$-$Lagrange diferansiyel denklemleri olarak isimlendirilir.

4.1.2. J_- holomorfik yapılı Weyl – Euler – Lagrange hareket denklemleri

Hemen hemen pseudo – Kähler – Weyl manifoldu (M, J_-, g) üzerinde Weyl – Euler – Lagrange denklemlerini elde edilecektir. İlk olarak hemen hemen pseudo – Kähler – Weyl manifoldlarının J_- holomorfik yapısı alınarak ve onun koordinat fonksiyonu olarak (x_{2i-1}, x_{2i}) seçilerek

$$J_-\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \text{ ve } J_-\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \tag{4.29}$$

holomorfik yapılarını baz alınarak hesaplamalar yapılacaktır. Hemen hemen kompleks Hermityen – Weyl geometrik yapıları üzerindeki vektör alanı

$$\xi = X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}},\ X_{2i-1} = \dot{x}_{2i-1} = x_{2i},\ X_{2i} = \dot{x}_{2i} = \ddot{x}_{2i-1} \tag{4.30}$$

şeklinde özel olarak seçilmiştir. Dinamik denklemin sol tarafı $\Phi_L = -dd_{J_-}L$ hesaplandığında

$$d_{J_-} = \frac{\partial}{\partial x_{2i}} dx_{2i-1} - \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} dx_{2i} \tag{4.31}$$

$$d_{J_-}L = \frac{\partial L}{\partial x_{2i}} dx_{2i-1} - \frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}} dx_{2i} \tag{4.32}$$

olur. $\Phi_L = -dd_{J_-}L = -d(d_{J_-}L)$

$$\begin{aligned}\Phi_L = &-\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}} dx_{2j-1}\wedge dx_{2i-1} + \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}} dx_{2j-1}\wedge dx_{2i} \\ &-\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}} dx_{2j}\wedge dx_{2i-1} + \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}} dx_{2j}\wedge dx_{2i}\end{aligned} \tag{4.33}$$

bulunur. İşlemlere devam edilirse

$$\begin{aligned}\Phi_L = &\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}} dx_{2i-1}\wedge dx_{2j-1} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}} dx_{2i}\wedge dx_{2j-1} \\ &+\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}} dx_{2i-1}\wedge dx_{2j} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}} dx_{2i}\wedge dx_{2j}\end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. $\Phi_L(\xi)$ için $\xi = X_{2i-1}\dfrac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\dfrac{\partial}{\partial x_{2i}}$ kullanılarak,

$$\Phi_L(\xi) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}} dx_{2i-1} \wedge dx_{2j-1} - \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}} dx_{2i} \wedge dx_{2j-1} \\ + \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}} dx_{2i-1} \wedge dx_{2j} - \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}} dx_{2i} \wedge dx_{2j} \end{bmatrix} \left(X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}} \right) \tag{4.35}$$

olur. Yapılan işlemlerde

$$dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) = \frac{\partial x_{2i-1}}{\partial x_{2i}} = \delta_{2i}^{2i-1} = 0 \quad \text{ve} \quad dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) = \frac{\partial x_{2i-1}}{\partial x_{2i-1}} = \delta_{2i-1}^{2i-1} = 1 \tag{4.36}$$

özelliği gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \Phi_L(\xi) = {} & X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}\left[dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j-1} - dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i-1} \right] \\ & - X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j-1} - dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i} \right] \\ & + X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}\left[dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j} - dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i-1} \right] \\ & - X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j} - dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i} \right] \\ & + X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}\left[dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j-1} - dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i-1} \right] \\ & - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j-1} - dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i} \right] \\ & + X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}\left[dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j} - dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i-1} \right] \\ & - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j} - dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i} \right] \end{aligned} \tag{4.37}$$

olur. İşlemlere devam edilip gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\Phi_L(\xi)=\begin{bmatrix} X_{2i-1}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}\left[dx_{2j-1}-dx_{2i-1}\right]-X_{2i-1}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}\left[0dx_{2j-1}-dx_{2i}\right] \\ +X_{2i-1}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}\left[dx_{2j}-0dx_{2i-1}\right]-X_{2i-1}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}\left[0dx_{2j}-0dx_{2i}\right] \\ +X_{2i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}\left[0dx_{2j-1}-0dx_{2i-1}\right]-X_{2i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2j-1}-0dx_{2i}\right] \\ +X_{2i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}\left[0dx_{2j}-dx_{2i-1}\right]-X_{2i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2j}-dx_{2i}\right] \end{bmatrix}$$

(4.38)

olur. Sıfır olan terimler çıkartılırsa

$$\Phi_L(\xi)=\begin{bmatrix} X_{2i-1}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1}-X_{2i-1}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1} \\ +X_{2i-1}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}+X_{2i-1}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j} \\ -X_{2i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1}-X_{2i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2i-1} \\ -X_{2i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j}+X_{2i}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2i} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.39)}$$

eşitliği elde edilir. Dinamik denklemin sağ tarafını hesap etmek gerekirse hemen hemen pseudo$-$Kähler$-$Weyl manifold üzerindeki $V_{-}=J_{-}(\xi)$ pseudo-Liouville vektör alanı

$$V_{-}=J_{-}(\xi)=X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i}}-X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \quad \textbf{(4.40)}$$

olur. $V_{-}(L)=X_{2i-1}\dfrac{\partial L}{\partial x_{2i}}-X_{2i}\dfrac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}$ dir. $E_L=V_{-}(L)-L$ enerji fonksiyonu

$$E_L=V_{-}(L)-L=X_{2i-1}\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}-X_{2i}\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}-L \quad \textbf{(4.41)}$$

bulunur. Bu denklemin diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned} dE_L = & X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1} - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1} - \frac{\partial L}{\partial x_{2j-1}}dx_{2j-1} \\ & + X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j} - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j} - \frac{\partial L}{\partial x_{2j}}dx_{2j} \end{aligned} \tag{4.42}$$

elde edilir. $\Phi_L(\xi) = dE_L$ ifadesinden,

$$\begin{aligned} & X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1} - X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1} + X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i} \\ & + X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j} - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1} - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2i-1} \\ & - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j} + X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2i} \\ = \; & X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1} - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1} - \frac{\partial L}{\partial x_{2j-1}}dx_{2j-1} \\ & + X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j} - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j} - \frac{\partial L}{\partial x_{2j}}dx_{2j} \end{aligned} \tag{4.43}$$

olarak hesaplanır. Bu ifadede gerekli sadeleştirmeler yapılırak,

$$\begin{aligned} & - X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1} + X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i} - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2i-1} \\ & + X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2i} = -\frac{\partial L}{\partial x_{2j-1}}dx_{2j-1} - \frac{\partial L}{\partial x_{2j}}dx_{2j} \end{aligned} \tag{4.44}$$

olur. $j \to i$ alınıp aynı indisli terimler birbirine eşitlenerek,

$$\begin{aligned} & - X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1} + X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i} - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i}}dx_{2i-1} \\ & + X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}dx_{2i} = -\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1} - \frac{\partial L}{\partial x_{2i}}dx_{2i} \end{aligned} \tag{4.45}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} & - X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1} - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i}}dx_{2i-1} = -\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1} \\ & + X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i} + X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}dx_{2i} = -\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}dx_{2i} \end{aligned} \tag{4.46}$$

denklemleri bulunur. Düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} -X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i}} - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i}} + \frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}} = 0 \\ +X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}} + \frac{\partial L}{\partial x_{2i}} = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.47)}$$

şekline dönüşür. Gruplandırmalar yapılarılarak, denklemler

$$\begin{aligned} -\left(X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i}} + X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}} = 0 \\ \left(X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x_{2i}} = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.48)}$$

formuna getirilir. İkinci çarpanlar dışarı çıkartılırak,

$$-\left(X_{2i-1}\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}} = 0, \qquad \textbf{(4.49)}$$

$$\left(X_{2i-1}\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x_{2i}} = 0. \qquad \textbf{(4.50)}$$

olur. $\xi = X_{2i-1}\dfrac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\dfrac{\partial}{\partial x_{2i}}$ vektör alanı yerlerine yazılırak,

$$-\xi\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}} = 0, \quad \xi\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x_{2i}} = 0 \qquad \textbf{(4.51)}$$

olur. $\xi(\alpha(t)) = \dot{\alpha}(t) = \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$ integral eğrisi tanımından birinci ve ikinci denklem,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x_{2i}} = 0 \qquad \textbf{(4.52)}$$

formunda bulunur. Böylece **(4.52)** de elde edilen denklemler hemen hemen pseudo – Kähler – Weyl manifoldu (M, J_-, ∇, g) üzerinde (M, Φ_L, ξ) Lagrangian mekanik sistem yapısı ile Weyl – Euler – Lagrange hareket denklemleri olarak adlandırılır.

4.1.3. $J_{\pm}$ (para) holomorfik yapılı Weyl – Euler – Lagrange hareket denklemleri

Bu kısımda **4.1.1** ve **4.1.2** de yapılan çalışmalar tek bir çatıda toplanacaktır. Yani, hemen hemen para/pseudo – Kähler – Weyl manifoldu $(M, J_{\pm}, g)$ üzerinde Weyl – Euler – Lagrange hareket denklemleri elde edilecektir. İlk olarak hemen hemen para/pseudo – Kähler – Weyl manifoldunun $J_{\pm}$ (para) holomorfik yapısı

$$J_{\pm}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \text{ ve } J_{\pm}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) = \pm\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \quad \textbf{(4.53)}$$

olarak tanımlansın. Hemen hemen (para) kompleks Weyl geometrik yapıları üzerindeki vektör alanı ξ,

$$\xi = X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}},\ X_{2i-1} = \dot{x}_{2i-1} = x_{2i},\ X_{2i} = \dot{x}_{2i} = \ddot{x}_{2i-1} \quad \textbf{(4.54)}$$

olarak seçildiğinde; M hemen hemen para/pseudo – Kähler – Weyl manifoldu üzerindeki $V_{\pm} = J_{\pm}(\xi)$ para/pseudo -Liouville vektör alanı,

$$V_{\pm} = J_{\pm}(\xi) = X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i}} \pm X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \quad \textbf{(4.55)}$$

olarak bulunur. $\Phi_L = -dd_{J_{\pm}}L$ hesaplaması için öncelikle

$$d_{J_{\pm}} = \frac{\partial}{\partial x_{2i}}dx_{2i-1} \pm \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i} \quad \textbf{(4.56)}$$

den

$$d_{J_{\pm}}L = \frac{\partial L}{\partial x_{2i}}dx_{2i-1} \pm \frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i} \quad \textbf{(4.57)}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\Phi_L = &-\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1}\wedge dx_{2i-1} \mp \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1}\wedge dx_{2i} \\ &-\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j}\wedge dx_{2i-1} \mp \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j}\wedge dx_{2i}\end{aligned} \quad \textbf{(4.58)}$$

gerekli işlemlerden sonra

$$\Phi_L = \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}} dx_{2i-1} \wedge dx_{2j-1} \pm \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}} dx_{2i} \wedge dx_{2j-1} + \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}} dx_{2i-1} \wedge dx_{2j} \pm \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}} dx_{2i} \wedge dx_{2j} \tag{4.59}$$

olur. Dış çarpımın özelliği ve $\xi = X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}}$ kullanılarak,

$$\Phi_L(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}} dx_{2i-1} \wedge dx_{2j-1} \pm \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}} dx_{2i} \wedge dx_{2j-1} \\ + \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}} dx_{2i-1} \wedge dx_{2j} \pm \frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}} dx_{2i} \wedge dx_{2j} \end{bmatrix} \left(X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}} \right) \tag{4.60}$$

elde edilir. Yapılacak işlemlerde Kronecker delta özelliği $dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) = \frac{\partial x_{2i-1}}{\partial x_{2i}} = \delta_{2i}^{2i-1} = 0$,

$dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) = \frac{\partial x_{2i-1}}{\partial x_{2i-1}} = \delta_{2i-1}^{2i-1} = 1$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\Phi_L(\xi) = {} & X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}\left[dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) dx_{2j-1} - dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) dx_{2i-1} \right] \\
& \pm X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) dx_{2j-1} - dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) dx_{2i} \right] \\
& + X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}\left[dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) dx_{2j} - dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) dx_{2i-1} \right] \\
& \pm X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) dx_{2j} - dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) dx_{2i} \right] \\
& + X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}\left[dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) dx_{2j-1} - dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) dx_{2i-1} \right] \\
& \pm X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) dx_{2j-1} - dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) dx_{2i} \right] \\
& + X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}\left[dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) dx_{2j} - dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) dx_{2i-1} \right] \\
& \pm X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) dx_{2j} - dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) dx_{2i} \right]
\end{aligned} \tag{4.61}$$

formu bulunur. Gerekli sadeleştirmeler ile,

$$\begin{aligned}\Phi_L(\xi) &= X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}\left[dx_{2j-1}-dx_{2i-1}\right] \pm X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}\left[0dx_{2j-1}-dx_{2i}\right]\\ &+ X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}\left[dx_{2j}-0dx_{2i-1}\right] \pm X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}\left[0dx_{2j}-0dx_{2i}\right]\\ &+ X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}\left[0dx_{2j-1}-0dx_{2i-1}\right] \pm X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2j-1}-0dx_{2i}\right]\\ &+ X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}\left[0dx_{2j}-dx_{2i-1}\right] \pm X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}\left[dx_{2j}-dx_{2i}\right]\end{aligned} \tag{4.62}$$

elde edilir. Sıfır olan terimler çıkartılırsa,

$$\begin{aligned}\Phi_L(\xi) &= X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1} - X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\\ &\mp X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i} + X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j}\\ &\pm X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1} - X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\\ &\pm X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j} \mp X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\end{aligned} \tag{4.63}$$

olarak hesaplanır. Dinamik denklemin sağ yanı için Lagrange fonksiyonunun enerji fonksiyonu $E_L = V_\pm(L) - L$ olup $V_\pm(L) = [J_\pm(\xi)](L)$ den $V_\pm(L) = X_{2i-1}\frac{\partial L}{\partial x_{2i}} \pm X_{2i}\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}$ olarak hesaplanır. Böylece,

$$E_L = V_\pm(L) - L = X_{2i-1}\frac{\partial L}{\partial x_{2i}} \pm X_{2i}\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}} - L \tag{4.64}$$

olur. Bu denklemin diferansiyeli alınırsa;

$$\begin{aligned}dE_L &= X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1} \pm X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1} - \frac{\partial L}{\partial x_{2j-1}}dx_{2j-1}\\ &+ X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j} \pm X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j} - \frac{\partial L}{\partial x_{2j}}dx_{2j}\end{aligned} \tag{4.65}$$

bulunur. $\Phi_L(\xi) = dE_L$ dinamik denklemin her iki yanı birbirine eşitlenirse;

$$
\begin{aligned}
&X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1}-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\mp X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\\
&X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j}\pm X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\\
&\pm X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j}\mp X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\\
&=X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2j-1}\pm X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2j-1}-\frac{\partial L}{\partial x_{2j-1}}dx_{2j-1}\\
&+X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2j}\pm X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2j}-\frac{\partial L}{\partial x_{2j}}dx_{2j}
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

şeklinde yazılır. Sadeleştirmeler yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
&-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\mp X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\\
&\mp X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2j}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\;=-\frac{\partial L}{\partial x_{2j-1}}dx_{2j-1}-\frac{\partial L}{\partial x_{2j}}dx_{2j}
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

olur. $j\to i$ alınıp aynı indisli terimler birbirine eşitlenerek,

$$
\begin{aligned}
&-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\mp X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}\\
&\mp X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\;=-\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1}-\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}dx_{2i}
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

elde edilir. Bu işlemler sonucunda

$$
\begin{aligned}
&-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i}}dx_{2i-1}=-\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1}\\
&\mp X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}\mp X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}dx_{2i}=-\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}dx_{2i}
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

olur. Düzenlemeler sayesinde birinci ve ikinci denklem

$$
\begin{aligned}
&-X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i}}-X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i}}=-\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\\
&\mp X_{2i-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i-1}\partial x_{2i-1}}\mp X_{2i}\frac{\partial^2 L}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}=-\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

bulunur. Gruplandırmalar yapılarak ikinci çarpanlar dışarı çakartılırsa,

$$-\left(X_{2i-1}\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}+X_{2i}\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}=0, \quad \textbf{(4.71)}$$

$$\mp\left(X_{2i-1}\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}+X_{2i}\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}=0. \quad \textbf{(4.72)}$$

elde edilir. **(4.71)** ve **(4.71)** de $\xi = X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}+X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}}$ vektör alanı yerine yazılıp parantezler iç kısma alınırsa,

$$-\xi\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}=0, \quad \textbf{(4.73)}$$

$$\mp\xi\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}=0 \quad \textbf{(4.74)}$$

bulunur. $\xi(\alpha(t))=\dot{\alpha}(t)=\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ integral eğrisi tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned}&(a)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}=0, \quad (b)\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}=0,\\ &(c)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}=0, \quad (d)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}=0\end{aligned} \quad \textbf{(4.75)}$$

şeklinde denklemler bulunur. Bu denklemler hemen hemen para/pseudo – Kähler – Weyl manifoldu $(M, J_{\pm}, \nabla, g)$ üzerinde (M, Φ_L, ξ) Lagrangian mekanik sistem yapısı ile cisimlerin belirli yörüngeleri için zamana bağlı hareketini gösteren modellemesi olan Weyl – Euler – Lagrange diferansiyel denklemleridir.

4.2. Weyl $-$ Hamilton Hareket Denklemleri

Bu bölümde kuantum ve klasik mekanikte çok kullanılan Weyl $-$ Hamilton hareket denklemleri bulunacaktır. M $n-$boyutlu hemen hemen para/pseudo $-$ Kähler $-$ Weyl manifoldunun $(M, J_{\pm}, \nabla, g)$ duali $(M^*, J_{\pm}^*, \nabla, g)$ olsun. M^* simplektik manifold üzerinde Hamilton fonksiyonu $H : M^* \to R$ şeklinde tanımlıdır. Böylece M^* üzerinde vektör alanı X_H olmak üzere $(M^*, J_{\pm}^*, \nabla, g)$ hemen hemen para/pseudo $-$ Kähler $-$ Weyl manifoldu üzerinde $(M^*, \Phi_{\pm}, X_H)$ üçlüsü Weyl $-$ Hamilton mekanik sistem olur.

4.2.1. J_+^* paraholomorfik yapılı Weyl $-$ Hamilton hareket denklemleri

Hemen hemen para-Kähler–Weyl manifoldu (M^*, J_+^*, ∇, g) üzerinde Weyl $-$ Hamilton hareket denklemleri için J_+^* dual paraholomorfik yapısı ve onun koordinat fonksiyonu olarak (x_{2i-1}, x_{2i}) seçilsin.

$$J_+^*(dx_{2i}) = dx_{2i-1} \quad \text{ve} \quad J_+^*(dx_{2i-1}) = dx_{2i} \tag{4.76}$$

eşitlikleri gereğince J_+^* hemen hemen parakompleks yapıdır. Yani bileşkesine bakılırsa; $J_+^{*2}(dx_{2i}) = J_+^* \circ J_+^*(dx_{2i}) = J_+^*(dx_{2i-1}) = dx_{2i}$, $J_+^{*2}(dx_{2i-1}) = J_+^* \circ J_+^*(dx_{2i-1}) = dx_{2i-1}$ dir. Liouville $1-$formu $\Omega_+ = J_+^*(\omega)$ ile 1-form ω_+ ve kapalı 2-form $\Phi_+ = -d\Omega_+$ ile tanımlıdır. Hemen hemen para $-$ Hermityen $-$ Weyl geometrik yapısı üzerindeki ω_+ $1-$formu

$$\omega_+ = \frac{1}{2}\left(x_{2i-1}dx_{2i-1} - x_{2i}dx_{2i}\right) \tag{4.77}$$

şeklinde kurulsun. Hemen hemen para $-$ Kähler $-$ Weyl manifoldu üzerindeki $\Omega_+ = J_+^*(\omega)$ para $-$ Liouville $1-$formu

$$\Omega_+ = J_+^*(\omega_+) = \frac{1}{2}x_{2i-1}dx_{2i} - \frac{1}{2}x_{2i}dx_{2i-1} \tag{4.78}$$

olur. $i_{X_H}\Phi_+ = \Phi_+(X_H)$ dinamik denklemin sol tarafını hesaplayalım. Hemen hemen para-Kähler–Weyl manifoldları (M^*, J_+^*, g) üzerinde Φ_+ kapalı $2-$form ve simplektik yapısı

$$\Phi_{+} = -d\Omega_{+} = -dJ_{+}^{*}(\omega_{+}) = -\frac{1}{2}d\left(x_{2i-1}dx_{2i} - x_{2i}dx_{2i-1}\right) \tag{4.79}$$

den

$$\Phi_{+} = -\frac{1}{2}\left[dx_{2j-1} \wedge dx_{2i} - 0dx_{2j-1} \wedge dx_{2i-1} 0dx_{2j} \wedge dx_{2i} - dx_{2j} \wedge dx_{2i-1}\right] \tag{4.80}$$

gerekli işlemlerden sonra

$$\Phi_{+} = \frac{1}{2}\left[dx_{2i} \wedge dx_{2j-1} - dx_{2i-1} \wedge dx_{2j}\right] \tag{4.81}$$

bulunur. Bir özel vektör alanı

$$X_{H} = X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}}, \tag{4.82}$$

olarak kurulusun. Böylece

$$\Phi_{+}\left(X_{H}\right) = \frac{1}{2}\left[dx_{2i} \wedge dx_{2j-1} - dx_{2i-1} \wedge dx_{2j}\right]\left(X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) \tag{4.83}$$

den

$$\Phi_{+}\left(X_{H}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X_{2i-1}\left(dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j-1} - dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i}\right) \\ -X_{2i-1}\left(dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j} - dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i-1}\right) \\ X_{2i}\left(dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j-1} - dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i}\right) \\ -X_{2i}\left(dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j} - dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i-1}\right) \end{bmatrix} \tag{4.84}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılarak;

$$\Phi_{+}\left(X_{H}\right) = \frac{1}{2}\left[-X_{2i-1}dx_{2i} - X_{2i-1}dx_{2j} + X_{2i}dx_{2j-1} + X_{2i}dx_{2i-1}\right] \tag{4.85}$$

bulunur. İndis uyumu için $j \to i$ yaplırsa

$$\Phi_+(X_H) = -X_{2i-1}dx_{2i} + X_{2i}dx_{2i-1} \qquad \textbf{(4.86)}$$

olur. Hamilton fonksiyonunun diferansiyeli alınırsa

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1} + \frac{\partial H}{\partial x_{2i}}dx_{2i} \qquad \textbf{(4.87)}$$

olur. Elde edilen ifadeleri dinamik denklem $i_{X_H}\Phi_+ = dH$ de yerine yazılırsa

$$-X_{2i-1}dx_{2i} + X_{2i}dx_{2i-1} = \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1} + \frac{\partial H}{\partial x_{2i}}dx_{2i} \qquad \textbf{(4.88)}$$

olarak hesaplanır. Aynı indisli terimler eşitlenerek;

$$-X_{2i-1}dx_{2i} = \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1}, \quad X_{2i}dx_{2i-1} = \frac{\partial H}{\partial x_{2i}}dx_{2i} \qquad \textbf{(4.89)}$$

bulunur.

$$X_{2i-1} = -\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}, \quad X_{2i} = \frac{\partial H}{\partial x_{2i}} \qquad \textbf{(4.90)}$$

Bulunan ifadeler yerlerine yazılırsa

$$X_H = \left(-\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_{2i}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{2i}} \qquad \textbf{(4.91)}$$

elde edilir. Ayrıca M nin duali M^* üzerinde Hamilton vektör alanının integral eğrisi $\alpha : I \subset R \to M^*$ ve $\alpha(t) = (x_{2i-1}, x_{2i}),\ t \in I$ den

$$X_H(\alpha(t)) = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dx_{2i-1}}{dt}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\bigg|_{\alpha(t)} + \frac{dx_{2i}}{dt}\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\bigg|_{\alpha(t)}$$ olduğundan

$$\left(-\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_{2i}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{2i}} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dx_{2i-1}}{dt}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + \frac{dx_{2i}}{dt}\frac{\partial}{\partial x_{2i}} \qquad \textbf{(4.92)}$$

dir. Böylece

$$-\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}=\frac{dx_{2i-1}}{dt},\quad \frac{\partial H}{\partial x_{2i}}=\frac{\partial}{\partial x_{2i}} \tag{4.93}$$

elde edilir. Böylece elde edilen denklemler hemen hemen para $-$ Kähler $-$ Weyl manifoldu $\left(M^*,J_+^*,\nabla,g\right)$ üzerinde $\left(M^*,\Phi_+,X_H\right)$ Hamilton Weyl mekanik sisteminin Weyl $-$ Hamilton hareket denklemleri olur.

4.2.2. J_-^* holomorfik yapılı Weyl $-$ Hamilton hareket denklemleri

Hemen hemen pseudo $-$ Kähler $-$ Weyl manifoldu $\left(M^*,J_-^*,\nabla,g\right)$ üzerinde Weyl $-$ Hamilton hareket denklemleri için

$$J_-^*(dx_{2i})=dx_{2i-1} \text{ ve } J_-^*(dx_{2i-1})=-dx_{2i} \tag{4.94}$$

kompleks yapısı baz olarak alınacaktır. J_-^* hemen hemen kompleks yapıdır. Yani bileşkesine bakılırsa; $J_-^{*2}(dx_{2i})=J_-^*\circ J_-^*(dx_{2i})=J_-^*(dx_{2i-1})=-dx_{2i}$ şeklinde $J_-^{*2}=-I$ ve $J_-^{*2}(dx_{2i-1})=J_-^*\circ J_-^*(dx_{2i-1})=J_-^*(-dx_{2i})=-dx_{2i-1}$ şeklinde $J_-^{*2}=-I$ dir. ω_- $1-$form olmak üzere Liouville $1-$formu $\Omega_-=J_-^*(\omega)$, ve $\Phi_-=-d\Omega_-$ ile tanımlıdır. Hemen hemen pseudo-Hermityen Weyl geometrik yapıları üzerindeki ω_- $1-$formu

$$\omega_-=\frac{1}{2}\left(-x_{2i-1}dx_{2i-1}-x_{2i}dx_{2i}\right) \tag{4.95}$$

seçilsin. Hemen hemen pseudo $-$ Kähler $-$ Weyl manifoldu M nin dualli M^* üzerindeki $\Omega_-=J_-^*(\omega)$ Liouville $1-$formu hesaplanırsa

$$\Omega_-=J_-^*(\omega_-)=\frac{1}{2}x_{2i-1}dx_{2i}-\frac{1}{2}x_{2i}dx_{2i-1} \tag{4.96}$$

olur. Hemen hemen pseudo $-$ Kähler $-$ Weyl manifoldları $\left(M,J_-^*,g\right)$ üzerinde Φ_- kapalı $2-$form ve simplektik yapıdır. Bu yüzden Φ_- kanonik simplektik özelliği gösterir ve Ω_- $1-$formu türetilir. İşlemler devam ettirilirse

$$\Phi_-=-d\Omega_-=-dJ_-^*(\omega_-)=-\frac{1}{2}d\left(x_{2i-1}dx_{2i}-x_{2i}dx_{2i-1}\right) \tag{4.97}$$

ve

$$\Phi_{-} = -\frac{1}{2}\left[dx_{2j-1}\wedge dx_{2i} - 0dx_{2j-1}\wedge dx_{2i-1}0dx_{2j}\wedge dx_{2i} - dx_{2j}\wedge dx_{2i-1}\right] \qquad \textbf{(4.98)}$$

den

$$\Phi_{-} = -\frac{1}{2}\left[-dx_{2i}\wedge dx_{2j-1} + dx_{2i-1}\wedge dx_{2j}\right] \qquad \textbf{(4.99)}$$

elde edilir. Bir özel vektör alanı $X_H = X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}}$ olacak şekilde seçildiğinde

$$\Phi_{-}(X_H) = -\frac{1}{2}\left[-dx_{2i}\wedge dx_{2j-1} + dx_{2i-1}\wedge dx_{2j}\right](X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}}) \qquad \textbf{(4.100)}$$

den

$$\Phi_{-}(X_H) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -X_{2i-1}\left(dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j-1} - dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i}\right) \\ +X_{2i-1}\left(dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j} - dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i-1}\right) \\ -X_{2i}\left(dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j-1} - dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i}\right) \\ +X_{2i}\left(dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j} - dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i-1}\right) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.101)}$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılarak;

$$\Phi_{-}(X_H) = -\frac{1}{2}\left[X_{2i-1}dx_{2i} + X_{2i-1}dx_{2j} - X_{2i}dx_{2j-1} - X_{2i}dx_{2i-1}\right] \qquad \textbf{(4.102)}$$

elde edilir. $j \to i$ alınıp

$$\Phi_{-}(X_H) = X_{2i-1}dx_{2i} - X_{2i}dx_{2i-1} \qquad \textbf{(4.103)}$$

olur. Hamilton fonksiyonunun diferansiyeli alınırsa

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}} dx_{2i-1} + \frac{\partial H}{\partial x_{2i}} dx_{2i} \quad \textbf{(4.104)}$$

elde edilir. Bulunan ifadeleri dinamik denklem $i_{X_H}\Phi_- = dH$ de yerlerine yazılırsa

$$-X_{2i-1}dx_{2i} + X_{2i}dx_{2i-1} = \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}} dx_{2i-1} + \frac{\partial H}{\partial x_{2i}} dx_{2i} \quad \textbf{(4.105)}$$

hesaplanır ve aynı indisli terimler eşitlenerek;

$$-X_{2i-1}dx_{2i} = \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}} dx_{2i-1}, \quad X_{2i}dx_{2i-1} = \frac{\partial H}{\partial x_{2i}} dx_{2i} \quad \textbf{(4.106)}$$

bulunur.

$$X_{2i-1} = -\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}, \quad X_{2i} = \frac{\partial H}{\partial x_{2i}} \quad \textbf{(4.107)}$$

olan ifadeler vektör alanı $X_H = X_{2i-1}\dfrac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\dfrac{\partial}{\partial x_{2i}}$ de yerlerine yazılırsa

$$X_H = \left(-\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_{2i}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{2i}} \quad \textbf{(4.108)}$$

elde edilir. Ayrıca Hamilton vektör alanının integral eğrisi $\alpha : I \subset R \to M$ ve $\alpha(t) = \left(x_{2i-1}, x_{2i}\right),\ t \in I$ olup $X_H\left(\alpha(t)\right) = \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{dx_{2i-1}}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\bigg|_{\alpha(t)} + \dfrac{dx_{2i}}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x_{2i}}\bigg|_{\alpha(t)}$ olduğundan

$$\left(-\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_{2i}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{2i}} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dx_{2i-1}}{dt}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + \frac{dx_{2i}}{dt}\frac{\partial}{\partial x_{2i}} \quad \textbf{(4.109)}$$

dir. Böylece

$$-\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}} = \frac{dx_{2i-1}}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_{2i}} = \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \quad \textbf{(4.110)}$$

Denklemleri bulunur. Bulunan denklemler hemen hemen pseudo$-$Kähler$-$Weyl manifoldu $\left(M^*, J_-^*, \nabla, g\right)$ üzerinde $\left(M^*, \Phi_-, X_H\right)$ Weyl$-$Hamilton mekanik sisteminin Weyl$-$Hamilton hareket denklemleri olur.

4.2.3. $J_{\pm}^{*}$ (para) holomorfik yapılı Weyl – Hamilton hareket denklemleri

Bu kısımda **4.2.1** ve **4.2.2** de yapılan çalışmalar birleştirilerek tek bir ifade olarak verilecektir. Açıkçası, hemen hemen para/pseudo – Kähler – Weyl manifoldu $\left(M^{*}, J_{\pm}^{*}, \nabla, g\right)$ üzerinde $\left(M^{*}, \Phi_{\pm}, X_{H}\right)$ Weyl – Hamilton mekanik sisteminin Weyl – Hamilton hareket denklemleri elde edilecektir. Burada

$$J_{\pm}^{*}(dx_{2i}) = dx_{2i-1} \text{ ve } J_{\pm}^{*}(dx_{2i-1}) = \pm dx_{2i} \quad \textbf{(4.111)}$$

$\Phi_{\pm} = -d\Omega_{\pm}$ ve $\Omega_{\pm} = J_{\pm}^{*}(\omega_{\pm})$ dır. Hemen hemen (para) kompleks Hermityen Weyl geometrik yapıları üzerindeki $1-$form $\omega_{\pm}$;

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm x_{2i-1}dx_{2i-1} - x_{2i}dx_{2i}\right) \quad \textbf{(4.112)}$$

Hemen hemen para/pseudo-Kähler–Weyl manifoldu M nin duali M^{*} üzerindeki $\Omega_{\pm} = J_{\pm}^{*}(\omega_{\pm})$ para/pseudo – Liouville $1-$formu;

$$\Omega_{\pm} = J_{\pm}^{*}(\omega_{\pm}) = \pm\frac{1}{2}x_{2i-1}dx_{2i} \mp \frac{1}{2}x_{2i}dx_{2i-1} \quad \textbf{(4.113)}$$

olarak hesaplanır. Kapalı $2-$form

$$\Phi_{\pm} = -d\Omega_{\pm} = -\frac{1}{2}d\left(\pm x_{2i-1}dx_{2i} \mp x_{2i}dx_{2i-1}\right). \quad \textbf{(4.114)}$$

olup

$$\Phi_{\pm} = -\frac{1}{2}\left[\pm dx_{2j-1} \wedge dx_{2i} \mp 0dx_{2j-1} \wedge dx_{2i-1} \pm 0dx_{2j} \wedge dx_{2i} \mp dx_{2j} \wedge dx_{2i-1}\right] \quad \textbf{(4.115)}$$

işlemlere devam edilirse

$$\Phi_{\pm} = \frac{1}{2}\left[\pm dx_{2i} \wedge dx_{2j-1} \mp dx_{2i-1} \wedge dx_{2j}\right] \quad \textbf{(4.116)}$$

bulunur. X_{H} vektör alanı; $X_{H} = X_{2i-1}\dfrac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + X_{2i}\dfrac{\partial}{\partial x_{2i}}$ ve

$$i_{X_H}\Phi_{\pm}=\Phi_{\pm}(X_H)=-\frac{1}{2}\left[\pm dx_{2i}\wedge dx_{2j-1}\mp dx_{2i-1}\wedge dx_{2j}\right](X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}+X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}})$$

(4.117)

olup gerekli işlemlerden sonra

$$\Phi_{\pm}(X_H)=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\pm X_{2i-1}\left(dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j-1}-dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i}\right)\\ \mp X_{2i-1}\left(dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2j}-dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)dx_{2i-1}\right)\\ \pm X_{2i}\left(dx_{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j-1}-dx_{2j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i}\right)\\ \mp X_{2i}\left(dx_{2i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2j}-dx_{2j}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)dx_{2i-1}\right)\end{bmatrix} \quad \textbf{(4.118)}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\Phi_{\pm}(X_H)=-\frac{1}{2}\left[\mp X_{2i-1}dx_{2i}\mp X_{2i-1}dx_{2j}\pm X_{2i}dx_{2j-1}\pm X_{2i}dx_{2i-1}\right] \quad \textbf{(4.119)}$$

bulunur. $j\to i$ indis değişikliği ile:

$$\Phi_{\pm}(X_H)=\mp X_{2i-1}dx_{2i}\pm X_{2i}dx_{2i-1} \quad \textbf{(4.120)}$$

olur. $d=\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1}+\frac{\partial}{\partial x_{2i}}dx_{2i}$ olup H fonksiyonu ile;

$$dH=\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1}+\frac{\partial H}{\partial x_{2i}}dx_{2i} \quad \textbf{(4.121)}$$

dir. $\Phi_{\pm}(X_H)=dH$ dinamik denklemi dikkate alındığında

$$\mp X_{2i-1}dx_{2i}\pm X_{2i}dx_{2i-1}=\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1}+\frac{\partial H}{\partial x_{2i}}dx_{2i} \quad \textbf{(4.122)}$$

bulunur. Aynı indisli terimler eşitlenerek;

$$\mp X_{2i-1}dx_{2i}=\frac{\partial H}{\partial x_{2i}}dx_{2i},\ \pm X_{2i}dx_{2i-1}=\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}dx_{2i-1} \quad \textbf{(4.123)}$$

$$\mp X_{2i-1} = \frac{\partial H}{\partial x_{2i}}, \ \pm X_{2i} = \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}} \qquad \textbf{(4.124)}$$

olduğu ortaya çıkar. Böylece Hamilton vektör alanı

$$X_H = \left(\mp \frac{\partial H}{\partial x_{2i}} \right) \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + \left(\pm \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}} \right) \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \qquad \textbf{(4.125)}$$

olur. Ayrıca M nin duali M^* üzerinde Hamilton vektör alanının integral eğrisi $\alpha : I \subset R \to M^*$ ve $\alpha(t) = (x_{2i-1}, x_{2i}),\ t \in I$ olup

$$X_H(\alpha(t)) = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dx_{2i-1}}{dt} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\bigg|_{\alpha(t)} + \frac{dx_{2i}}{dt} \frac{\partial}{\partial x_{2i}}\bigg|_{\alpha(t)} \quad \text{olduğundan;}$$

$$\left(\mp \frac{\partial H}{\partial x_{2i}} \right) \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + \left(\pm \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}} \right) \frac{\partial}{\partial x_{2i}} = \frac{dx_{2i-1}}{dt} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + \frac{dx_{2i}}{dt} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \qquad \textbf{(4.126)}$$

bulunur. Aynı formdaki terimler birbirine eşitlenirse

$$\left(\mp \frac{\partial H}{\partial x_{2i}} \right) \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} = \frac{dx_{2i-1}}{dt} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}, \quad \left(\pm \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}} \right) \frac{\partial}{\partial x_{2i}} = \frac{dx_{2i}}{dt} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \qquad \textbf{(4.127)}$$

elde edilir. Bu denklemlerde düzenlemeler yapılıdığında

$$\begin{aligned} &(a)\ \frac{\partial H}{\partial x_{2i}} = \frac{dx_{2i-1}}{dt},\ (b) - \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}} = \frac{dx_{2i}}{dt}, \\ &(c) - \frac{\partial H}{\partial x_{2i}} = \frac{dx_{2i-1}}{dt},\ (d)\ \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}} = \frac{dx_{2i}}{dt}. \end{aligned} \qquad \textbf{(4.128)}$$

denklemleri bulunur. Böylece elde edilen denklemler hemen hemen para/pseudo – Kähler – Weyl manifoldu $\left(M^*, J_\pm^*, \nabla, g\right)$ üzerinde $\left(M^*, \Phi_\pm, X_H\right)$ Weyl – Hamilton mekanik sisteminin Weyl – Hamilton hareket denklemleridir.

BÖLÜM 5
$W-$KESİTSEL EĞİRİKLİ WEYL MEKANİK SİSTEMLER

5.1. $W-$Kesitsel Eğrilikli Tanjant Manifoldları Üzerindeki Weyl Mekanik Sistemler

Tanım 5.1. M boyutu ikiden büyük ve $J^2=0$ holomorfik özelliğine sahip hemen hemen tanjant yapısı J ile kurulmuş bir manifold olsun. (M,J) ye hemen hemen çarpım manifoldu ve (M,J,∇,g) ye hemen hemen tanjant manifoldu denir.

Yukarıda verilen g, M manifoldu üzerinde bir semi-Riemann metriği ve J antisimetriktir. Yani $g(JX,Y)=0,\ \forall X,Y\in\chi(M)$ olarak tanımlıdır. Ayrıca eğer J ye bağlı Levi-Civita konneksiyonu paralel ise $\nabla J=0$ dır. Böylece (M,J,g) bir tanjant manifoldu üzerinde eğrilik $(0,4)$ tensör alanı

$$R(X,Y,Z,V)=g(R(X,Y)Z,V)=0,\ \forall X,Y,Z,V\in\chi(M) \tag{5.1}$$

ile gösterilir. g nin ∇ Levi-Civita konneksiyonuna bağlı $(1,3)$ Riemann eğrilik tensör alanı $R=[\nabla,\nabla]-\nabla_{[\,,\,]}$ ile ifade edilmektedir. Bu açıklamalara göre Riemann eğrilik tensör alanı için $R(X,Y,Z,V)=-R(Y,X,Z,V)=-R(X,Y,V,Z)=R(JX,JY,Z,V)$ ve $\sum_{\sigma}R(X,Y,Z,V)=0$ olur. Burada σ bütün dairesel permütasyonların üzerine toplamayı gösterir. Böylece bilinen $(0,4)$ tensör alanı $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$R_0(X,Y,Z,V)=\frac{1}{4}\{g(X,Y)g(Y,V)-g(X,V)g(Y,Z)\}) \tag{5.2}$$

formu ile tanımlanır. $\forall P\in M$ için S ye kısıtlanmış g nondejenere ise $S\subset T_PM$ alt uzayına nondejenere denir.

Eğer $\{u,v\}$, $S\subset T_PM$ düzleminin bir bazı ise σ nondejenere olması için gerek ve yeter şart $g(u,u)g(v,v)-[g(u,v)]^2\neq 0$ dır. Bu durumda $\sigma=span\{u,v\}$ nin kesitsel eğriliği

$$k(\sigma)=\frac{R(u,v,u,v)}{g(u,u)g(v,v)-[g(u,v)]^2} \tag{5.3}$$

olarak tespit edilir.

Herhangi $\forall X \in \chi(M)$ için X ve JX ortogonaldir. Düzlem olarak bir J yapısı tarafından değiştirilemeyen düzlem alınmaktadır. Herhangi $P \in M$ için $u \in T_P M$ vektörü $g(u,u)=0$ şartını sağladığında izotropiktir. Eğer $u \in T_P M$ izotropik değilse $\{u, Ju\}$ tarafından gerilen J düzleminin $H(u)$ kesitsel eğriliği, u tarafından tanımlanan $J-$kesitsel eğrilik olarak adlandırılır. $H(u)$ sabit ise (M, J, ∇, g) ye sabit $J-$kesitsel eğrilikli manifold veya bir uzay form denir.

Teorem 5.1. (M, J, g) her bir $P \in M$ için bir tanjant manifold olsun. $u \in T_P M$ için $H(u) = c_P$ olacak şekilde $c_P \in R$ vardır, öyle ki $g(u,u)g(Ju, Ju) \neq 0$ şartı sağlanır. Dolayısıyla bu R Riemann$-$Christoffel tensörü $R = cR_0$ eşitliğini sağlar. Burada $c, P \to c_P$ şeklinde tanımlanan fonksiyondur, tersi de mümkündür.

Tanım 5.2. Bir (M, J, g) tanjant manifoldu **Teorem 5.1.** in şartlarını sağlıyorsa c sabit diffeomorfik kesitsel eğrilikli olarak adlandırılır.

Teorem 5.2. $boyM > 2$ olmak üzere (M, J, g) bir tanjant manifold göstersin. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir:

(1) M , $c=0$ olmak üzere sabit diffeomorfik kesitsel eğrilikli bir uzaydır.
(2) R Riemann-Christoffel tensörü aşağıdaki ifadeye sahiptir.

$$R(X,Y,Z,V) = 0, \ \forall X,Y,Z,V \in \chi(M). \tag{5.4}$$

Bu bölümde $c=0$, diffeomorfik kesitsel eğrilikli, $2n \geq 2$ boyutlu uzay formlarının bir modeli olarak M manifoldunu $M = R_n^{2n}$ seçilerek oluşturulan (R_n^{2n}, J, g) üçlüsü üzerinde mekanik sistemler kurulacaktır. Bunun için gerekli bazı temel yapılar aşağıdaki gibidir.

R_n^{2n} in herhangi bir P noktasının bir U komşuluğunda (x_i, y_i) reel bir koordinat sistemi olsun. $T_P(R_n^{2n})$ tanjant uzayının bir bazı $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}$ ve $T_P^*(R_n^{2n})$ kotanjant uzayının doğal bazı $\{dx_i, dy_i\}$ olsun.

(R_n^{2n}, J, g) uzayı $2n \geq 2$ boyutlu uzay formlarının bir modelidir ve $c=0$

diffeomorfik kesitsel eğriliklidir. Burada g metriği aşağıdaki gibidir.

$$g = dx_i \otimes dy_i . \quad \textbf{(5.5)}$$

J hemen hemen tanjant yapısı ile

$$J = \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes dx_i \quad \textbf{(5.6)}$$

olup

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \text{ ve } J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = 0 \quad \textbf{(5.7)}$$

dir. Bu yapının

$$\begin{aligned} J^2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= J \circ J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = 0, \\ J^2\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) &= J \circ J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = J\left(0\right) = 0, \end{aligned} \quad \textbf{(5.8)}$$

dir. Yani, $J^2 = 0$ olup J bir tanjant yapıdır.

Ayrıca R_n^{2n} manifoldunun herhangi bir P noktasında $T_P^*(R_n^{2n})$ kotanjant uzayının J^* dual endomorfizmi yukarıda gösterildiği gibi $J^{*2} = 0$ eşitliğini sağlar ve tanjant yapılı olup aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$J^*(dx_i) = dy_i \text{ ve } J^*(dy_i) = 0 \quad \textbf{(5.9)}$$

(Çağlar, 2011; Miron, 2012; Blaga ve Crasmareanu, 2014).

Yukarıdaki yapılar Weyl teoremine aktarılacak ve $J \to W$ ile $J^* \to W^*$ seçilip Weyl mekanik denklemler bulunacaktır.

5.1.1. $W-$kesitsel eğrilikli konformal Weyl$-$Euler$-$Lagrange hareket denklemleri

Bu bölümde, (R_n^{2n}, W, ∇, g) uzay formu üzerinde Weyl$-$Euler$-$Lagrange denklemleri elde edilecektir. Sabit $W-$kesitsel eğrilikli uzay formda (R_n^{2n}, Φ_L, ξ) üçlüsü de Weyl mekanik sistemdir.

R_n^{2n} in yerel koordinatları $\{x_1,...,x_n\}$ ve $\{y_1,...,y_n\}$ dir. Tanjant yapıların gösterimi Weyl teoremini temsilen şekilsel ifade olarak $J \rightarrow W$ ve $J^* \rightarrow W^*$ şeklinde seçilecektir. Böylece λ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$W\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = e^{\lambda}\frac{\partial}{\partial y_i} \qquad \text{ve} \qquad W\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = 0 \tag{5.10}$$

formu elde edilir. Yapının bileşkesi bakılırsa $W^2 = 0$ olup tanjant (tam) yapıdır. Açıkça

$$W^2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = W \circ W\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = e^{\lambda} W\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = 0 \tag{5.11}$$

$$W^2\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = W \circ W\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = W(0) = 0 \tag{5.12}$$

şeklindedir. Weyl geometrik yapıları üzerindeki hemen hemen tanjant yapısı W için özel bir vektör alanı olan semispray aşağıdaki gibi seçilir.

$$\xi = X_i\frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i\frac{\partial}{\partial y_i}, \; X_i = \dot{x}_i = y_i, \; Y_i = \dot{y}_i = \ddot{x}_i \tag{5.13}$$

$i_W : \wedge^2 R_n^{2n} \rightarrow \wedge^1 R_n^{2n}$ şeklinde ise i_W ye iç çarpım (operatörü) ya da W tarafından verilen kontraksiyon operatörüdür.

$$d_W : \; F(R_n^{2n}) \rightarrow \wedge^1 R_n^{2n} \tag{5.14}$$

ile verilen d_W aşağıdaki tanımlanır.

$$d_W = e^{\lambda}\frac{\partial}{\partial y_i} dx_i \tag{5.15}$$

(R_n^{2n}, W, g) uzay formunda $\Phi_L = -d(d_W L)$ kapalı formu simplektik yapıdır ve

$$\begin{aligned}\Phi_L &= -e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial x_j}\frac{\partial L}{\partial y_i}dx_j \wedge dx_i - e^{\lambda}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i}dx_j \wedge dx_i \\ &\quad - e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial y_j}\frac{\partial L}{\partial y_i}dy_j \wedge dx_i - e^{\lambda}\frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i}dy_j \wedge dx_i\end{aligned} \tag{5.16}$$

olup gerekli işlemlerden sonra

$$\begin{aligned}\Phi_L &= e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial x_j}\frac{\partial L}{\partial y_i}dx_i \wedge dx_j + e^{\lambda}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i}dx_i \wedge dx_j \\ &\quad + e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial y_j}\frac{\partial L}{\partial y_i}dx_i \wedge dy_j + e^{\lambda}\frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i}dx_i \wedge dy_j\end{aligned} \tag{5.17}$$

formunda elde edilir.

$$\Phi_L(\xi) = \begin{bmatrix} e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial x_j}\frac{\partial L}{\partial y_i}dx_i \wedge dx_j + e^{\lambda}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i}dx_i \wedge dx_j \\ + e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial y_j}\frac{\partial L}{\partial y_i}dx_i \wedge dy_j + e^{\lambda}\frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i}dx_i \wedge dy_j \end{bmatrix}\left(X_i\frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \tag{5.18}$$

olup Kronecker deltanın aşağıdaki özelliği kullanılacaktır.

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1,\ \ dx_i\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial x_i}{\partial y_i} = 0 \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}&\Phi_L(\xi) = \\ &X_i e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial x_j}\frac{\partial L}{\partial y_i}\left(dx_i(\frac{\partial}{\partial x_i})dx_j - dx_j(\frac{\partial}{\partial x_i})dx_i\right) + X_i e^{\lambda}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i}\left(dx_i(\frac{\partial}{\partial x_i})dx_j - dx_j(\frac{\partial}{\partial x_i})dx_i\right) \\ &+ X_i e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial y_j}\frac{\partial L}{\partial y_i}\left(dx_i(\frac{\partial}{\partial x_i})dy_j - dy_j(\frac{\partial}{\partial x_i})dx_i\right) + X_i e^{\lambda}\frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i}\left(dx_i(\frac{\partial}{\partial x_i})dy_j - dy_j(\frac{\partial}{\partial x_i})dx_i\right) \\ &+ Y_i e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial x_j}\frac{\partial L}{\partial y_i}\left(dx_i(\frac{\partial}{\partial y_i})dx_j - dx_j(\frac{\partial}{\partial y_i})dx_i\right) + Y_i e^{\lambda}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i}\left(dx_i(\frac{\partial}{\partial y_i})dx_j - dx_j(\frac{\partial}{\partial y_i})dx_i\right) \\ &+ Y_i e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial y_j}\frac{\partial L}{\partial y_i}\left(dx_i(\frac{\partial}{\partial y_i})dy_j - dy_j(\frac{\partial}{\partial y_i})dx_i\right) + Y_i e^{\lambda}\frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i}\left(dx_i(\frac{\partial}{\partial y_i})dy_j - dy_j(\frac{\partial}{\partial y_i})dx_i\right)\end{aligned} \tag{5.20}$$

ifadesinde **(5.19)** dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
\Phi_L(\xi) &= \\
& X_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial y_i}\left(dx_j - dx_i\right) + X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i}\left(dx_j - dx_i\right) \\
& + X_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial y_j} \frac{\partial L}{\partial y_i}\left(dy_j - 0dx_i\right) + X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i}\left(dy_j - 0dx_i\right) \\
& + Y_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial y_i}\left(0dx_j - 0dx_i\right) + Y_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i}\left(0dx_j - 0dx_i\right) \\
& + Y_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial y_j} \frac{\partial L}{\partial y_i}\left(0dy_j - dx_i\right) + Y_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i}\left(0dy_j - dx_i\right)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

olup, sıfır olan terimler çıkartılırsa,

$$\begin{aligned}
\Phi_L(\xi) = \; & X_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dx_j - X_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dx_i + X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i} dx_j - X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i} dx_i \\
& + X_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial y_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dy_j + X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i} dy_j - Y_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial y_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dx_i - Y_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i} dx_i
\end{aligned} \tag{5.22}$$

şeklinde dinamik denklemin sol kısmındaki terim bulunur.

Dinamik denklemin sağ tarafındaki terim dE_L (Lagrange enerji fonksiyonunun diferansiyeli) bulunmalıdır. (R_n^{2n}, W, g) reel uzay formunda Liouville vektör alanı $V = W(\xi)$ ile verilen vektör alanıdır ve aşağıdaki formülle hesaplanır.

$$V = W(\xi) = X_i e^{\lambda} \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{5.23}$$

Buradan,

$$V(L) = X_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial y_i} \tag{5.24}$$

dir. (R_n^{2n}, W, g) reel uzay formunda mekanik sistemin potansiyel enerjisi P ve kinetik enerjisi T ile gösterilirse Lagrange fonksiyonu $L = T - P$ eşitliği ile, L ye ilişkin enerji fonksiyonu da $E_L = V(L) - L$ ile hesaplanır. Yani,

$$E_L = X_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial y_i} - L \tag{5.25}$$

dir. Enerji fonksiyonun diferansiyeli

$$\begin{aligned} dE_L &= X_i e^{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dx_j + X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i} dx_j - \frac{\partial L}{\partial x_j} dx_j \\ &+ X_i e^{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dy_j + X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i} dy_j - \frac{\partial L}{\partial y_j} dy_j \end{aligned} \tag{5.26}$$

bulunur. $\Phi_L(\xi) = dE_L$ dinamik denklem ile aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & X_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dx_j - X_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dx_i + X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i} dx_j - X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i} dx_i \\ & + X_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial y_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dy_j + X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i} dy_j - Y_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial y_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dx_i - Y_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i} dx_i \\ & = X_i e^{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dx_j + X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i} dx_j - \frac{\partial L}{\partial x_j} dx_j + X_i e^{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dy_j \\ & + X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i} dy_j - \frac{\partial L}{\partial y_j} dy_j \end{aligned} \tag{5.27}$$

Sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} & -X_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dx_i - X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_i} dx_i - Y_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial y_j} \frac{\partial L}{\partial y_i} dx_i \\ & -Y_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_i} dx_i = -\frac{\partial L}{\partial x_j} dx_j - \frac{\partial L}{\partial y_j} dy_j \end{aligned} \tag{5.28}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade de indis uyumu için $j \to i$ alınıp aynı indisli terimler birbirine eşitlenerek,

$$- X_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial y_i} - X_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial y_i} - Y_i e^{\lambda} \frac{\partial L}{\partial y_i} \frac{\partial L}{\partial y_i} - Y_i e^{\lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i} \tag{5.29}$$

bulunur. Böylece denklem

$$- e^{\lambda} \left(X_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial L}{\partial y_i} \right) (L) \frac{\partial L}{\partial y_i} - e^{\lambda} \left(X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i} \tag{5.30}$$

olur. Düzenlemelerle ξ vektör alanı yardımı ile

$$-e^{\lambda}\xi(L)\frac{\partial L}{\partial y_i}-e^{\lambda}\xi\left(\frac{\partial L}{\partial y_i}\right)=-\frac{\partial L}{\partial x_i} \qquad \textbf{(5.31)}$$

bulunur. $\alpha: I \subset R \to R_n^{2n}$ eğrisi ξ nın integral eğrisiyse, $\xi(\alpha(t))=\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$ integral eğrisi tanımından,

$$-e^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}(L)\frac{\partial L}{\partial y_i}-e^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i}\right)=-\frac{\partial L}{\partial x_i} \qquad \textbf{(5.32)}$$

formuna ulaşılır. Sonuç olarak

$$-e^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}(L)\frac{\partial L}{\partial y_i}-e^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \qquad \textbf{(5.33)}$$

den

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial y_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \qquad \textbf{(5.34)}$$

dinamik denklem elde edilir. **(5.34)** ile verilen denkleme $W-$**kesitsel eğrilikli konformal Weyl−Euler−Lagrange hareket denklemi** olarak adlandırılır. Sözkonusu olan Weyl−Euler−Lagrange denklemlerinin çözümleri (R_n^{2n}, W, g) reel uzay formu üzerindeki ξ nin yörüngeleridir. (R_n^{2n}, W, ∇, g) üzerinde sabit $W-$kesitsel eğrilikli tanjant yapısı ile verilen (R_n^{2n}, Φ_L, ξ) üçlüsüne Weyl mekanik sistem adı verilir. Bu ise sabit $W-$kesitsel eğrilikli reel uzaylarda mekanik sistemdir.

5.1.2. W^* −kesitsel eğrilikli konformal Weyl−Hamilton hareket denklemleri

Bu kısımda (R_n^{2n}, W, ∇, g) nin duali olan $\left((R_n^{2n})^*, W^*, \nabla, g\right)$ uzay formu üzerinde sabit W^*-kesitsel eğrilikli Weyl−Hamilton denklemleri elde edilecektir.

$2n-$boyutlu manifold $(R_n^{2n})^*$, Hamilton fonksiyonu $H = T + P$ ve kotanjant uzay $(R_n^{2n})^*$ üzerinde bir vektör alanı X_H olmak üzere: $H:(R_n^{2n})^* \to R$ şeklinde tanımlıdır. e^{λ} aktarılmış tanjant yapı,

$$W^*(dx_i) = e^{\lambda} dy_i\,,\quad W^*(dy_i) = 0 \tag{5.35}$$

dir. Bu yapılar için

$$\begin{aligned} W^{*2}(dx_i) &= W^* \circ W^*(dx_i) = e^{\lambda}\, W^*(dy_i) = 0, \\ W^{*2}(dy_i) &= W^* \circ W^*(dy_i) = W^*(0) = 0, \end{aligned} \tag{5.36}$$

dir. Buradan $W^{*2} = 0$ olup W^* tanjant (tam) yapıdır. $\left((R_n^{2n})^*, W^*, \nabla, g\right)$ üzerindeki $1-$form,

$$\omega = x_i dx_i + e^{2\lambda} y_i dy_i \tag{5.37}$$

olsun. Ω Liouville $1-$form formu şeklinde seçilirse $\Omega = W^*(\omega)$ eşitliğiyle tanjant yapı altındaki görüntüsü ile hesaplanır. Weyl manifoldu $(R_n^{2n})^*$ deki $\Omega = W^*(\omega)$ Liouville $1-$form aşağıdaki şekilde olur.

$$\Omega = W^*(\omega) = x_i e^{\lambda} dy_i \tag{5.38}$$

Bu ifade $(R_n^{2n})^*$ üzerinde $1-$formudur. Eğer $\Phi = -d\Omega$ kapalı form ise $(R_n^{2n})^*$ üzerinde bir simplektik yapıdır. Φ kapalı formu ile $(R_n^{2n})^*$ simplektik manifold olur. Hamilton vektör alanı

$$X_H = X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{5.39}$$

seçilsin. Weyl$-$Hamilton denklemlerini elde etmek için öncelikle $i_{X_H}\Phi = \Phi(X_H) = dH$ dinamik denkleminin sol ve sağ kısmını hesaplayalım. $(R_n^{2n})^*$ üzerindeki Φ kapalı $2-$formu ile

$$\Phi = -d\Omega = -d\left(x_i e^{\lambda} dy_i\right) \tag{5.40}$$

dir. Bu ifadenin değişkenlere göre kısmi türevi alınırsa

$$\Phi = -d\Omega = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} e^{\lambda} dx_j \wedge dy_i + x_i \dfrac{\partial \lambda}{\partial x_j} e^{\lambda} dx_j \wedge dy_i \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial y_j} e^{\lambda} dy_j \wedge dy_i + x_i \dfrac{\partial \lambda}{\partial y_j} e^{\lambda} dy_j \wedge dy_i \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

gerekli işlemlerden sonra

$$\Phi = \left[e^{\lambda} dy_i \wedge dx_j + x_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} e^{\lambda} dy_i \wedge dx_j + x_i \frac{\partial \lambda}{\partial y_j} e^{\lambda} dy_i \wedge dy_j \right] \tag{5.42}$$

bulunur. Dinamik denklemin sol yanı $i_{X_H}\Phi = \Phi(X_H)$ tır. Dolayısıyla

$$\Phi(X_H) = \left[e^{\lambda} dy_i \wedge dx_j + x_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} e^{\lambda} dy_i \wedge dx_j + x_i \frac{\partial \lambda}{\partial y_j} e^{\lambda} dy_i \wedge dy_j \right] \left(X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \tag{5.43}$$

ifadesinden

$$\Phi(X_H) = \begin{bmatrix} X_i e^{\lambda} \left(dy_i \frac{\partial}{\partial x_i} dx_j - dx_j \frac{\partial}{\partial x_i} dy_i \right) \\ + X_i x_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} e^{\lambda} \left(dy_i \frac{\partial}{\partial x_i} dx_j - dx_j \frac{\partial}{\partial x_i} dy_i \right) \\ + X_i x_i \frac{\partial \lambda}{\partial y_j} e^{\lambda} \left(dy_i \frac{\partial}{\partial x_i} dy_j - dy_j \frac{\partial}{\partial x_i} dy_i \right) \\ + Y_i e^{\lambda} \left(dy_i \frac{\partial}{\partial y_i} dx_j - dx_j \frac{\partial}{\partial y_i} dy_i \right) \\ Y_i x_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} e^{\lambda} \left(dy_i \frac{\partial}{\partial y_i} dx_j - dx_j \frac{\partial}{\partial y_i} dy_i \right) \\ + Y_i x_i \frac{\partial \lambda}{\partial y_j} e^{\lambda} \left(dy_i \frac{\partial}{\partial y_i} dy_j - dy_j \frac{\partial}{\partial y_i} dy_i \right) \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

olarak hesaplanır. Kronecker delta özelliği ile gerekli sadeleştirmeler yapılarak;

$$\Phi(X_H) = \begin{bmatrix} X_i e^{\lambda} \left(0dx_j - dy_i \right) + X_i x_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} e^{\lambda} \left(0dx_j - dy_i \right) \\ + X_i x_i \frac{\partial \lambda}{\partial y_j} e^{\lambda} \left(0dy_j - 0dy_i \right) + Y_i e^{\lambda} \left(dx_j - 0dy_i \right) \\ + Y_i x_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} e^{\lambda} \left(dx_j - 0dy_i \right) + Y_i x_i \frac{\partial \lambda}{\partial y_j} e^{\lambda} \left(dy_j - dy_i \right) \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

elde edilir. $j \rightarrow i$ alınarak

$$\Phi(X_H)=\begin{bmatrix} -X_ie^{\lambda}dy_i - X_ix_i\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_i}e^{\lambda}dy_i + Y_ie^{\lambda}dx_i + Y_ix_i\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_i}e^{\lambda}dx_i \\ +Y_ix_i\dfrac{\partial\lambda}{\partial y_i}e^{\lambda}dy_i - Y_ix_i\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}e^{\lambda}dy_i \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.46)}$$

bulunur. Sadeleştirmeler ile

$$\Phi(X_H)=\left[-X_ie^{\lambda}dy_i - X_ix_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}e^{\lambda}dy_i + Y_ie^{\lambda}dx_i + Y_ix_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}e^{\lambda}dx_i\right] \quad \textbf{(5.47)}$$

olur. Hamilton fonksiyonunun diferansiyeli,

$$dH=\frac{\partial H}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial H}{\partial y_i}dy_i \quad \textbf{(5.48)}$$

olup $i_{X_H}\Phi = dH$ de yerine yazılırsa

$$-X_ie^{\lambda}dy_i - X_ix_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}e^{\lambda}dy_i + Y_ie^{\lambda}dx_i + Y_ix_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}e^{\lambda}dx_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial H}{\partial y_i}dy_i \quad \textbf{(5.49)}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &Y_ie^{\lambda}dx_i + Y_ix_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}e^{\lambda}dx_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}dx_i, \\ &-X_ie^{\lambda}dy_i - X_ix_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}e^{\lambda}dy_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}dy_i, \end{aligned} \quad \textbf{(5.50)}$$

olup.

$$X_i=\frac{-1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad Y_i=\frac{1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad \textbf{(5.51)}$$

bulunur. İntegral eğrisi tanımı gereğince $\alpha : I\subset R\to (R_n^{2n})^*$ yardımıyla Hamilton vektör alanı X_H ın integral eğrisi $X_H(\alpha(t))=\dot{\alpha}(t),\ t\in I$ dır. Yerel koordinatlara göre ifadesi $\alpha(t)=\left(x_i(t),y_i(t)\right)$ ve

$$X_H(\alpha(t))=\frac{d\alpha}{dt}=\frac{dx_i}{dt}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)}+\frac{dy_i}{dt}\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{\alpha(t)} \quad \textbf{(5.52)}$$

ifadesinden

$$\frac{-1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}=\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{dy_i}{dt}\frac{\partial}{\partial y_i} \tag{5.53}$$

olur. Aynı indisli terimler birbirine eşitlenerek,

$$\frac{-1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \frac{1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}=\frac{dy_i}{dt}\frac{\partial}{\partial y_i} \tag{5.54}$$

elde edilir. Böylece Weyl $-$ Hamilton konformal denklemleri

$$\frac{-1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial H}{\partial y_i}=\frac{dx_i}{dt},\qquad \frac{1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial H}{\partial x_i}=\frac{dy_i}{dt} \tag{5.55}$$

$$(a)\ \frac{dx_i}{dt}=\frac{-1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial H}{\partial y_i},\quad (b)\ \frac{dy_i}{dt}=\frac{1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{5.56}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak **(5.56)** de $\left((R_n^{2n})^*,W^*,\nabla,g\right)$ kotanjant uzayda $((R_n^{2n})^*,\Phi,X_H)$ mekanik sistemi ile sabit W^*-**kesitsel eğrilikli konformal Weyl $-$ Hamilton hareket denklemleri** elde edilir.

BÖLÜM 6
KORUNUMLU WEYL MEKANİK SİSTEMLER

6.1. Mekanik Enerji ve Enerjinin Korunumu

6.1.1. Mekanik enerji

Enerji skaler bir büyüklüktür ve bir dinamik sistemin mekanik enerjisi E, potansiyel enerjisi P ile kinetik enerjisinin T nin toplamına, yani $E = P + T$ dir. Eğer sistemin enerjisi korunuyor ise ilk E_i ve son E_s mekanik enerji birbirine eşit olacaktır (Serway ve Beichner, 2005).

6.1.2. Korunumlu ve korunumlu olmayan kuvvetler

Kuvvetin korunumlu olması enerjinin korunumlu olması ya da olmamasıyla ilgilidir. Eğer cisme uygulanan kuvvetin enerjisi daha sonra tekrardan herhangi bir kuvvet uygulamadan alınabilirse o zaman kuvvet korunumludur denir. Aksi takdirde eğer uygulanan kuvvet tekrardan alınamıyorsa kuvvet başka enerji çeşitlerine dönüştürülmüş ise o zaman kuvvetin korunumsuz olduğunu söylenebilir. Örnek olarak korunumlu kuvvetler için yerçekimi kuvveti ve korunumlu olmayan kuvvetler için de sürtünme kuvveti verilebilir.

Bir cisim ya da sistem yalnızca korunumlu kuvvetlerin etkisinde ise mekanik enerjinin korunumu yasası bu cisim ya da sistemin toplam mekanik enerjinin sabit olduğunu ifade eder.

Korunumlu ile korunumlu olmayan kuvvet arasındaki fark şöyle açıklanabilir. Korunumlu bir kuvvetin bir cismi bir yerden bir yere götürürken yaptığı iş yoldan bağımsız iken, korunumlu olmayan bir kuvvet bir cisme etki ettiğinde bu kuvvet tarafından yapılan iş yoldan bağımsız değildir. Korunumlu bir kuvvetin bir parçacık üzerine yaptığı iş, parçacığın aldığı yola bağlı değildir, yalnızca parçacığın ilk ve son konumuna bağlıdır. Öyle bir P potansiyel enerji fonksiyonu tanımlanabilir ki korunumlu kuvvet tarafından yapılan iş sistemin potansiyel enerjisindeki azalmaya eşit olsun.

Bir parçacığın kinetik enerjisi $T = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ şeklindedir. Potansiyel enerji P, korunumlu bir kuvvete tabi olan bir cismin konumuna bağlıdır. Potansiyel enerji bir cismin iş yapabilme yeteneği olarak tanımlanır ve üzerine etki eden net kuvvetin tersi yönünde ilerledikçe büyüklüğü artar. Genel olarak konumun fonksiyonu olarak verilen bir $F(x)$

kuvvetinin etkisiyle bir doğru boyunca hareket eden bir parçacığın hareketi doğrusal hareketi belirtir. Bu durumda hareket denklemi $F(x) = m\,a = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ dır.

t zamanın fonksiyonu, $F(x)$ korunumlu bir kuvveti ve x de yolu temsil ederse; kuvvetin x_1 ve x_2 arasındaki potansiyel enerjisini temsil etsin. Bu bağıntıdan integral alınarak potansiyel enerji $P(x) = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$ olarak bulunur. Potansiyel enerjinin konuma göre türevi $F(x) = -\dfrac{dP}{dx}$ şeklinde kuvveti verir. Burada olduğu gibi sadece konuma bağlı olan kuvvetlere **korunumlu kuvvetler** denir.

Örneğin bir yayın geri çağırıcı kuvveti $F(x) = k\,x$ korunumlu, sürtünme kuvvetleri $F = \mu N$ korunumlu değildir. Kinetik enerji pozitif olup hareketler $0 \le P(x) \le E$ aralığında sınırlıdır. Toplam enerji $E = P + T$ sabittir.

6.1.3. Enerjinin korunumu kanunu

Toplam enerji tüm fiziksel süreçlerde korunur. Sisteme etki eden kuvvetler ister korunumlu, ister korunumsuz olsun, toplam enerji değişmez. Enerji fiziksel olaylarda, bir biçimden başka bir biçime dönüşebilir.

Bir parçacığın dt zaman aralığında, dx uzaklığındaki hareketi için kinetik enerji artışı $dT = d\mathrm{N}$ olur. Burada $d\mathrm{N} = F\,dx$ dır. $d\mathrm{N}$ sonsuz küçük dx yer değiştirmesi halinde F kuvveti tarafından yapılan iştir. Potansiyel enerjinin sıfır kabul edildiği düzlemde yapılan iş kinetik enerji değişimine eşittir. Düşey düzlemde yapılan iş ise potansiyel enerji değişimine yeryüzünde eşittir.

6.2. Korunumlu Weyl – Euler – Lagrange Hareket Denklemleri

Korunumlu dinamik sistemler için F ile verilen Weyl yapısı $F(e^{\lambda}g) = F(g) - d\lambda$ özdeşliği verilsin. Böylece bu sistemlere ait hareketi gösteren diferansiyel denklemlere yeni bir bakış açısı getirilebilir. Bunun için korunumlu dinamik sistemlerin enerjisinin değişmeyeceği dikkate alınacaktır (De Leon ve Rodrigues, 1989).

F bir fonksiyon ve i_{ξ} 2-formu 1-forma dönüştüren indirgeme fonksiyonu olup $F = i_{\xi}$ ve g metrik Φ_L simplektik 2-formu için $g = \Phi_L$ olarak seçilecek ve $i_{\xi}\Phi_L = dE_L$

yeniden yorumlanmış $i_\xi\left(e^\lambda \Phi_L\right)=dE_L$ dinamik denklemi elde edilmiştir. Bu denklemin sol yanı için $i_\xi\left(e^\lambda \Phi_L\right)=i_\xi(\Phi_L)-d\lambda$ olur. $i_\xi(\Phi_L)=\Phi_L(\xi)$ olduğu dikkate alınırsa denklem $i_\xi\left(e^\lambda \Phi_L\right)=\Phi_L(\xi)-d\lambda$ formunda olur. Dinamik denklemin sağ yanı değişmeyeceği için $\Phi_L(\xi)-d\lambda=dE_L$ yardımıyla

$$\Phi_L(\xi)=d(E_L+\lambda) \tag{6.1}$$

korunumlu Weyl – Euler – Lagrange fonksiyonunun dinamik formalizmi elde edilir. Yukarıdan anlaşılacağı gibi **(5.34)** de $L \to L+\lambda$ değişikliği olmaktadır. O halde

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(e^\lambda \frac{\partial(L+\lambda)}{\partial y_i}\right)+\frac{\partial(L+\lambda)}{\partial x_i}=0 \tag{6.2}$$

olarak elde edilen denklem (R_n^{2n}, W, ∇, g) üzerindeki $(R_n^{2n}, \Phi_L, \xi, F)$ korunumlu Lagrangian Weyl mekanik sistemine ait $W-$**kesitsel eğrilikli korunumlu Weyl – Euler – Lagrange diferansiyel denklemi** olur.

6.3. W^* – Kesitsel Eğrilikli Weyl – Hamilton Hareket Denklemleri

Korunumlu dinamik sistemler için Weyl yapısı $F(e^\lambda g)=F(g)-d\lambda$ özdeşliği ile verilen F bir fonksiyonudur. i_{X_H} $2-$formu $1-$forma dönüştüren indirgeme fonksiyonu olup $F=i_{X_H}$ ve g metrik, Φ simplektik $2-$formu için $g=\Phi$ olarak seçilerek $i_{X_H}\Phi=dH$ yeniden yorumlanmış ve $i_{X_H}\left(e^\lambda \Phi\right)=dH$ dinamik denklemi yeniden elde edilmiştir. Bu denklemin sol yanı için $i_{X_H}\left(e^\lambda \Phi\right)=i_{X_H}(\Phi)-d\lambda$ olur. $i_{X_H}(\Phi)=\Phi(X_H)$ olduğu dikkate alınırsa $i_{X_H}\left(e^\lambda \Phi\right)=\Phi(X_H)-d\lambda$ formu ortaya çıkar. Dinamik denklemin sağ tarafı değişmeyeceği için $\Phi(X_H)-d\lambda=dH$ den

$$\Phi(X_H)=d(H+\lambda) \tag{6.3}$$

Weyl – Hamilton fonksiyonunun dinamik formalizmi bulunur. Böylece **(5.56)** denklemi yeniden düzenlenerek;

$$(a)\ \frac{dx_i}{dt}=\frac{-1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\,\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial(H+\lambda)}{\partial y_i},\quad (b)\ \frac{dy_i}{dt}=\frac{1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\,\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial(H+\lambda)}{\partial x_i} \qquad \textbf{(6.4)}$$

denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem $((R_n^{2n})^*,W^*,\nabla,g)$ üzerindeki $((R_n^{2n})^*,\Phi,X_H,F)$ korunumlu Weyl – Hamilton mekanik sistemine ait W^* – **kesitsel eğrilikli korunumlu Weyl – Hamilton diferansiyel denklemleri** olur.

BÖLÜM 7
WEYL MEKANİK SİSTEMLERİNE AİT DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ VE GRAFİĞİ

7.1. Weyl Dinamik Denklemlerin Çözümü

Tanım 7.1. İkinci mertebeden ve iki bağımsız değişken içeren hemen hemen lineer kısmi diferansiyel denklemin genel şekli aşağıdaki formdadır.

$$A(x,y)z_{xx}+B(x,y)z_{xy}+C(x,y)z_{yy}+D(x,y,z,z_x,z_y)=0 \qquad \textbf{(7.1)}$$

$$\Delta(x,y)=\left[B(x,y)\right]^2-4A(x,y)C(x,y) \qquad \textbf{(7.2)}$$

operatörü **(7.1)** deki katsayılar kullanılarak tanımlansın. $\Delta(x,y)$ de;

1. $\Delta(x,y)>0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda *hiperbolik,*

2. $\Delta(x,y)=0$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda *parabolik,*

3. $\Delta(x,y)<0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda *eliptik,*

tiptendir denir (Koca, 2001).

Yukarıda yapılan hesaplamalar neticesinde mekanik sistemlere ait matematiksel modelleme ile uzayda hareket eden cisimlerin hareketlerinin yörüngelerini gösteren **(4.75), (4.128), (5.34), (5.56), (6.2)** ve **(6.4)** diferansiyel denklemleri elde edilmiştir. Bu diferansiyel denklemlerin kapalı çözümleri sembolik hesaplama yazılımları kullanılarak bulunabilir. Aşağıda denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için kodlar ve kapalı çözümler verilmiştir.

7.1.1. (4.75) denkleminin çözümü

$$(4.75/a)\ -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}=0, \quad (4.75/b)\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}=0 \qquad \textbf{(7.3)}$$

$$(4.75/c)\ -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}=0, \quad (4.75/d)\ -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}=0 \qquad \textbf{(7.4)}$$

denklemleri incelendiğinde $A(x,y)=0$, $B(x,y)=\pm1$ ve $C(x,y)=0$ ve $\Delta(x,y)=\left[\pm1\right]^2=1>0$ olduğundan denklemler hiperboliktir. Bu denklemlerin çözümü için Sembolik hesaplama yazılımları ile yazılan kodları ve çözümleri aşağıdaki gibidir.

1. $(4.75/a)$ ve $(4.75/b)$ nin kodları farklı olup çözümlerinin formatları ve kapalı çözümlerinin tipleri aynıdır.

$$(4.75/a)\ \ dif := -diff\,(diff\,(L_1(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i}), t) + diff\,(L_1(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i-1}); \qquad \textbf{(7.5)}$$

$$(4.75/b)\ \ dif := diff\,(diff\,(L_2(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i-1}), t) + diff\,(L_2(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i}); \qquad \textbf{(7.6)}$$

$(4.75/a)$ ve $(4.75/b)$ nin kapalı çözümü aşağıdaki gibidir.

$$cevap := \{L(x_{2i}, x_{2i-1}, t) = F_1(x_{2i}) * F_2(x_{2i-1}) * F_3(t)\} \qquad \textbf{(7.7)}$$

şeklindedir. Buradaki fonksiyonlar

$$\begin{aligned} &diff\,(F_1(x_{2i}), x_{2i}) = c_1 * F_1(x_{2i}),\\ &diff\,(F_2(x_{2i-1}), x_{2i-1}) = c_2 * F_2(x_{2i-1}),\\ &diff\,(F_3(t), t) = c_2 / c_1 * F_3(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(7.8)}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler çözülürse aşağıdaki formlar elde edilir.

$$\begin{aligned} &\ln F_1(x_{2i}) = c_1 * x_{2i} + c_3,\\ &\ln F_1(x_{2i-1}) = c_2 * x_{2i-1} + c_4,\\ &\ln F_3(t) = \frac{[\ln F_1(x_{2i-1}) - c_4] / x_{2i-1}}{[\ln F_1(x_{2i}) - c_3] / x_{2i}} + c_5. \end{aligned} \qquad \textbf{(7.9)}$$

2. $(4.75/a)$ ve $(4.75/b)$ denklem sisteminin kod ve çözüm aşağıdaki gibidir.

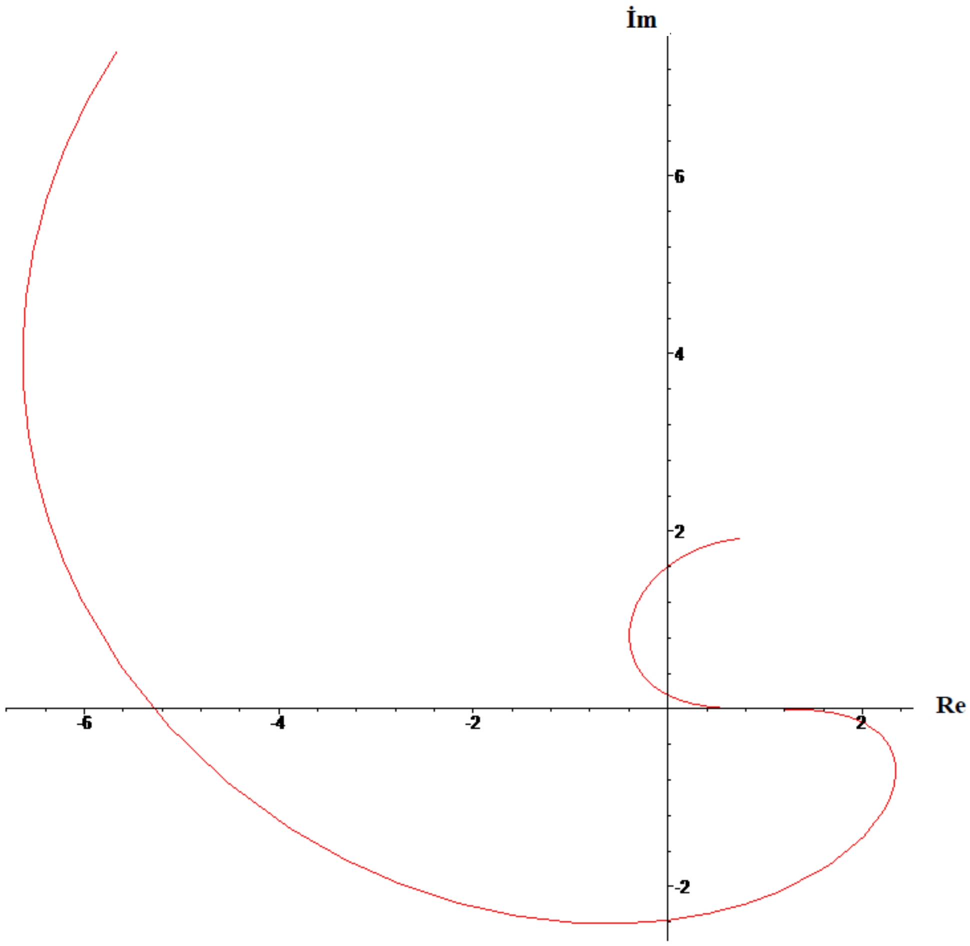
$$sistem := \begin{bmatrix} -diff\,(diff\,(L(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i}), t) + diff\,(L(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i-1}),\\ diff\,(diff\,(L(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i-1}), t) + diff\,(L(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i} \end{bmatrix}; \qquad \textbf{(7.10)}$$

$$cevap := \left\{ \begin{aligned} &L(x_{2i}, x_{2i-1}, t) = \exp(t * i) * F_3(x_{2i-1} - i * x_{2i})\\ &+ F_4(t) + \exp(-i * t) * F_5(x_{2i-1} + x_{2i} * i) + F_6(t) \end{aligned} \right\} \qquad \textbf{(7.11)}$$

dir. **(7.11)** nin grafiğini çizebilmek için $F_3(x_{2i-1} - i * x_{2i}) = t$, $F_4(t) = t$, $F_6(t) = 0$ ve $F_5(x_{2i-1} + x_{2i} * i) = t$ şeklinde özel seçim yapılacaktır. Sembolik hesaplama yazılımları ile bu çözümün grafiği aşağıdaki gibi olur.

> with(plots);

> complexplot(exp(t*Complex(0,1))*t+exp(t*Complex(0,-1)*t+t), t=-2...2);



Şekil 7.1. Lagrange denklem sistemi I

3. $(4.75/c)$ ve $(4.75/d)$ denklem sisteminin kod ve çözüm aşağıdaki gibidir.

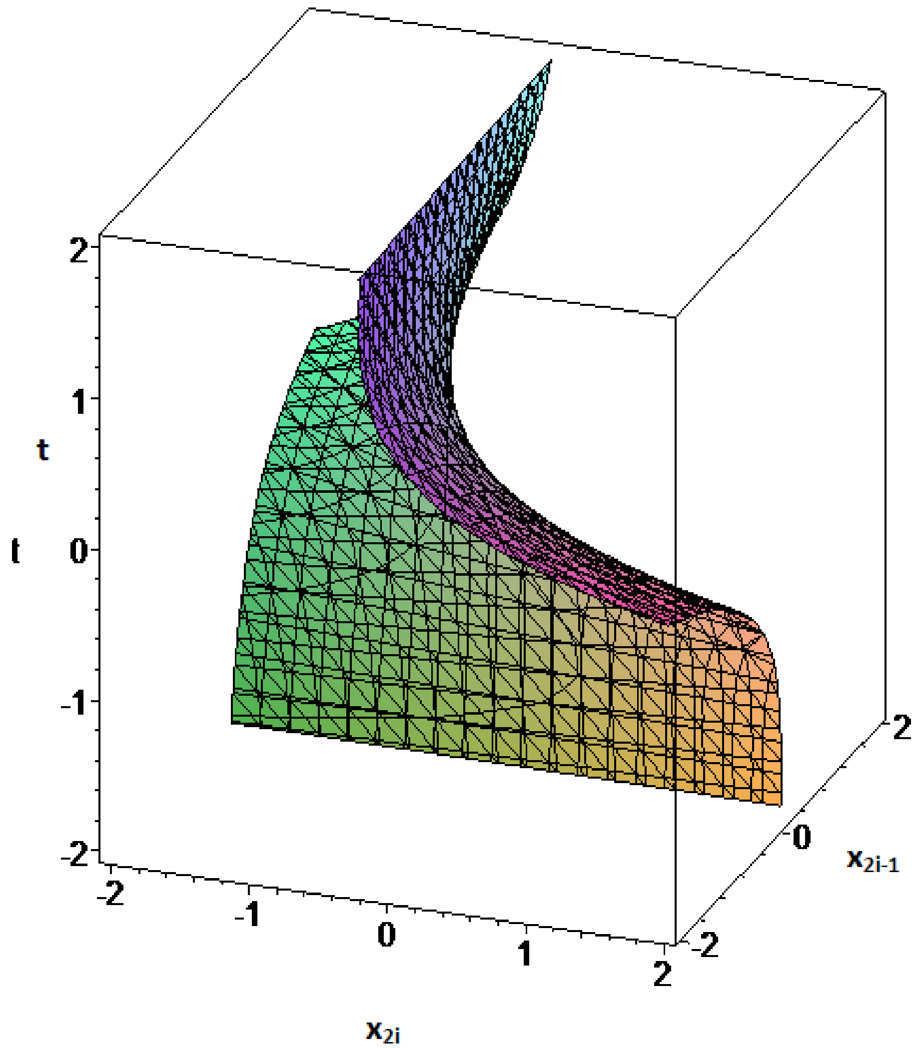
$$sistem := \begin{bmatrix} -diff\,(diff\,(L(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i}), t) + diff\,(L(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i-1}), \\ -diff\,(diff\,(L(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i-1}), t) + diff\,(L(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i}) \end{bmatrix}; \tag{7.12}$$

$$cevap := \begin{Bmatrix} L(x_{2i}, x_{2i-1}, t) = F_3(t) + \exp(t) * F_4(x_{2i-1} + x_{2i}) \\ + F_5(t) + \exp(-t) * F_6(x_{2i-1} - x_{2i}) \end{Bmatrix} \tag{7.13}$$

(7.13) un grafiğini çizebilmek için $F_3(t) = F_5(t) = t$, $F_4(x_{2i-1} + x_{2i}) = x_{2i}$ ve $F_6(x_{2i-1} - x_{2i}) = x_{2i-1}$ şeklinde özel seçim yapılacaktır. Sembolik hesaplama yazılımları ile **(7.13)** nin grafiği aşağıdaki gibi çizilir.

> with(plots);

> implicitplot3d(t+exp(t)*x_{2i}+exp(-t)*x_{2i-1}, x_{2i}=-2...2, x_{2i-1}=-2...2, t=-2...2, numpoints=5000);



Şekil 7.2. Lagrange denklem sistemi II

7.1.2. (4.128) denkleminin çözümü

$$(4.128/a)\ \frac{\partial H}{\partial x_{2i}}=\frac{dx_{2i-1}}{dt},\ (4.128/b)\ -\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}=\frac{dx_{2i}}{dt}, \qquad \textbf{(7.14)}$$

$$(4.128/c)-\frac{\partial H}{\partial x_{2i}}=\frac{dx_{2i-1}}{dt},\ (4.128/d)\ \frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}=\frac{dx_{2i}}{dt} \qquad \textbf{(7.15)}$$

1. $(4.128/a)$ ve $(4.128/b)$ denklem sisteminin çözümü;

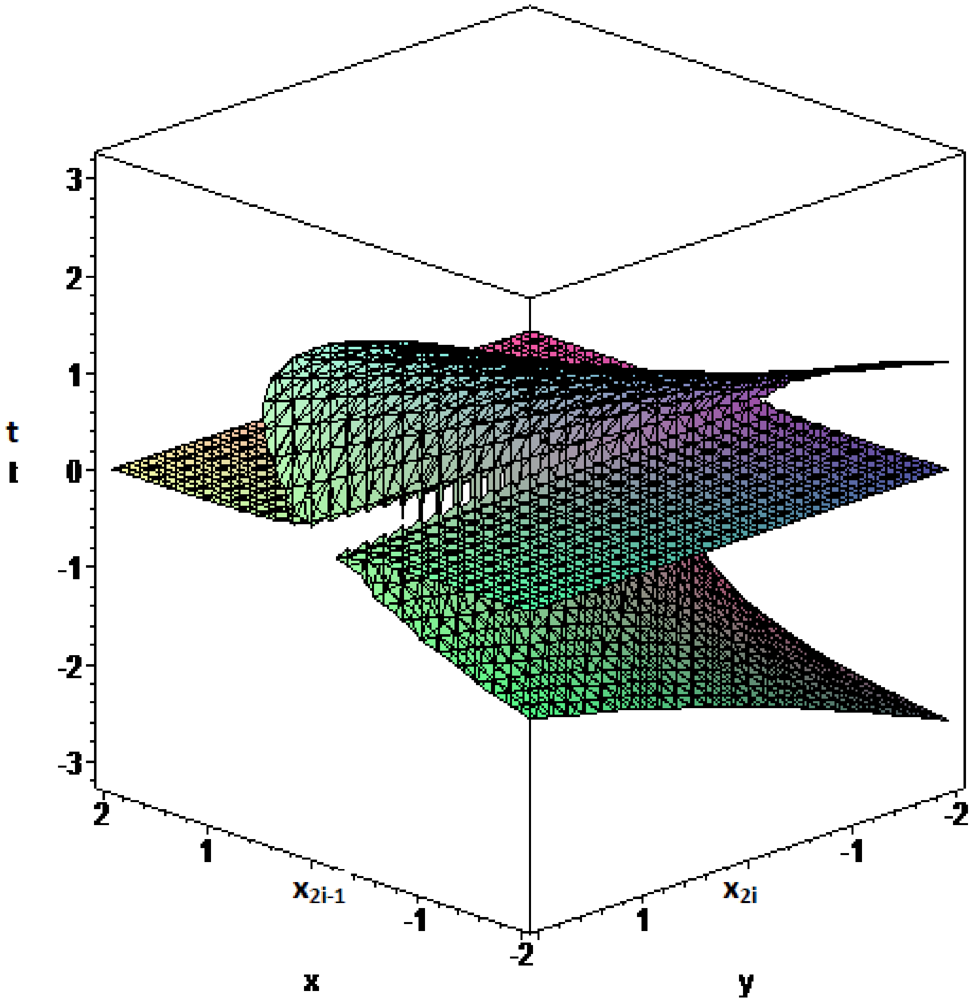
$$sistem := \begin{bmatrix} diff\,(H(x_{2i},x_{2i-1},t),x_{2i}) = diff\,(x_{2i-1}(t),t), \\ -\,diff\,(H(x_{2i},x_{2i-1},t),x_{2i-1}) = diff\,(x_{2i}(t),t); \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.16)}$$

olur. Yukarıdaki sistemin çözümünün yapılabilmesi için özel olarak $x_{2i}(t)=t-\sin(t)$ ve $x_{2i-1}(t)=1-\cos(t)$ seçilmiştir.

$$cevap := \begin{Bmatrix} H(x_{2i},x_{2i-1},t)=(x_{2i-1}-F_1(t))*\cos(t) \\ +\,x_{2i}*\sin(t)-x_{2i-1}+F_1(t) \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(7.17)}$$

(7.17) in grafiğini çizebilmek için $F_1(t)=t$ şeklinde özel seçim yapılacaktır. Sembolik hesaplama yazılımları ile bu bağıntının grafiği aşağıdaki gibi çizilir.

> with(plots);
>
> implicitplot3d((x2i-1-t)*cos(t)+x2i*sin(t)-x2i-1+t, x2i=-2...2, x2i-1=-2...2, t= -Pi...Pi, numpoints=10000);



Şekil 7.3. Hamilton denklem sistemi I

2. $(4.128/c)$ ve $(4.128/d)$ denklem sisteminin çözümü;

$$sistem := \begin{bmatrix} -diff\,(H(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i}) = diff\,(x_{2i-1}(t), t), \\ diff\,(H(x_{2i}, x_{2i-1}, t), x_{2i-1}) = diff\,(x_{2i}(t), t); \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.18)}$$

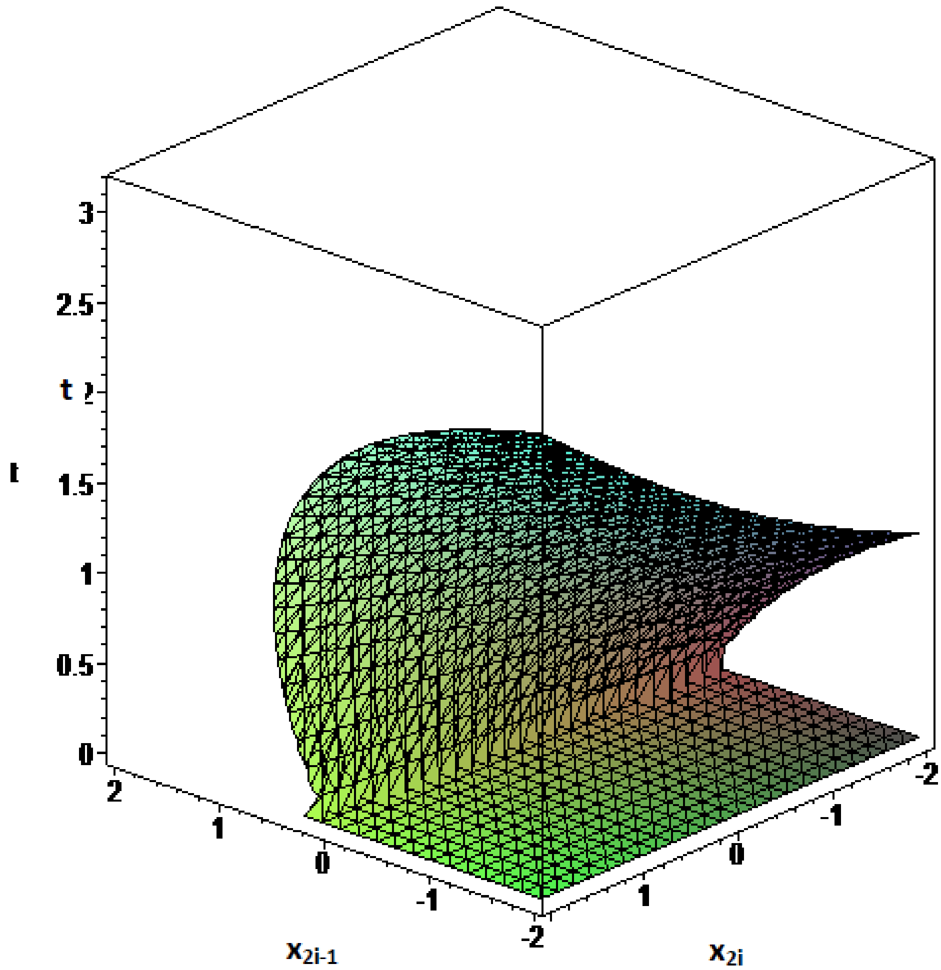
şeklindedir. Yukarıdaki sistemin çözümünün yapılabilmesi için özel olarak $x_{2i}(t) = t - \sin(t)$ ve $x_{2i-1}(t) = 1 - \cos(t)$ seçilecektir.

$$cevap := \begin{Bmatrix} H(x_{2i}, x_{2i-1}, t) = (-1+\cos(t)) * F_1(t) - x_{2i} * \sin(t) \\ + x_{2i-1} - x_{2i-1} * \cos(\mathrm{t}) \end{Bmatrix}. \qquad \textbf{(7.19)}$$

(7.19) in grafiğini çizebilmek için $F_1(t) = t$ şeklinde özel seçim yapılacaktır. Sembolik hesaplama yazılımları ile bu bağıntının grafiği aşağıdaki gibi çizilir.

> with(plots);

> implicitplot3d((-1+cos(t))*t-(x_{2i})*sin(t)+(x_{2i-1})-(x_{2i-1})*cos(t), x_{2i}=-2...2, x_{2i-1} =-2...2, t=0...Pi, numpoints=10000);



Şekil 7.4. Hamilton denklem sistemi II

7.1.3. (5.34) denkleminin çözümü

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial y_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \tag{7.20}$$

denklemlerinde $A(x,y)=0$, $B(x,y)=-e^{\lambda}$ ve $C(x,y)=0$ dir. Ayrıca e^{λ} pozitif olarak tanımlandığından $\Delta(x,y)=\left[-e^{\lambda}\right]^2=e^{2\lambda}>0$ diferansiyel denklem hiperbolik tiptedir. Bu denkleme ait kod aşağıdaki gibidir.

$$dif := -diff\,(\exp(\lambda(x,y,t)*diff\,(L(x,y,t),y),t)+diff\,(L(x,y,t),x); \tag{7.21}$$

dır. Çözümün yapılabilmesi için $\lambda(x,y,t)=x^2+y^2$ özel olarak seçilirse kapalı çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$cevap := \left\{L(x,y,t)=F_1(x)*F_2(y)*F_3(t)-\frac{c_2+c_3*x^2}{c_3}\right\} \tag{7.22}$$

Bu ifadedeki kapalı fonksiyonlar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}&diff\,(F_1(x),x)=c_1*\exp(x^2)*F_1(x),\\&diff\,(F_2(y),y)=c_2*\exp(-y^2)*F_2(y),\\&diff\,(F_3(t),t)=c_1*F_3(t)/c_2.\end{aligned} \tag{7.23}$$

7.1.4. (5.56) denkleminin çözümü

$$(5.56/a)\frac{\partial H}{\partial y_i}=-e^{\lambda}\left[1+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]\frac{dx_i}{dt},\ (5.56/b)\frac{\partial H}{\partial x_i}=e^{\lambda}\left[1+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]\frac{dy_i}{dt} \tag{7.24}$$

(a) ve (b) için oluşan denklem sisteminin kod ve çözüm aşağıdaki gibidir.

$$dif := \begin{bmatrix}diff\,(H(x,y,t),y)=-\exp(\lambda(x,y,t))*(1+x*diff\,(\lambda(x,y,t),x)*diff\,(x(t),t),\\ diff\,(H(x,y,t),x)=\exp(\lambda(x,y,t))*(1+x*diff\,(\lambda(x,y,t),x)*diff\,(y(t),t)\end{bmatrix};$$

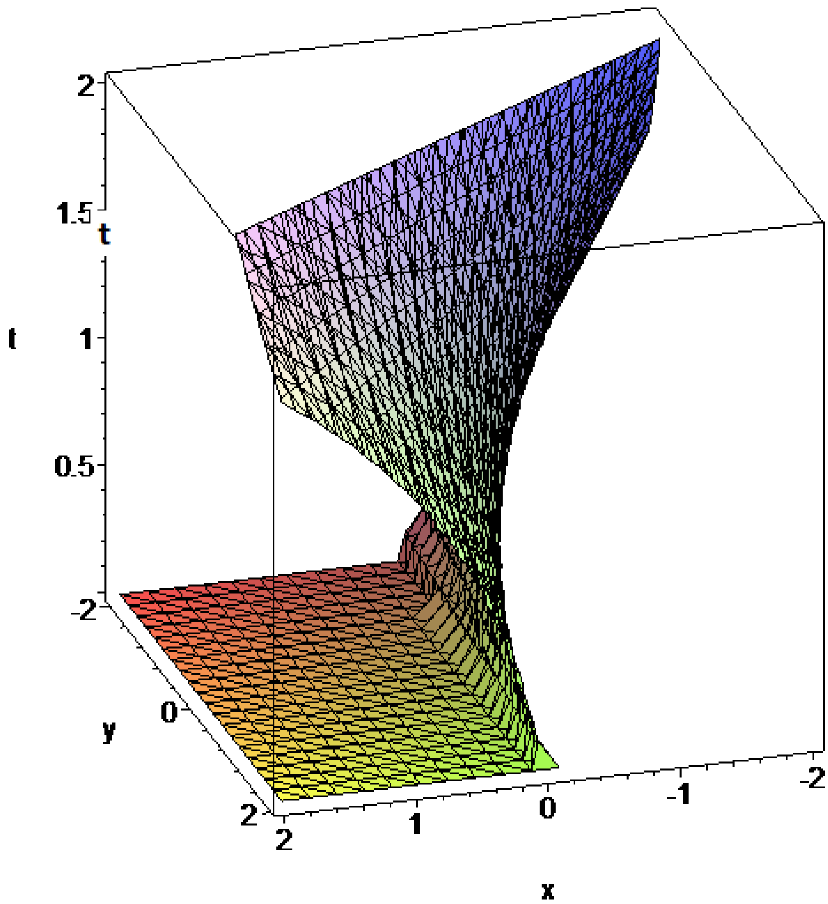
(7.25)

(7.25) denkleminin **ç**özümünün yapılabilmesi için $x(t)=t-\sin(t)$ ve $y(t)=1-\cos(t)$ ve $\lambda(x,y,t)=t$ özel bir fonksiyon olarak seçilirse aşağıdaki kapalı çözüm elde edilir.

$$cevap := \left\{ H(x,y,t) = \exp(t) * \begin{pmatrix} (y - F_1(t)) * \cos(t) \\ + x * \sin(t) - y + F_1(t) \end{pmatrix} \right\} \qquad \textbf{(7.26)}$$

(7.26) in grafiğini çizebilmek için $F_1(t) = t$ şeklinde özel seçim yapılacaktır. Sembolik hesaplama yazılımları ile bu çözümün grafiği aşağıdaki gibi çizilir.

```
> with(plots);
> implicitplot3d(exp(t)*((1-cos(t))*cos(t)+x *sin(t)-y+y*cos(t)), x=-2...2, y=-2...2,
                 t=0...2,  numpoints=50000);
```



Şekil 7.5. Konformal Lagrange denklemi

7.1.4. (6.2) denkleminin çözümü

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\lambda}\frac{\partial(L+\lambda)}{\partial y_i}\right)+\frac{\partial(L+\lambda)}{\partial x_i}=0 \qquad \textbf{(7.27)}$$

denklemlerinde $A(x,y)=0$ $B(x,y)=-e^{\lambda}$ ve $C(x,y)=0$ dir. Ayrıca e^{λ} pozitif olarak tanımlandığından $\Delta(x,y):\left[-e^{\lambda}\right]^2=e^{2\lambda}>0$ hiperbolik tiptedir. Bu denkleme ait kod ve çözüm aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} dif &:= -diff\,(\exp(\lambda(x,y,t))*diff\,(L(x,y,t)+\lambda(x,y,t),y),t) \\ &\quad + diff\,(L(x,y,t)+\lambda(x,y,t),x); \end{aligned} \qquad \textbf{(7.28)}$$

(7.28) çözümün yapılabilmesi için $\lambda(x,y,t)=x*y*t$ özel seçilirse kapalı çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$cevap := \{L(x,y,t)=F_1(x)*F_2(y)*F_3(t)-(c_2*x+c_3)/c_2\} \qquad \textbf{(7.29)}$$

Burada;

$$\begin{aligned} &diff\,(F_1(x),x)=c_1*\exp(x)*F_1(x), \\ &diff\,(F_2(y),y)=(c_1/c_3)*\exp(-y)*F_2(y), \\ &diff\,(F_3(t),t)=c_3*F_3(t). \end{aligned} \qquad \textbf{(7.30)}$$

dir.

7.1.6. (6.4) denklem sisteminin çözümü

$$(6.4/a)\ \frac{\partial(H+\lambda)}{\partial y_i}=-e^{\lambda}\left[1+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]\frac{dx_i}{dt},\ (6.4/b)\ \frac{\partial(H+\lambda)}{\partial x_i}=e^{\lambda}\left[1+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]\frac{dy_i}{dt}$$

(7.31)

$(6.4/a)$ ve $(6.4/b)$ denklem sistemi için kod ve çözüm aşağıdaki gibidir.

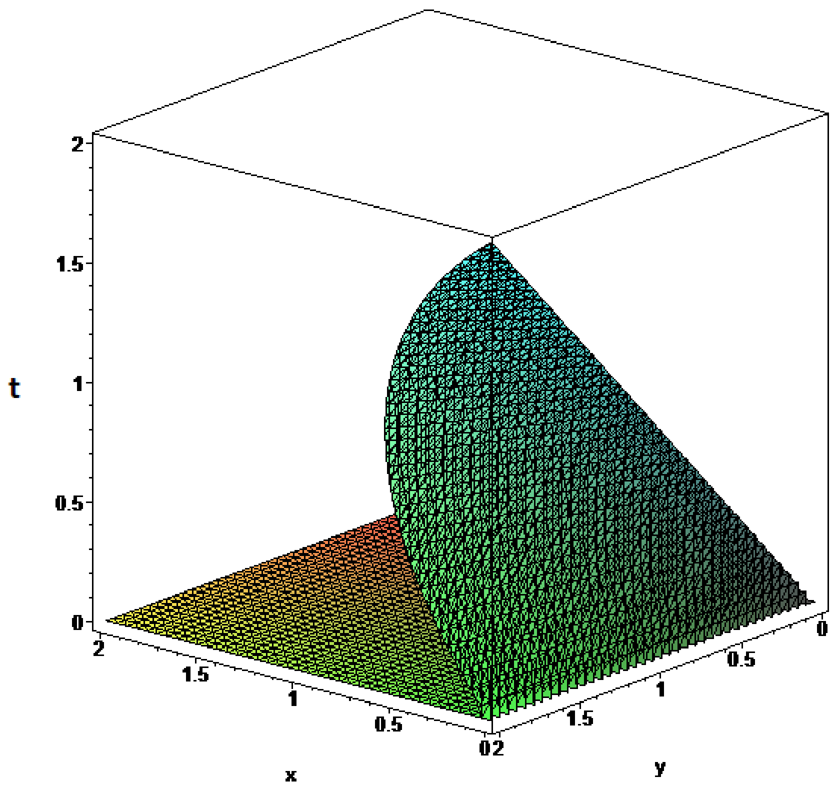
$$dif := \begin{bmatrix} diff\,(H(x,y,t)+\lambda(x,y,t),y) \\ =-\exp(\lambda(x,y,t))*(1+x*diff\,(\lambda(x,y,t),x)*diff\,(x(t),t), \\ diff\,(H(x,y,t)+\lambda(x,y,t),x) \\ =\exp(\lambda(x,y,t))*(1+x*diff\,(\lambda(x,y,t),x)*diff\,(y(t),t) \end{bmatrix}; \qquad \textbf{(7.32)}$$

(7.32) çözümün yapılabilmesi için $x(t) = t + \sin(t)$ ve $y(t) = 1 - \cos(t)$ ve $\lambda(x, y, t) = t * \sin(t)$ gibi özel alınarak,

$$cevap := \left\{ \begin{array}{l} H(x, y, t) = \exp(t * \sin(t)) * \left((1 - \cos(t)) * F_1(t)\right. \\ + x * \sin(t) - y + y * \cos(t) \end{array} \right\} \quad \textbf{(7.33)}$$

şeklinde elde edilir. **(7.33)** in grafiğini çizebilmek için $F_1(t) = t$ şeklinde özel seçim yapılacaktır. Sembolik hesaplama yazılımları ile bu çözümün grafiği aşağıdaki gibi bulunur.

```
> with(plots);
> implicitplot3d(((1-cos(t))*t+x*sin(t)-y+y*cos(t))/exp(-t*sin(t)), x=0...2, y=0...2,
                  t=0...2) ;
```



Şekil 7.6. Korunumlu Hamilton denklemi

BÖLÜM 8
ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

8.1. Araştırma Bulguları

Analitik mekanik araştırmacılara var olan mekanik sistemleri inceleme imkânı sunar. Mekanik sistemler için dinamik hareket denklemlerinin matematiksel modellemesi analitik mekanik kural ve özellikleri kullanılarak elde edilir.

Literatürde ilk defa bu çalışma ile Weyl teoremi kullanılarak uzayda hareket eden cisimlerin rotasına ait alternatifli en kısa yolları yani geodezikler ve doğrusal olan ve olmayan yörüngeleri için hareketi temsil eden zamana bağlı adi ve kısmi diferansiyel denklemler elde edilmiştir.

Ayrıca bu denklem ve denklem sistemlerinin kapalı çözümleri sembolik hesaplama yazılımları kullanılarak ilk kez bu çalışma ile bulunmuştur.

Bu kapalı çözümlerdeki bilinmeyen fonksiyonların özel seçimi ile elde edilen fonksiyonların grafikleri çizilmiştir. Araştırma bulguları aşağıda özetlenmiştir.

I. Yapılan ilk modellemede

$$J_{\pm}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_{2i}} \text{ ve } J_{\pm}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right)=\pm\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}$$

(para) holomorfik yapıları seçilmiştir. M manifold, $J_{\pm}$ (para) holomorfik yapısı ve g metriği ile beraber temsil edilen $(M,J_{\pm},g)$ hemen hemen para/pseudo$-$Kähler$-$Weyl manifoldudur.

Ayrıca $\Phi_L=-dd_{J_{\pm}}L=-d(d_{J_{\pm}}L)$ simplektik $2-$form ve özel bir vektör alanı olan semispray

$$\xi=X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}+X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}},\ X_{2i-1}=\dot{x}_{2i-1}=x_{2i},\ X_{2i}=\dot{x}_{2i}$$

ile (M,Φ_L,ξ) hemen hemen para/pseudo$-$Kähler–Weyl manifoldu için mekanik sistemdir. $\Phi_L(\xi)=dE_L$ dinamik denklem kullanılarak hemen hemen para/pseudo$-$Kähler$-$Weyl manifoldu $(M,J_{\pm},\nabla,g)$ üzerinde Weyl$-$Euler$-$Lagrange hareket denklemleri

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}=0,\quad \mp\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{2i-1}}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_{2i}}=0$$

şeklinde elde edilmiştir.

II. Ayrıca hemen hemen para/pseudo$-$Kähler$-$Weyl manifoldu $(M, J_{\pm}, g)$ nın dual uzayı $(M^{*}, J_{\pm}^{*}, g)$ üzerinde $(M^{*}, \Phi_{\pm}, X_H)$ mekanik sistemi

$$J_{\pm}^{*}(dx_{2i})=dx_{2i-1} \text{ ve } J_{\pm}^{*}(dx_{2i-1})=\pm dx_{2i}$$

(para) holomorfik yapıları, $1-$formu $\omega_{\pm}=\frac{1}{2}\left(\pm x_{2i-1}dx_{2i-1}-x_{2i}dx_{2i}\right)$, kapalı $2-$formu $\Phi_{\pm}=-d\Omega_{\pm}$, Liouville $1-$formu $\Omega_{\pm}=J_{\pm}^{*}(\omega_{\pm})$ ve Hamilton vektör alanı

$$X_H=X_{2i-1}\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}+X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_{2i}}$$

seçilerek $\Phi_{\pm}(X_H)=dH$ dinamik formalizm kullanılıp hemen hemen para/pseudo$-$Kähler$-$Weyl manifoldunun duali olan $(M^{*}, J_{\pm}^{*}, g)$ üzerinde $(M^{*}, \Phi_{\pm}, X_H)$ mekanik sisteminin Weyl$-$Hamilton hareket denklemleri

$$\mp\frac{\partial H}{\partial x_{2i}}=\frac{dx_{2i-1}}{dt},\quad \pm\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}}=\frac{dx_{2i}}{dt}$$

elde edilmiştir.

III. İkinci modelleme ile R_n^{2n} reel uzayında tanımlı W tanjant yapısı ve g metriği ile beraber temsil edilen (R_n^{2n}, W, g) üçlüsü bir Weyl manifoldu temsil eder.

Sabit W kesitsel eğrilikli tanjant (tam) yapısı

$$W\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=e^{\lambda}\frac{\partial}{\partial y_i} \text{ ve } W\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)=0$$

olarak alınmıştır. Ayrıca Φ_L simplektik $2-$form ve özel bir vektör alanı olan Semispray

$$\xi=X_i\frac{\partial}{\partial x_i}+Y_i\frac{\partial}{\partial y_i},\ X_i=\dot{x}_i=y_i,\ Y_i=\dot{y}_i$$

ile beraber (R_n^{2n}, Φ_L, ξ) Weyl mekanik sistem olarak seçilmiştir.

$\Phi_L(\xi) = dE_L$ dinamik denklem hesaplamada kullanılmış ve böylece W kesitsel eğrilikli konformal Weyl $-$ Euler $-$ Lagrange hareket denklemi olarak

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial y_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial x_i}=0$$

denklemi bulunmuştur.

IV. Ayrıca, $(R_n^{2n})^*$ reel dual uzay üzerinde tanjant yapı

$$W^*(dx_i) = e^{\lambda} dy_i\,, \quad W^*(dy_i) = 0$$

ve g metriği ile beraber Weyl manifoldu $\left((R_n^{2n})^*, W^*, g\right)$ üçlüsü ile ifade edilir. $1-$formu olarak $\omega = x_i dx_i + e^{2\lambda} y_i dy_i$ seçilmiştir.

Liouville $1-$formu ise $\Omega = W^*(\omega)$ dir. Bir simplektik kapalı $2-$form $\Phi = -d\Omega$, Hamilton vektör alanı

$$X_H = X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

ile $((R_n^{2n})^*, \Phi, X_H)$ bir mekanik sistemdir. Dinamik denklem olarak $i_{X_H}\Phi = \Phi(X_H) = dH$ kullanılmaktadır. $\left((R_n^{2n})^*, W^*, \nabla, g\right)$ uzay formu üzerinde $((R_n^{2n})^*, \Phi, X_H)$ mekanik sistemi ile sabit W^* kesitsel eğrilikli konformal Weyl $-$ Hamilton hareket denklemleri

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{-1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial H}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{dt}=\frac{1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

formunda elde edilmiştir.

V. Korunumlu dinamik sistemler için F fonksiyonu Weyl yapısı olarak $F(e^{\lambda} g) = F(g) - d\lambda$ özdeşliğiyle verilmiştir.

i_ξ ise $2-$formu $1-$forma dönüştüren indirgeme fonksiyonu olup $F=i_\xi$ ve g metriği Φ_L simplektik $2-$formu için $g=\Phi_L$ olarak seçilmiş ve $i_\xi \Phi_L = dE_L$ yeniden yorumlanmıştır. Böylece $i_\xi\left(e^\lambda \Phi_L\right)=dE_L$ dinamik denklemi elde edilmiştir. Bu denklemin sol yanı için $i_\xi\left(e^\lambda \Phi_L\right)=i_\xi\left(\Phi_L\right)-d\lambda$ olur. $i_\xi\left(\Phi_L\right)=\Phi_L(\xi)$ olduğu dikkate alınırsa $i_\xi\left(e^\lambda \Phi_L\right)=\Phi_L(\xi)-d\lambda$ formu bulunmuştur.

Dinamik denklemin sağ yanı değişmeyeceği için $\Phi_L(\xi)-d\lambda=dE_L$ den

$$\Phi_L(\xi)=d\left(E_L+\lambda\right)$$

Weyl$-$Euler$-$Lagrange fonksiyonunun dinamik formalizmi elde edilmiştir. Böylece sabit $W-$kesitsel eğrilikli tanjant yapısı $W\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=e^\lambda \frac{\partial}{\partial y_i}$ ve $W\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)=0$ ile verilen (R_n^{2n},W,∇,g) uzay formu üzerindeki (R_n^{2n},Φ_L,ξ,F) korunumlu mekanik sistemler için $W-$kesitsel eğrilikli korunumlu Weyl$-$Euler$-$Lagrange diferansiyel denklemi

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(e^\lambda \frac{\partial(L+\lambda)}{\partial y_i}\right)+\frac{\partial(L+\lambda)}{\partial x_i}=0$$

şeklinde elde edilmiştir.

VI. $(R_n^{2n})^*$ reel dual uzay üzerinde $W^*(dx_i)=e^\lambda dy_i$, $W^*(dy_i)=0$ tanjant yapısı korunumlu dinamik sistemler için yorumlanmıştır.

Weyl yapısı için $F(e^\lambda g)=F(g)-d\lambda$ özdeşliği kullanılarak **V.** e benzer olarak

$$i_{X_H}\Phi=d(H+\lambda)$$

formunda ifade edilir.

Weyl$-$Hamilton fonksiyonunun dinamik formalizmi ile $((R_n^{2n})^*,W^*,\nabla,g)$ uzay formu üzerindeki $((R_n^{2n})^*,\Phi,X_H,F)$ korunumlu mekanik sistemler için sabit W^*-kesitsel eğrilikli korunumlu Weyl$-$Hamilton diferansiyel denklemleri

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{-1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial(H+\lambda)}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{dt}=\frac{1}{e^{\lambda}\left[1+x_i\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right]}\frac{\partial(H+\lambda)}{\partial x_i}$$

şeklinde elde edilmiştir.

VII. Ayrıca elde edilen (korunumlu) mekanik sistemlere ait diferansiyel denklemler ve sistemlerin kapalı çözümleri Sembolik hesaplama yazılımları kullanılarak bulunmuştur.

Yapılan analitik hesaplama yöntemi sayesinde modelleme ile elde edilen cisimlerin hareketlerine ait diferansiyel denklemlerin sembolik hesaplama yazılımları kullanılarak kapalı çözümleri yapılmıştır.

Ayrıca bu kapalı çözümlerdeki fonksiyonlar özel seçilmiş ve grafikleri çizilmiştir.

8.2. Tartışma

Günümüzde mekanik sistemlerin dinamik hareket tarzını analiz etmek için Lagrangian ve Hamiltonian modelleme çok yaygın ve basit bir metot olarak araştırmacılar tarafından kullanılmaktadır. Araştırmacılar çeşitli manifoldlar ve onların baz yapılarını kullanarak farklı mekanik sistemleri modellemişlerdir.

Literatürde, uzayda hareket eden cisimlerin doğrusal yörüngelerini açıklayan denklemler araştırmacılar tarafından bulunmuştur. Söz konusu olan modellemelerde doğrusal yörüngeler incelenmiş fakat doğrusallığın dışı göz ardı edilmiştir. Doğrusal ve doğrusal olmayan yörüngeleri bulmak için Weyl yeni bir ölçüm tekniği/metriği geliştirerek sonradan ismi ile alınacak fiziksel alan teorisini ortaya koymuştur (Weyl, 1918). Bu teoride f çok değişkenli özel bir fonksiyonu temsil etmektedir.

Weyl'in fiziksel alan teorisi çekim potansiyeli, genel görecelilik ve elektromanyetik potansiyel gibi fiziksel alanlar üzerinedir. Bu sebeple Weyl uzayı (Weyl manifoldu) üzerindeki bulunan denklemler farklı fiziksel alanlardaki problemlerin çözümü için cismin hareketinin ilk aşamasını ve yörünge değişikliklerini ortaya koymaya yarayacaktır.

Yapılan çalışmada aşağıdaki sıra izlenmiştir.

Birinci bölümde konuya giriş yapılmış ve çalışmanın avantajlarına değinilmiştir.

İkinci bölümde mekanik sistemler ile Euler−Lagrange ve Hamilton dinamik formalizmi verilmiştir.

Üçüncü bölümde Weyl manifoldu ve yapısı tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümdeki yapılan ilk çalışma ile potansiyel enerjisini harekete geçiren cisimlerin uzay içindeki göreceliliği dikkate alarak hareketin aşamalarını izah etmeye yönelik $\text{Weyl}-\text{Eule}-\text{Lagrange}$ **(4.75)** ve $\text{Weyl}-\text{Hamilton}$ **(4.128)** hareket denklemleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümdeki ikinci hesaplama ile evrendeki fiziksel kanun ve prensipler göz önüne alınarak uzayda hareket eden cisimlerin tanımlandığı yörüngelerde herhangi bir değişmeyi gösteren hareketlerinin en genel denklemleri elde edilmiştir.

Bu hesaplamada λ çok değişkenli özel fonksiyonu Weyl'in teoremi e^{λ} ile mekanik sistemlere aktarılmıştır. Böylece kullanılan λ çok değişkenli özel fonksiyonunu içeren tanjant yapılı bir baz da Weyl manifoldlarının mekanik sistemleri tasvir edilmiştir. Yapılan çalışma ile Weyl manifoldları üzerinde konformal $\text{Weyl}-\text{Euler}-\text{Lagrange}$ **(5.34)** ve konformal $\text{Weyl}-\text{Hamilton}$ **(5.56)** hareket denklemlerinin genel formları ortaya konmuştur. Yani harekete ait diferansiyel denklemler bulunmuştur.

Altıncı bölümde korunumlu dinamik sistemler için Weyl'in teoremi yorumlanmış ve dinamik denklemler yeniden **(6.1)** ve **(6.3)** deki gibi elde edilmiştir. λ bulunan denklemler korunumlu dinamik sistemler için **(6.2)** ve **(6.4)** deki gibi bulunmuştur.

Yedinci bölümde yapılan analitik hesaplama yöntemi sayesinde modelleme ile elde edilen cisimlerin hareketlerine ait diferansiyel denklemlerin sembolik hesaplama yazılımları kullanılarak kapalı çözümleri bulunmuştur. Ayrıca bu kapalı çözümlerdeki fonksiyonlar özel seçilmiş ve grafikleri çizilmiştir.

Bulunan tüm bu denklemler Weyl manifoldları üzerinde farklı fiziksel alanlarda karşılaşılan sorunların çözümünde kullanılmaktadır. Özellikle alan teorisi, kuantum fiziği, optimal kontrol ve akışkanlar mekaniği alanları bunlardan bazılarıdır.

Fiziğin kuantum ve klasik mekanik kısımlarının ilgilendiği elektrik, manyetik ve yerçekimi alanı problemlerinin dinamik olaylarına ait bir çözüm yöntemi olarak bu tür bir modelleme önerilmekte ve kullanılmaktadır (Weyl, 1922 Miron, 2012).

BÖLÜM 9
SONUÇ VE ÖNERİLER

Mekanik sitemlere ilişkin yapılabilecek ilerideki çalışmalar için para/pseudo Kähler – Weyl manifoldları üzerindeki Weyl – Euler – Lagrange ve Weyl – Hamilton denklemleri; fiziğin kolları olan klasik mekanik ve kuantumun ilgilendiği elektrik, manyetik ve yerçekimi alanları ile ilgili problemlerini çözmek için önerilmektedir.

Weyl'in teorisi kullanılarak bir yenilik ve kolaylık olarak cisimlerin doğrusal olmayan hareket rotaları fonksiyonel olarak bulunabilir.

Cisimlerin uzaydaki benzer hareketlerinin denklemleri için Weyl analoglarını yaparak genelleştirmeler yapılabilir.

Korunumsuz dinamik sistemler için Weyl'in bağıntısı hareket denklemlerine aktarılabilir.

Bulunan denklemler farklı değerler ve kabuller yapılarak analitik veya matematik için geliştirilmiş özel programlar ile çözülebilir ve yorumlanabilir.

İlgili alanlara ait örnekler verilebilir ve geodeziklerin grafikleri çizilebilir. λ fonksiyonunun özel seçilecek durumlarına göre denklemlerin nümerik çözümleri bulunabilir.

Elde edilen Euler – Lagrange ve Hamilton denklemlerinin aynı eğri yüzeyini göstermesi için uyumlu kapalı fonksiyonlar bulunabilir.

Ayrıca kapalı fonksiyonlar öyle seçilebilir ki çok bilinen diferansiyel denklem tipleri elde edilebilir.

Denklemlerin grafiklerde aynı görüntü elde edilebilir. Bunun için yapılan hesaplamalarda özel seçilen fonksiyonların aynı uzaya ait görüntüyü elde edilebilmeyi sağlayacak şekilde ayarlanabilir.

KAYNAKLAR

Adak M., Dereli T. ve Ryder L.H., 2001. Neutrino Oscillations Induced by Spacetime Torsion. *Classical and Quantum Gravity,* 18(8): 1503-1512.

Adak M. ve Sert Ö., 2006. A Solution to Symmetric Teleparallel Gravity. *Turk. J. Phys*., 29: 1-7.

Adak M., Kalay M. ve Sert Ö., 2006. Lagrange Formulation of The Symmetric Teleparallel Gravit. *Int. J. Mod. Phys. D.,* 15: 619–634.

Apostolov V. ve Armstrong J., 2000. Symplectic 4-Manıfolds with Hermitian Weyl Tensor. *Transactions of The American Mathematical Society,* Vol. 352, Num. 10: 4501-4513.

Arsan G. ve Yıldırım G., 2005. Generalized Circles and Their Conformal Mapping In A Subspace of A Weyl Space. *Acta Mathematica Scientia*, 25B(2): 331–339.

Aycan C., 2003. Genelleştirilmiş Jet Demetleri Üzerinde Euler – Lagrange ve Hamilton Denklemlerinin Liftleri. Osmangazi Üniv., Fen. Bil. Enst. Doktora Tezi. Eskişehir.

Bahuguna S.K. ve Petwal K.C., 2011. Evolution of Weyl's Gauge Invariant Geometry Under Ricci Flow. *Proyecciones Journal of Mathematics*, Vol.30, No.3: 329-350.

Başar F., 2012. *Lineer Cebir*. Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul. 460 p.

Belgun F.A. 2003. On The Weyl Tensor of A Self-Dual Complex 4-Manifold**.** *Transactins of the American Mathematical Society,* Vol. 356, Num. 3: 853-880.

Belgun F. ve Moroianu A., 2010. Weyl-Parallel Forms Conformal Products and Einstein-Weyl Manifolds. http://arxiv.org/abs/0901.3647v2.

Bejan C-L. ve Chiriac N-C., 2012. Weyl Structures on Almost Paracontact Manifolds. *IJGMMP*, Vol. 10, No.1: 1-9.

Blaga M.A. ve Crasmareanu M., 2014. Geometry of a Class of Generalized Almost Tangent Structures. http://www.math.uaic.ro/~mcrasm/depozit/l89.pdf.

Blazic N., Gilkey P., Nikčević S. ve Simon U., 2003. The Spectral Geometry of The Weyl Conformal Tensor. http://arxiv.org/abs/math/0310226v1.

Blair D.E. ve Draghici T., 2009. Remarks on Weyl Curvature in Almost Kähler Geometry, Bull. Math. Soc. SCI. *Math. Roumanie Tome.* 52(100), No.3: 241–249.

Bokan N., Gilkey P.B. ve Simon U., 1997. Geometry of Differential Operators on Weyl Manifolds. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 453, No.1967: 2527–2536.

Brown J.R., 2006. Complex and Almost-Complex Structures On Six Dimensional Manifolds. A Dissertation Presented to The Faculty of The Graduate School University of Missouri-Columbia, 79 p.

Brozos-Vazquez M., Gilkey P. ve Nikčević S., 2011. Geometric Realizations of Affine Kähler Curvature Models. *Results. Math*., 59: 507–521.

Cap A. ve Slovak J., 2000. Weyl Structures for Parabolic Geometries. http://arxiv.org/abs/math/0001166.

Catino G. ve Mantegazza C., 2011. Evolution of The Weyl Tensor Under The Ricci Flow. *Annales Del Institut Fourier*, Volume:61, Issue:4: 1407-1435.

Catino G. ve Mantegazza C., 2013. Evolution of the Weyl Tensor Under the Ricci Flow. arXiv:0910.4761v7.

Chen S. ve Jing J., 2013. Dynamical Evolution of the Electromagnetic Perturbation with Weyl Corrections. http://arxiv.org/abs/1307.7459.

Crampin M., 1981. On the Differential Geometry of Euler – Lagrange Equations and The Inverse Problem of Lagrangian Dynamics. *J. Phys. A-Math. and Gen.*, Vol.14, Issue:10: 2567–2575.

Civelek Ş., 1993. Genişletilmiş Vektör Demetlerine Yüksek Mertebeden Lift'ler, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi F.B.E., Ankara.

Civelek Ş., 1996. The Lifts of Lagrange and Hamilton Equations to The Extended Vector Bundles. *Mathematical& Computational Applications*, Vol.1, No.1: 21-28.

Çağlar F.Ö., 2011. Kompleks Uzay Formlarında Mekanik Sistemler, Yüksek Lisans Tezi. Pamukkale Üniversitesi, Denizli.

Datchev K. ve Dyatlov S., 2013. Fractal Weyl Laws For Asymptotically Hyperbolic Manifolds. *Geom. Funct. Anal.*, Vol.23: 1145–1206.

David L., 2005. Sasaki–Weyl Connections on CR Manifolds. ttp://arxiv.org/abs/math/0505448v1.

De Andres L.C., De Leon M. ve Rodrigues P.R., 1991. Connections on Tangent Bundles of Higher Order Associated to Regular Lagrangians. *Geometriae Dedicata*, 39: 17–28.

De Leon M. ve Rodrigues P.R., 1986. Almost Tangent Geometry and Higher Order Mechanical Systems. *Differantial Gometry and Its Applications*, Proceeding of the Conference, Brno, Czechoslovakia.

De Leon M. ve Rodrigues P.R., 1987. Second-Order Differantial Equations and Non-Conservative Lagrangian Systems. *J. Phys. A. Math. Gen*., 20: 5393–5396.

De Leon M. ve Rodrigues P.R., 1989. Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics. *Elsevier Science Publishers*, B.V., U.S.A. 516 p.

De Leon M., Mello M.H. ve Rodrigues P.R., 1991a. Reduction of Degenerate Non-Autonomous Lagrangians. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.37.7942.

De Leon M., Solano J. ve Marrero J., 1991b. A Geometrical Approach to Classical Field Theories: A Constraint Algorithm for Singular Theories. *New Developments in Differential Geometry Mathematics and Its Applications*, Vol.350: 291-312.

De Leon M. ve Rodrigues P.R., 1992. The Inverse Problem of Lagrangian Dynamics for Higher-Order Differential Equations A Geometrical Approach. *Inverse Problems*, 8, 4: 525-540.

Deruelle N., Sasaki M., Sendoudac Y. ve Youssefd A., 2012. Lorentz-Violating vs. Ghost Gravitons: The Example of Weyl Gravity. *JHEP09*, 1-21.

Dragomir S. ve Ornea L., 1997. *Locally Conformal Kähler Geometry*, 330 p.

Dvornikov M., 2012. Canonical Quantization of A Massive Weyl Field. http://arxiv.org/abs/1106.3303v3.

Eckes C. 2013. Weyl’s Raum, Zeit, Materie and Its Early Reception. http://robot.icra.it:8080/store/l518.pdf.

Fatibene M. ve Francaviglia M., 2012a. Masses in Weyl Geometries. *Bulletin of the Transilvania University of Braşov,* Vol: 5(54), No.1: 23-34.

Fatibene M. ve Francaviglia M., 2012b. Fluids in Weyl Geometries. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, Vol.9, No.2: 1-8.

Folland G.B., 1970. Weyl Manifolds. *J. Differential Geometry*, 4, 145–153.

Ghosh A., 2009. Einstein–Weyl Structures on Contact Metric Manifolds. *Ann. Glob. Anal.Geom.*, 35: 431–441.

Glanc B. ve Jakubowicz A., 2000. Application of the Weyl Curvature Tensor to Description of the Generalized Reissner–Nordstrøm Space-Time.

Gilkey P., Nikčević S. ve Simon U., 2010. Geometric Realizations, Curvature Decompositions and Weyl Manifolds. http://arxiv.org/abs/1002.5027.

Gilkey P. ve Nikčević S., 2010. Kähler and Para-Kähler Curvature Weyl Manifolds. arXiv:1011.4844v1.

Gilkey P. ve Nikčević S., 2011. Kähler–Weyl Manifolds of Dimension 4. http://arxiv.org/abs/1109.4532.

Gilkey P. ve Nikčević S., 2012a. (Para)-Kähler Weyl Structures. http://arxiv.org/abs/1204.0724.

Gilkey P. ve Nikčević S., 2012b. 4-Dimensional (Para)-Kähler Weyl Structures. http://arxiv.org/pdf/1210.6769.pdf.

Gilkey P. ve Nikčević S., 2013. 4-Dimensional (Para) −Kähler–Weyl Structures. *Publications De L'institut Mathématique*, *Nouvelle Série, Tome*, 94(108): 91–98. *Applicationes Mathematicae*, 27 (2): 219–223.

Gromov M., 1985. Pseudo Holomorphic Curves In Symplectic Manifolds. *Invent. Math*., 82, 307–347.

Hacısalihoğlu H., 2003a. *Diferansiyel Geometri I*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 3. Baskı. 269 p.

Hacısalihoğlu H., 2003b. *Diferansiyel Geometir II*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 4. Baskı. 209 p.

Hinterleitner I. ve Mikes J. 2009. Geodesic Mappings Onto Weyl Manifolds. *J. of Appl. Math. Aplimat*, V.2, N.1: 125-133.

Hirica I.E. ve Nicolescu L., 2004. On Weyl Structures, *Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo*, Serie II, Tomo LIII, 390–400.

Jackiw R., 2007. Dimensional Reduction of Conformal Tensors and Einstein–Weyl Spaces. *SIGMA* 3: 91-98.

Jelonek W., 2013. Compact Conformally Kähler Einstein-Weyl Manifolds. *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 43: 19-29.

Kadosh L., 1996. Topics in Weyl Geometry. Dissertation Thesis, University of California.

Klein J., 1962. *Espaces Variationnels Et Mecanique*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 12: 124p.

Klein J., 1968a. Operateurs Differentiels Sur Les Varietes Presque-Tangentes. *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 257A: 2892–2894.

Klein J., 1968b. Les Systemes Dynamiques Abstraits. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 18, 2: 191–202.

Kitson D., Harte R. ve Hernandez C., 2011. Weyl's Theorem and Tensor Products:A Counter Example. *J. Math. Anal. Appl*., doi:10.1016/j.jmaa.2010.12.051.

Kim J. ve Do K., 2006. 4-Dimensional Anti-Kähler Manifolds and Weyl Curvature. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 56(131): 267–271.

Koca K., 2001. *Kısmi Türevli Denklemler*. Gündüz Eğitim Yayıncılık, Ankara. 107-122.

Kumar S. ve Petwal K.C., 2010. Analysis on Recurrence Properties of Weyl's Curvature Tensor and Its Newtonian Limit. *Differential Geometry-Dynamical Systems*, Vol.12: 109–117.

Le Brun C., 1998. Weyl Curvature, Einstein Metrics and Seiberg-Witten Theory. http://arxiv.org/abs/math/9803093v2.

Madsen A.B., Pedersen H., Poon Y.S. ve Swann A., 1997. Compact Einstein-Weyl Manifolds with Large Symmetry Group., *Duke Math. J.*, Vol.88, Num.3: 407-624.

Martin D., 1991. *Manifold Theory*. Ellis Horwood. 424 p. Cambridge.

McDuff D. ve Salamon D., 1995. J-Holomorphic Curves and Quantum Cohomology. *AMS Lecture Notes*, Illinois.

Miron R., 2012. *Lagrangian and Hamiltonian Geometries. Applications to Analytical Mechanics*, http://arxiv.org/pdf/1203.4101v1.pdf, 256 p.

Newlander A. ve Nirenberg L., 1957. Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds. *Ann. of Math*, 65: 391-404.

Rızaoğlu E. ve Sünel N., 2008. *Klasik Mekanik.* Okutman Yayıncılık, Ankara. 510 p.

Romero C., Fonseca-Neto J.B. ve Pucheu M.L., 2011. General Rolativity and Weyl Geometry. *International Journal of Modern Physics*, Conference Series, Vol.3: 27–35.

O'Neill B., 1983. Semi-Riemann Geometry with *Applications to Relativity*. Academic Pres. New York, 469 p.

Ornea L., 1998. Compact Hyperhermitian–Weyl and Quaternion Hermitian–Weyl Manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry,* 16: 383–398.

Ornea L., 2001. Weyl Structures on Quaternionic Manifolds, A State of The Art. http://arxiv.org/abs/math/0105041v1.

Ornea L. ve Verbitsky M. 2008. Einstein-Weyl Structures on Complex Manifolds and Conformal Version of Monge-Ampere Equation. http://arxiv.org/abs/math/0606309v3.

Özdeğer A., 2006. On Sectional Curvatures of A Weyl Manifold**.** *Proc. Japan Acad.*, 82, Ser. A: 123–125.

Özdeğer A., 2010. Conformal and Generalized Concircular Mappings of Einstein-Weyl Manifolds. *Acta Mathematica Scientia*, 30B(5): 1739–1745.

Özdeğer A., 2013. Generalized Einstein Tensor for a Weyl Manifold and Its Applications. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, Vol.29, No.2: 373–382.

Özer M.N., 1994. Related Integrable Hamiltonian Systems, Department of Applied Mathemetical Studies. Doctor of Philosophy.

Özkara Canfes E., 2009. Isotropic Weyl Manifold With a Semi-Symmetric Connection. *Acta Mathematica Scientia*, 29B(1): 176–180.

Pedersen H., Sun Poon Y. ve Swann A., 1993. The Einstein-Weyl Equations in Complex and Quaternionic Geometry. *Differential Geometry and its Applications* 3: 309–321.

Panza M., 2003. The Origins of Analiytic Mechanics in the 18th Century. *A History of Analysi, H. N. Jankhe (Ed.)*, 137–153.

Reason B., 2005. Weyl's Character Formula for Representations of Semisimple Lie Algebras. http://www.math.toronto.edu/murnaghan/courses/mat445/WCF.pdf.

Sagerschnig M.K., 2008. Weyl Structures for Generic Rank Two Distributions in Dimension Five. Dissertation, Doktorin der Naturwissenschaften, Vien.

Sato T., 2003. Almost Hermitian Structures Induced From A Kähler Structure which Has Constant Holomorphic Sectional Curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society* Vol.131, Num.9: 2903-2909.

Serway R.A. ve Beichner R.J., 2005. *Fen ve Mühendislik için Fizik-I (Mekanik).* Palme Yayıncılık.

Scholz E., 2008. Cosmological Spacetimes Balanced by a Weyl Geometric Scale Covariant Scalar Field. *Found Phys.*

Sharif M. ve Fatima T., 2005. Energy-Momentum Distribution in Weyl Metrics. http://arxiv.org/abs/gr-qc/0507069v1.

Shiriaev A., Pogromsky A., Ludvigsen H. ve Egeland O., 2000. On Global Properties of Passivity-Based Control of An Inverted Pendulum. *International Journal Robust and Nonlinear Control*, 10: 283–300.

Tekkoyun M., 2002. Genişletilmiş Kähler Manifoldlara Euler – Lagrange ve Hamilton Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Liftleri. Osmangazi Üniv. Fen Bil. Ens., Doktora Tezi. Eskişehir.

Tekkoyun M., 2005. On Para – Euler Lagrange and Para – Hamiltonian Eequation. Elsevier, *Physics Letters A*, Vol.340: 7–11.

Tekkoyun M., 2006a. Para Hamiltonian Equations with Poisson Brackets. *Çankaya Ünv. Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi, Journal of Arts and Sciences*, Sayı:6: 197-204.

Tekkoyun M., 2006b. A Note On Constrained Complex Hamiltonian Mechanics. *Differential Geometry-Dynamical Systems (DGDS)*, Vol.8, No.1: 262–267.

Tekkoyun M. ve Görgülü A., 2006. Higher Order Complex Lagrangian and Hamiltonian Mechanics Systems. *Physics Letters A*, Vol.357: 261–269.

Tekkoyun M., 2009a. Lifts of Time Dependent Complex Hamiltonian Mechanical Systems. http://arxiv.org/abs/0903.0222.

Tekkoyun M., 2009b. Mechanics Systems on Para – Kählerian Manifolds of Constant J – Sectional Curvature. http://arxiv.org/pdf/0902.3569.pdf.

Tekkoyun M., 2009c. Complex Dynamics Effect on Distributions. *BSG Proceedings 16. The Int. Conf. of Diff. Geo. and Dynamical Systems and the V-th Collog of Mathematics in Engineering and Numerical Physics*, 156–162.

Tekkoyun M. ve Sarı M., 2010. Bi – Para – Mechanical Systems on The Bi-Lagrangian Manifold. Elsevier, *Physica B*, 405: 2390–2393.

Tekkoyun M. ve Çelik O., 2013. Mechanical Systems on An Almost Kähler Model of Finsler Manifold, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* Vol.10, No.10, 1-9.

Tiwari S.C., 2001. Geometry of Quantum Theory: Weyl-Kählar Space. ttp://arxiv.org/abs/quant-ph/0109048v1.

Tod P., 2010. Penrose's Weyl Curvature Hypothesis and Conformally-Cyclic Cosmology. *Journal of Physics: Conference Series*, 229, 012013.

Ünal F. ve Uysal A., 2005. Weyl Manifolds with Semi-Symmetric Connection. *Mathematical and Computational Applications*, Vol.10, No.3: 351–358.

Weyl H., 1918. *Gravitation und Elektrizitat*. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Weyl H., 1922. *Space-Time-Matter*. Translated From the 4th German Edition by H. Brose (Methuen, London), Reprinted In 1952 by Dover, New York. 330 p.

Wheeler J.T., 1997. New Conformal Gauging and the Electromagnetic Theory of Weyl. http://arxiv.org/abs/hep-th/9706214v1.

Wikipedia, http://tr.wikipedia.org/wiki/Holomorf_fonksiyon.

Wojtkowski M.P., 2000. W-Flows on Weyl Manifolds and Gaussian Thermostats. *J. Math. Pures Appl.* 79, 10: 953–974.

Wojtkowski M.P., 2002. Weyl Manifolds and Gaussian Thermostats. *ICM*, Vol.III: 1–3.

Yano K. ve Kon M. 1984. *Structures on Manifolds*. Wold Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. P. O. Singapure, 507 p.

Yoshioka A., 1998. A Remark on The Contact Structure on Weyl Manifold and Fedosov Connection. *Reports on Mathematical Physics*, Vol.43, Issues1–2: 357–366.

Yüce S., 2003. *Diferansiyel Geometri*. Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul. 296 p.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Zeki KASAP

Doğum Yeri :TRABZON

Doğum Tarihi : 15.11.1968

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi :

1. Anadolu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü (1991).
2. Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2000).

Yüksek Lisans Öğrenimi : İnönü Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ekonometri ABD, Tek Parametreli Olasılık Dağılımlarının Düzenlilik (Regülarite) Şartlarının İncelenmesi (1997).

Pedagojik Formasyon: İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi (1997).

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce.

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar -SCI - Diğer

1. Z. Kasap and M. Tekkoyun, Mechanical Systems on Almost Para/Pseudo – Kähler–Weyl Manifolds, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics (IJGMMP), Vol.10, No.5, **SCI**, Print ISSN: 0219-8878, Online ISSN: 1793-6977, (2013).

2. Z. Kasap, Weyl-Mechanical Systems on Tangent Manifolds of Constant W-Sectional Curvature, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics (IJGMMP), Issue v10, N10, **SCI**, Print ISSN: 0219-8878, Online ISSN: 1793-6977, (2013).

3. Z. Kasap, Hamilton Equations on Three-Dimensional Space, Balkan Journal of Mathematics, ISSN: 2147-6187, BALKANJM, 141-149, 02 (2014).

4. Z. Kasap, Euler – Lagrange Equations of Moving Objects on Flat Manifold, Balkan Journal of Mathematics, ISSN: 2147-6187, BALKANJM,151-161, 02 (2014).

5. Z. Kasap, Euler – Lagrange Equations on Three-Dimensional Space, Accepted, C.B.U. Journal of Science, ISSN: 1305-1385, (2014).

6. Z. Kasap, Euler-Lagrangian Equations on Walker 4-Manifold with Walker Metrics, Accepted, Journal of Mathematics and System Science, ISSN: 2159-5291, (2014).

b) Bildiriler -Uluslararası - Ulusal

1. International Congress in Honour of Professor Hari M.Srivastava at The Auditorium at the Campus of Uludag University Bursa-TURKEY, August 23-26, 2012, http://srivastava2012.uludag.edu.tr/.

Sunulan bildiri: Weyl-Mechanical Systems on Generalized (para) Kähler Space Form.

2. International Conference on Anatolian Communications in Nonlinear Analysis, Abant Izzet Baysal University, Bolu, TURKEY, July 03-06, 2013, http://ancna.net/

Sunulan bildiri: Conformal and Weyl Euler-Lagrangian Equations on 4-Walker Manifold.

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi, 2001-

İLETİŞİM

E-posta Adresi : zekikasap@hotmail.com, zkasap@pau.edu.tr.

Tel: 0 555 30 444 80