T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

İKİLİ BAĞLANTILARIN TAM YARI-GRUPLARININ SAĞ BİRİMLERİ VE İDEMPOTENT ELEMANLARI

Didem YEŞİL SUNGUR

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **31/05/2013**

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Neşet AYDIN

ÇANAKKALE

DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

DİDEM YEŞİL SUNGUR tarafından **PROF. DR. NEŞET AYDIN** yönetiminde hazırlanan **"İKİLİ BAĞLANTILARIN TAM YARI-GRUPLARININ SAĞ BİRİMLERİ VE İDEMPOTENT ELEMANLARI"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neşet AYDIN
Danışman

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK
Jüri Üyesi

Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN
Jüri Üyesi

Doç. Dr. Ali ERDOĞAN
Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN
Jüri Üyesi

Sıra No:

Tez Savunma Tarihi: 31/05/2013

Doç. Dr. Zeki KARACA
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Didem YEŞİL SUNGUR

TEŞEKKÜR

Bu doktora tezinin hazırlanmasında, beni her aşamada yönlendiren, destek ve emeğini esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Neşet AYDIN'a sonsuz saygı ve içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez İzleme Komitesinde bulunan hocalarım Doç. Dr. Ali ERDOĞAN ve Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN'e öneri ve yorumları ile sağladıkları katkılar için teşekkür ederim.

Çalışmalarımda her aşamada deneyim, bilgi ve desteğini esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca mesai arkadaşım Araş. Gör. Barış ALBAYRAK'a tez süresi boyunca sağladığı katkı ve desteklerden dolayı teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca benden maddi ve manevi desteğini esirgemeyen eşim Dr. Ali SUNGUR'a ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Didem YEŞİL SUNGUR

SİMGELER VE KISALTMALAR

D	Birleşimlerin tam X -yarılatisi
B_X	X kümesi üzerinde tanımlı ikili bağıntıların yarıgrubu
$N(D,D')$	D' kümesinin D içindeki alt sınırlarının kümesi
$\Lambda(D,D')$	D' kümesinin D içindeki en büyük alt sınırı
$\Sigma(X,m)$	m elemanlı birleşimlerin tam X -yarılatislerinin sınıfı
$\Sigma_n(X,m)$	$\Sigma(X,m)$ sınıfında n .sırada olan D ye izomorf olan birleşimlerin tam X -yarılatislerinin sınıfı
$B_X(D)$	D ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrubu
$\Sigma(D)$	D nin XI -yarılatislerinin kümesi
$E_X^{(r)}(D')$	$B_X(D')$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi
I_D	$B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının kümesi
R	$B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanlarının kümesi
$\Phi(Q)$	Q , XI -alt yarılatisinin tam otomorfizmlerinin kümesi
$\Omega(Q)$	$\Omega(Q)=\{Q' \mid Q',\ D$ nin XI-alt yarılatisi ve Q ile Q' tam izomorf$\}$
$R(Q,D')$	$R(Q,D')=\bigcup_{\varphi\in\Phi(Q,D')} R_\varphi(Q,D')$
$R(D')$	$R(D')=\bigcup_{Q'\in\Omega(Q)} R(Q',D')$
$I^*(Q)$	$I^*(Q)=\bigcup_{D'\in Q\vartheta_{XI}} E_X^{(r)}(D')$
$R^*(Q)$	$R^*(Q)=\bigcup_{D'\in Q\vartheta_{XI}} R(D')$
$C(D)$	D yarılatisinin karakteristik kümeler ailesi
Y_i^α	$Y_{T_i}^\alpha$

ÖZET

İKİLİ BAĞLANTILARIN TAM YARI-GRUPLARININ SAĞ BİRİMLERİ VE İDEMPOTENT ELEMANLARI

Didem YEŞİL SUNGUR
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Neşet AYDIN
31/05/2013, 292

Bu tezde, X boş olmayan bir küme olmak üzere elemanları

$$\begin{array}{l} Z_7 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D}, \\ Z_7 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D}, \\ Z_8 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D}, \\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D}, \\ Z_8 \setminus Z_7 \neq \varnothing,\ Z_7 \setminus Z_8 \neq \varnothing, Z_6 \setminus Z_5 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_6 \neq \varnothing, \\ Z_6 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_6 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_5 \neq \varnothing, \\ Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\ Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing \end{array}$$

koşullarını sağlayan $D = \left\{ Z_8,\ Z_7,\ Z_6,\ Z_5,\ Z_4,\ Z_3,\ Z_2,\ Z_1,\ \breve{D} \right\}$ birleşimlerin tam X-yarılatisinin özellikleri belirlenmiştir. D nin özelliklerini belirlemek için D nin karakteristik kümeler ailesinden, karakteristik dönüşümünden ve temel kaynak elemanlarından yararlanılmıştır. Akabinde, D nin bu özellikleri yardımıyla D ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X(D)$ nin sağ birim, idempotent ve regüler elemanlarının yapısı tarif edilmiştir. Ayrıca, $B_X(D)$ nin regüler elemanları ile sağ birim ve idempotent elemanları arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Öte yandan X sonlu bir küme iken $B_X(D)$ nin idempotent ve regüler elemanlarının sayısını veren formül elde edilmiştir.

Çalışma kapsamında, ayrıca D ye tam izomorf olan birleşimlerin tam X-yarılatislerinin sınıfı $\Sigma_2(X,9)$ olmak üzere bu sınıfın elemanları karakterize edilmiştir. Bununla birlikte, bu sınıfın yarılatisleri ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının

sağ birim, idempotent ve regüler elemanlarının yapısı, $B_X(D)$ nin sağ birim, idempotent ve regüler elemanları yardımıyla tarif edilmiştir. Sonuç olarak, X sonlu bir küme iken $\Sigma_2(X,9)$ sınıfının yarılatisleri ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının idempotent ve regüler elemanlarının sayısını veren formül bulunmuştur.
Anahtar sözcükler: İkili bağıntı, Yarıgrup, Yarılatis, Sağ birim eleman, İdempotent eleman, Regüler eleman.

ABSTRACT

RIGHT UNITS AND IDEMPOTENT ELEMENTS OF COMPLETE SEMIGROUPS OF BINARY RELATIONS

Didem YEŞİL SUNGUR

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Natural and Applied Science

Doctoral Dissertation in Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Neşet AYDIN

31/05/2013, 292

In this thesis, the properties of the set $D=\left\{ Z_8,\ Z_7,\ Z_6,\ Z_5,\ Z_4,\ Z_3,\ Z_2,\ Z_1,\ \breve{D} \right\}$ which is the complete *X*-semilattice of unions satisfying the following conditions,

$$\begin{array}{l}
Z_7 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D}, \\
Z_7 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D}, \\
Z_8 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D}, \\
Z_8 \subset Z_6 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D}, \\
Z_8 \setminus Z_7 \neq \varnothing,\ Z_7 \setminus Z_8 \neq \varnothing, Z_6 \setminus Z_5 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_6 \neq \varnothing, \\
Z_6 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_6 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_5 \neq \varnothing, \\
Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\ Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing,
\end{array}$$

where X is nonempty, are determined.

In order to determine these properties, we utilize the characteristic family of sets, the characteristic mapping and base sources of D. Then, by the help of these properties of D, the structure of the right unit, idempotent and regular elements of $B_X\left(D\right)$, that is the complete semilattice of binary relations of D, are described. In addition, the relationships, between the regular elements of $B_X\left(D\right)$ and its right unit and idempotent elements are presented. Beside, the formula giving the number of idempotent and regular elements of $B_X\left(D\right)$ where X being a finite set.

In the scope of this study, we also characterize the elements of the class $\Sigma_2(X,9)$. This class is the complete *X*-semilattice of unions every elements of which are isomorphic to D.

Further, the construction of the right unit, idempotent and regular elements of the complete semigroups of binary relations, which are determined by the semilattices of the class $\Sigma_2(X,9)$, are given in detailed form by the help of $B_X(D)$ and its elements (right unit, idempotent and regular elements of $B_X(D)$). Finally, the formula giving the number of idempotent and regular elements of the complete semigroups of binary relations which are defined by the semilattices of the class $\Sigma_2(X,9)$, where X is finite.

Key Words: Binary relation, Semigroup, Semilattice, Right unit element, Idempotent element, Regular element.

İÇERİK **Sayfa**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bilindiği üzere ikili bağıntılar kavramı matematiğin temel kavramlarından biridir. İkili bağıntıların teorisiyle ilgili sistematik bilgiyi ilk olarak Schröder 1890'larda "Cebirsel Mantık" kitabında vermiştir (Schröder, 1966). 20. yüz yılın başlarında ise Whitehead ve Russel (1925) Schröder'in çalışmalarından yola çıkarak yarıgrup teori çalışmışlardır. Fakat bu teori üzerindeki çalışmaların sonuçları matematiğin mantık ve diğer alanlarına uygulanamamıştır.

Fransız matematikçi Riguet, Schröder'in teorisini modernize etmiş ve uygulamaya daha uygun hala getirmiştir (Riguet, 1948, 1950). Bu teoriyi kullanarak sıralı küme teorisini sistematik olarak oluşturmuştur.

Her yarıgrup ikili bağıntıların yarıgrubunun bir alt yarıgrubuna izomorf olduğundan yarıgrup teoride ikili bağıntıların yarıgrubu önemli rol oynamaktadır. İlk kez Diasamidze (2000) ikili bağıntıların yarıgruplarını ve bu yarıgrupların önemli bir sınıfı olan birleşimlerin tam X-yarılatislerini kullanarak ikili bağıntıların yarıgruplarını sistematik olarak incelemiştir. Ayrıca ikili bağıntıların yarıgruplarının yapısını daha iyi anlayabilmek için ikili bağıntıların tam yarıgruplarının sağ birim, idempotent ve regüler elemanlarının yapısını karakterize etmiştir (Diasamidze ve Makharadze 1999, 2010, 2013; Diasamidze 2001 a,b, 2003; Diasamidze ve ark., 2007).

Bu tezde Diasamidze'nin geliştirmiş olduğu yöntem kullanılarak, elemanları

$$\begin{aligned}
&Z_7 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\\
&Z_7 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\\
&Z_8 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\\
&Z_8 \subset Z_6 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\\
&Z_8 \setminus Z_7 \neq \varnothing,\ Z_7 \setminus Z_8 \neq \varnothing, Z_6 \setminus Z_5 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_6 \neq \varnothing,\\
&Z_6 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_6 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_5 \neq \varnothing,\\
&Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\ Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing
\end{aligned}$$

koşullarını sağlayan $D = \left\{ Z_8,\ Z_7,\ Z_6,\ Z_5,\ Z_4,\ Z_3,\ Z_2,\ Z_1,\ \breve{D} \right\}$ birleşimlerin tam X-yarılatisine tam izomorf olan birleşimlerin tam X-yarılatislerinin sınıfı karakterize edilecektir. Bu sınıfın tam X-yarılatisleri tarafından belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgruplarının sağ birim, idempotent ve regüler elemanlarının yapısı $B_X\left(D\right)$ nin sağ birim, idempotent ve regüler elemanları yardımıyla tarif edilecektir. Ayrıca X sonlu bir küme iken bu sınıfın tam X -yarılatisleri ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgruplarının idempotent ve regüler elemanların sayısını veren formül hesaplanacaktır.

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, kavram ve teoremler verilecektir (Hungerford, 1997; Liapin, 1963; Clifford ve Preston, 1977; Howie, 2003).

Tanım 1.1 X kümesinin X_i $(\mathrm{i} \in \mathrm{I})$ alt kümelerinden oluşan sistem aşağıdaki üç şartı sağlıyorsa $\{X_i\}_{i\in I}$ sistemine X in *parçalanışı* denir.

a) $\forall\ i \in I$ için $X_i \neq \varnothing$,

b) $i \neq j$ için $X_i \cap X_j = \varnothing$,

c) $X = \bigcup_{i\in I} X_i$.

Tanım 1.2 S boş olmayan bir küme olmak üzere $S \times S$ den S üzerine tanımlı olan fonksiyona S üzerinde bir *ikili işlem* denir.

Tanım 1.3 S boş olmayan bir küme ve "$*$" ise S üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer her $x,\ y,\ z \in S$ için, $(x*y)*z = x*(y*z)$ oluyorsa $(S,*)$ ikilisine bir *yarıgrup* denir.

Tanım 1.4 S bir yarıgrup olsun.

i. $\forall x \in S$ için $x*e = x$ olacak şekilde $e \in S$ varsa e elemanına S nin *sağ birim elemanı* denir.

ii. Bir $y \in S$ için $y*y = y$ oluyorsa y elemanına S nin *idempotent elemanı* denir.

iii. Bir $y \in S$ için $y*z*y = y$ olacak şekilde bir $z \in S$ varsa y elemanına S nin *regüler elemanı* denir.

Tanım 1.5 X boş olmayan bir küme olsun. $X \times X$ kümesinin her bir alt kümesine X üzerinde bir *ikili bağıntı* denir.

$x,\ \mathrm{y} \in \mathrm{X}$ ve α, X üzerinde bir ikili bağıntı olmak üzere $(x,y) \in \alpha$ olması $x\alpha y$ ile gösterilecektir. Ayrıca $Y \subseteq X$ ve $y \in Y$ olmak üzere $y\alpha$ ve $Y\alpha$ ile

$$y\alpha = \{x \in X \mid y\alpha x\}$$

ve

$$Y\alpha = \bigcup_{y \in Y} y\alpha$$

kümeleri gösterilecektir.

Tanım 1.6 X kümesi üzerindeki bütün ikili bağıntıların kümesi B_X olsun. B_X üzerinde, "$\circ$" ikili işlemi $\alpha,\ \beta \in B_X$ için $x, y \in X$ olmak üzere $x\alpha z\beta y$ olacak biçimde $z \in X$ varsa $x \in (\alpha \circ \beta) y$ olarak tanımlansın. "$\circ$" işlemi birleşme özelliğini sağladığından $(B_X, \circ)$ ikilisi bir yarıgruptur.

B_X yarıgrubuna X kümesi üzerindeki *ikili bağıntıların yarıgrubu* denir.

Tanım 1.7 X boş olmayan bir küme ve X den X e tanımlı fonksiyonların kümesi T_X olsun. T_X kümesi bileşke işlemi ile bir yarıgrupdur. Bu yarıgruba *tam transformasyon yarıgrubu* denir.

T_X tam transformasyon yarıgrubundaki fonksiyonların X üzerinde bir bağıntı olduğu açıktır. Dolayısıyla T_X , B_X in bir alt yarıgrubu olur.

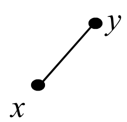
Aşağıdaki teorem ile Cayley'in gruplar için vermiş olduğu teoremin yarıgrup teoride de var olduğu görülmektedir.

Teorem 1.8 Her yarıgrup, bir tam transformasyon yarıgrubunun alt yarıgrubuna izomorftur.

Böylece her yarıgrup ikili bağıntıların yarıgrubunun bir alt yarıgrubuna izomorf olur.

Tanım 1.9 P boş olmayan bir küme olsun. P üzerinde yansımalı, ters simetrik ve geçişmeli bir $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir *kısmi sıralama bağıntısı* denir. Bu durumda $(P, \leq)$ kümesine *kısmi sıralı küme* denir.

$(P, \leq)$ kısmi sıralı bir küme, $x,\ y \in P$ ve $x < y$ olsun. $x < a < y$ olacak şekilde $a \in P$ yoksa $y,\ x$ i *örter* denir. Bu durum aşağıdaki diyagram ile gösterilir.



Bu diyagrama *Hasse diyagramı* denir.

Tanım 1.10 $(P,\leq)$ kısmi sıralı bir küme ve R, P nin alt kümesi olsun.

i. $\forall y \in R$ için $x \leq y$ oluyorsa $x \in P$ elemanına R nin *alt sınırı* denir.

ii. $\forall y \in R$ için $y \leq x$ oluyorsa $x \in P$ elemanına R nin *üst sınırı* denir.

iii. Bir $z \in R$ için $y < z$ olacak şekilde $y \in R$ yoksa $z \in R$ elemanına R nin *minimal elemanı* denir.

Tanım 1.11 $(P,\leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun.

i. P den alınan her eleman çiftinin en küçük üst sınırı varsa P ye *üst yarılatis*,

ii. P nin boş olmayan her alt kümesinin en küçük üst sınırı varsa P ye *tam üst yarılatis*

denir.

1.1. Birleşimlerin Tam X -yarılatisleri

Tezimizin temasını *birleşimlerin tam X -yarılatisleri* ve *bu yarılatisler ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrupları* oluşturmaktadır. Dolayısıyla bu bölümde birleşimlerin tam X -yarılatislerinin ve bu yarılatisler ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının özelliklerinden bahsedilecektir. Bu bölümde incelenecek olan tanımlar ve teoremler Diasamidze (2003), Givradze (2003), Diasamidze ve ark. (2007) ve Diasamidze ve Makharadze (2010, 2013) çalışmalarında detaylı olarak yer almaktadır.

Tanım 1.1.1 X boş olmayan bir küme ve X in alt kümelerinin boş olmayan bir ailesi D olsun. Eğer D, kümelerdeki birleşme işlemine kapalı ise yani her $\varnothing \neq D' \subseteq D$ için $\cup D' \in D$ ise D ye *birleşimlerin tam X -yarılatisi* denir.

D nin bütün elemanlarının birleşimini

$$\breve{D} = \bigcup_{D' \in D} D'$$

sembolü ile gösterilir ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanıdır.

Birleşimlerin tam X -yarılatisi D kümelerdeki birleşme işlemiyle değişmeli, idempotent yarıgruptur.

D, birleşimlerin tam X -yarılatisi, $T \subseteq \breve{D}$, $t \in \breve{D}$, $\varnothing \neq D' \subseteq D$ ve $\alpha \in B_X$ olsun. Aşağıdaki notasyonları tanımlayalım:

a) $V(D,\alpha) = \{Y\alpha \mid Y \in D\}$,

b) $D^* = D \setminus \{\varnothing\}$, $X^* = 2^X \setminus \{\varnothing\}$,

c) $D'_T = \{Z' \in D' \mid T \subseteq Z'\}$,

d) $\ddot{D}'_T = \{Z' \in D' \mid Z' \subseteq T\}$,

e) $\ddot{D}'_t = \{Z' \in D' \mid t \in Z'\}$,

f) $\hat{D}(T) = D \setminus \{Z' \in D \mid T \subseteq Z'\}$.

Not 1.1.2 D, birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $\alpha \in B_X$ olsun. O zaman $V(D,\alpha)$ birleşimlerin tam X -yarılatisi olur.

İspat: $\varnothing \neq D$ olduğundan en az bir $Y \in D$ vardır. Buradan $Y\alpha \in V(D,\alpha)$ olur. Şimdi bir $\varnothing \neq D_1 \subseteq V(D,\alpha)$ için $D' = \{Y \in D \mid Y\alpha \in D_1\}$ kümesini tanımlayalım. D birleşimlerin tam X -yarılatisi olduğundan $\cup D' = Y' \in D$ dir. O zaman

$$\cup D_1 = \bigcup_{Y \in D'} Y\alpha = \left(\bigcup_{Y \in D'} Y\right)\alpha = (\cup D')\alpha = Y'\alpha \in V(D,\alpha)$$

olduğundan $V(D,\alpha)$ kümesi birleşme işlemine kapalıdır. O halde $V(D,\alpha)$ birleşimlerin tam X -yarılatisi olur.

Tanım 1.1.3 D birleşimlerin tam X -yarılatisi, $\alpha \in B_X$ ve $Y_T^{\alpha} = \{x \in X \mid x\alpha = T\}$ olsun. Bu durumda

$$V[\alpha] = \begin{cases} V(X^*,\alpha), & \varnothing \notin D \\ V(X^*,\alpha), & \varnothing \in V(X^*,\alpha) \\ V(X^*,\alpha) \cup \{\varnothing\}, & \varnothing \notin V(X^*,\alpha),\ \varnothing \in D \end{cases}$$

olmak üzere α ikili bağıntısı

$$\alpha = \bigcup_{T \in V[\alpha]} \left(Y_T^{\alpha} \times T\right)$$

biçiminde gösterilebilir. Bu gösterime α ikili bağıntısının *quasinormal gösterimi* denir.

Not 1.1.4 Bir α bağıntısının quasinormal gösteriminde tüm $Y_T^\alpha \neq \varnothing$ olmak zorunda değildir. Ancak α bağıntısının quasinormal gösterimi varsa aşağıdakiler sağlanır.

a) $\forall T,\ T' \in D, T \neq T'$ için $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha = \varnothing$

b) $X = \bigcup\limits_{T \in V[\alpha]} Y_T^\alpha$.

Tanım 1.1.5 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $\tilde{D}$, D' kümeleri D nin boş olmayan iki alt kümesi olsun. Eğer D' kümesinin her elemanı $\tilde{D}$ kümesinin elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\tilde{D}$ kümesine D' kümesinin *üreteç kümesi* denir.

Ayrıca $\tilde{D}$ kümesinin hiç bir öz alt kümesi D' kümesini üretmiyorsa $\tilde{D}$ kümesine D' kümesinin *indirgenemez üreteç kümesi* denir.

Tanım 1.1.6 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve D', D nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $T \in D'$ olmak üzere $l\left(D',T\right) = \cup\left(D' \backslash D'_T\right) = \varnothing$ ise T ye D' kümesinin *limit elemanı* denir.

Tanım 1.1.7 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve D', D nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $T \in D'$ olmak üzere $l\left(D',T\right) = \cup\left(D' \backslash D'_T\right) \neq \varnothing$ ise T ye D' kümesinin *nonlimit elemanı* denir.

Tanım 1.1.8 D birleşimlerin tam X-yarılatisi, D', D nin boş olmayan bir alt kümesi ve $N(D,D') = \left\{Z \in D \mid Z \subseteq Z', \forall Z' \in D'\right\}$ olsun. $N(D,D')$ kümesine D' kümesinin D içindeki *alt sınırlarının kümesi* denir. Eğer $N(D,D') \neq \varnothing$ ise $\cup N(D,D') \in D$ elemanı D' kümesinin *en büyük alt sınırıdır* ve $\Lambda\left(D,D_t\right)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.9 D birleşimlerin tam X-yarılatisi olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa D ye *birleşimlerin tam* XI *-yarılatisi* denir.

a) $\forall t \in \breve{D}$ için $\Lambda\left(D,D_t\right) \in D$,

b) $\forall \varnothing \neq Z \in D$ için $Z = \bigcup\limits_{t \in Z} \Lambda\left(D,D_t\right)$.

Teorem 1.1.10 $D_j=\{T_1,T_2,\ldots T_j\}$ ve $\varnothing\neq Y\subseteq X$ olacak biçimde X, Y kümelerini alalım. $f:X\to D_j$ en az bir $y\in Y$ için $f(y)=T_j$ olacak biçimdeki tüm fonksiyonların sayısı

$$s=j^{|X\setminus Y|}\left(j^{|Y|}-(j-1)^{|Y|}\right)$$

olur.

Tanım 1.1.11 X boş olmayan bir küme ve m ve n birer doğal sayı olsun. O zaman

a) m elemanlı birleşimlerin tam X -yarılatislerinin sınıfı, $\sum(X,m)$ sembolü ile gösterilir.

b) D, m elemanlı birleşimlerin tam X -yarılatisi olsun. D, m elemanlı birleşimlerin tam X -yarılatisleri arasında n.sırada ise D ye izomorf olan bütün birleşimlerin tam X -yarılatislerinin sınıfı $\sum_n(X,m)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.12 X boş olmayan bir küme ve D birleşimlerin tam X -yarılatisi olsun. $f:X\to D$ keyfi bir dönüşüm olsun. Bu şekilde tanımlanan her bir f dönüşümü için

$$\alpha_f=\bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right)$$

biçiminde bir ikili bağıntı yazabiliriz. Bu şekildeki bütün α_f ikili bağıntılarının kümesi $B_X(D)$ olmak üzere $B_X(D)$, B_X in alt yarıgrubudur. $B_X(D)$ yarıgrubuna *birleşimlerin tam X -yarılatisi D ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrubu* denir.

Teorem 1.1.13 $\varepsilon\in B_X(D)$ olsun. ε ikili bağıntısının $B_X(D)$ yarıgrubun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul ε un idempotent ve $D=V(D,\varepsilon)$ olmasıdır.

Teorem 1.1.14 α ikili bağıntısı $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanı olsun. O zaman $V(D,\alpha)$ birleşimlerin tam XI -yarılatisi olur.

Teorem 1.1.15 D, birleşimlerin tam X -yarılatisi olsun. $B_X(D)$ yarıgrubun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul D nin birleşimlerin XI -yarılatisi olmasıdır.

Teorem 1.1.16 D, birleşimlerin tam X -yarılatisi, $\sum(D)$, D nin birleşimlerin tam XI -alt yarılatislerinin kümesi olsun. O zaman $D'\in\sum(D)$ için $E_X^{(r)}(D')$, $B_X(D')$

yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi ve I, $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının kümesi olmak üzere $E_X^{(r)}(D')$ ve I kümeleri için aşağıdakiler doğrudur.

a) Eğer $\varnothing \in D$ ise $\Sigma_{\varnothing}(D) = \{D' \in \Sigma(D) \mid \varnothing \in D'\}$ olmak üzere;

1) $D' \neq D''$, $D', D'' \in \Sigma_{\varnothing}(D)$ için $E_X^{(r)}(D') \cap E_X^{(r)}(D'') = \varnothing$,

2) $I = \bigcup\limits_{D' \in \Sigma_{\varnothing}(D)} E_X^{(r)}(D')$,

3) X sonlu küme ise $|I| = \sum\limits_{D' \in \Sigma_{\varnothing}(D)} \left| E_X^{(r)}(D') \right|$.

b) Eğer $\varnothing \notin D$ ise

1) $D' \neq D''$, $D', D'' \in \Sigma(D)$ için $E_X^{(r)}(D') \cap E_X^{(r)}(D'') = \varnothing$,

2) $I = \bigcup\limits_{D' \in \Sigma(D)} E_X^{(r)}(D')$,

3) X sonlu küme ise $|I| = \sum\limits_{D' \in \Sigma(D)} \left| E_X^{(r)}(D') \right|$.

Teorem 1.1.17 $\alpha \in B_X(D)$ olsun. α nın $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul

i. $V(X^*, \alpha) \subseteq V(D, \alpha)$,

ii. $V(D, \alpha)$ yarılatisi birleşimlerin tam XI-yarılatisi

olmasıdır.

Tanım 1.1.18 D' ve D'' birleşimlerin tam X-yarılatisi, $\varphi : D' \to D''$ bire bir dönüşüm olsun. Eğer her $\varnothing \neq D_1 \subseteq D$ için

$$\varphi(\cup D_1) = \bigcup_{T' \in D_1} \varphi(T')$$

koşulu sağlanıyorsa φ dönüşümüne *tam izomorfizma* denir.

Tanım 1.1.19 $\alpha \in B_X(D)$ ve $\varphi : Q \to D'$ tam izomorfizma olsun. Eğer φ dönüşümü

a) $Q = V(D, \alpha)$,

b) $\varnothing \in V(D, \alpha)$ için $\varphi(\varnothing) = \varnothing$ ve her $T \in V(D, \alpha)$ için $\varphi(T)\alpha = T$

koşullarını sağlıyorsa φ dönüşümüne t*am* $\alpha-$*izomorfizma* denir.

Teorem 1.1.20 D birleşimlerin tam X -yarılatisi, $\alpha \in B_X(D)$ ve bir $\sigma \in B_X(D)$ için $\alpha \circ \sigma \circ \alpha = \alpha$ olsun. Eğer $D(\alpha)$, $V(D,\alpha) \setminus \{\varnothing\}$ yarılatisinin üreteç kümesi ve α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{T \in D(\alpha)} \left(Y_T^\alpha \times T\right)$ biçiminde ise o zaman $V(D,\alpha)$ birleşimlerin tam XI -yarılatisi olur. Ayrıca aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\varphi : V(D,\alpha) \to D' = \{T\sigma \mid T \in V(D,\alpha)\}$ tam izomorfizması vardır.

a) $\forall$ $\mathrm{T} \in V(D,\alpha)$ için $\varphi(T)\alpha = T$ ve $\varphi(T) = T\sigma$,

b) $\forall T \in D(\alpha)$ için $\bigcup_{T' \in \ddot{D}(\alpha)_T} Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T)$,

c) $\forall$ $\mathrm{T} \in \ddot{D}(\alpha)_T$ nonlimit elemanı için $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$,

d) Her $\mathrm{T} \in \ddot{D}(\alpha)_T$ limit eleman için $B(T) = \left\{Z \in \ddot{D}(\alpha)_T \mid Y_Z^\alpha \cap T \neq \varnothing\right\}$ olmak üzere $\cup B(T) = T$ sağlanır.

Diğer taraftan $\alpha \in B_X(D)$, $V(D,\alpha)$ birleşimlerin tam XI -yarılatisi ve D', D nin boş olmayan bir birleşimlerin tam X -alt yarılatisi olsun. Ayrıca bir $\varphi : V(D,\alpha) \to D'$ tam izomorfizması (b), (c) ve (d) koşullarını sağlasın. Bu durumda α, $B_X(D)$ nin regüler elemanı olur.

Tanım 1.1.21 D birleşimlerin tam X -yarılatisi, Q ve D' sırasıyla D nin birleşimlerin tam XI - alt yarılatisi ve X -alt yarılatisi olsunlar. Ayrıca

a) $\alpha \in B_X(D)$ regüler,

b) $Q = V(D,\alpha)$,

c) $\varphi : Q \to D'$ tam $\alpha -$izomorfizması Teorem 1.1.20 nin (b)-(c)-(d) koşullarını sağlasın.

Yukarıdaki koşulları sağlayan $\alpha \in B_X(D)$ elemanlarının kümesi $R_\varphi(Q,D')$ ile gösterilir.

O zaman

$$\Phi(Q,D') = \left\{\varphi : Q \to D' \mid \text{bir } \alpha \in B_X(D) \text{ için } V(D,\alpha) = Q \text{ ve } \varphi\text{, tam } \alpha\text{-izomorfizma}\right\}$$

ve

$$\Omega(Q) = \left\{Q' \mid Q',\ D \text{ nin } XI\text{-alt yarılatisi ve } Q \text{ ile } Q' \text{ tam izomorf}\right\}$$

olmak üzere

$$R(Q,D')=\bigcup_{\varphi\in\Phi(Q,D')} R_\varphi(Q,D') \text{ ve } R(D')=\bigcup_{Q'\in\Omega(Q)} R(Q',D')$$

olarak tanımlanır.

Lemma 1.1.22 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve Q birleşimlerin tam XI-alt yarılatisinin tam otomorfizmlerinin kümesi $\Phi(Q)$ olsun. O zaman $\Phi(Q)=\Phi(Q,Q)$ olur.

Lemma 1.1.23 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve Q, D' sırasıyla D nin birleşimlerin tam XI- alt yarılatisi ve birleşimlerin tam X-alt yarılatisi olsunlar. O zaman $\Phi(Q,Q)$ ve $\Phi(Q,D')$ denktir.

Not 1.1.24 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve Q, D' sırasıyla D nin birleşimlerin tam XI- alt yarılatisi ve birleşimlerin tam X-alt yarılatisi olsunlar. Lemma 1.1.22 ve Lemma 1.1.23 den

$$\left|\Phi(Q,D')\right|=\left|\Phi(Q)\right|$$

olur.

D birleşimlerin tam X-yarılatisi olmak üzere $\Sigma'_{XI}(D)$ sembolü ile D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatislerinin kümesi gösterilir.

Not 1.1.25 $D', D''\in\Sigma'_{XI}(D)$ ve $\vartheta_{XI}\subseteq\left(\Sigma'_{XI}(D)\times\Sigma'_{XI}(D)\right)$ olsun. Eğer D' ve D'' arasında bir φ tam izomorfizması varsa $D'\vartheta_{XI}D''$ olarak tanımlansın. Bu durumda ϑ_{XI} ikili bağıntısının $\Sigma'_{XI}(D)$ kümesi üzerinde denklik bağıntısı olur.

$\Sigma'_{XI}(D)$ kümesinin her bir ϑ_{XI}-denklik sınıfından birer temsilci seçelim ve bütün temsilcilerin kümesini $\Sigma_{XI}(D)$ ile gösterelim. Bu durumda $Q\in\Sigma_{XI}(D)$ için

$$Q\vartheta_{XI}=\left\{D'\in\Sigma'_{XI}(D)\,|\,Q \text{ ile } D' \text{ tam izomorf}\right\}$$

olur.

Q yarılatisine tam izomorf olan D nin XI-alt yarılatisleri ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının sağ birim elemanlarının kümesi $I^*(Q)$ olsun. O zaman

$$I^*(Q)=\bigcup_{D'\in Q\vartheta_{XI}} E_X^{(r)}(D')$$

olur.

Öte yandan Q yarılatisine tam izomorf olan D nin XI -alt yarılatisleri ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının regüler elemanlarının kümesi $R^*(Q)$ olmak üzere

$$R^*(Q)=\bigcup_{D'\in Q\vartheta_{XI}} R(D')$$

olur.

Lemma 1.1.26 X sonlu bir küme, D birleşimlerin tam X -yarılatisi ve Q ve D' sırasıyla D nin birleşimlerin tam XI - ve X -alt yarılatisleri olsunlar. O zaman $\varphi,\ \psi\in\Phi(Q,D')$ ve $\varphi\neq\psi$ olmak üzere $R_\varphi(Q,D')$ ile $R_\psi(Q,D')$ denk olur.

Lemma 1.1.27 D birleşimlerin tam X -yarılatisi, Q ve D' sırasıyla D nin birleşimlerin tam XI -alt yarılatisi ve birleşimlerin tam X -alt yarılatisi olsunlar. O zaman her $\varphi,\ \psi\in\Phi(Q,D')$ ve $\varphi\neq\psi$ için

$$R_\varphi(Q,D')\cap R_\psi(Q,D')=\varnothing$$

olur.

Lemma 1.1.28 X sonlu bir küme, $\varphi\in\Phi(Q,D')$ sabit bir eleman ve Q nun otomorfizmlerinin sayısı q olsun. O zaman

$$\left|R(Q,D')\right|=q\cdot\left|R_\varphi(Q,D')\right|$$

olur.

Teorem 1.1.29 X sonlu bir küme olsun. O zaman $\varphi\in\Phi(Q,D')$ sabit bir eleman ve $\left|\Omega(Q)\right|=m_0$ ise

$$\left|R(D')\right|=m_0\cdot q\cdot\left|R_\varphi(Q,D')\right|$$

olur.

Teorem 1.1.30 R , $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanlarının kümesi olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

a) $D'\neq D''$ olacak biçimdeki her $D',D''\in\Sigma_{XI}(D)$ için $R(D')\cap R(D'')=\varnothing$,

b) $R=\bigcup_{D'\in\Sigma_{XI}(D)} R(D')$,

c) X sonlu ise $|R| = \bigcup_{D' \in \Sigma_{XI}(D)} |R(D')|$.

Teorem 1.1.31 $\alpha \in B_X(D)$ regüler eleman olsun. α idempotent elemandır ancak ve ancak her $T \in V(D,\alpha)$ için $\varphi(T) = T\alpha$ koşulunu sağlayan φ dönüşümü, $V(D,\alpha)$ nın birim dönüşümüdür.

Teorem 1.1.32 $E_X^{(r)}(Q)$, $B_X(Q)$ nin sağ birim elemanlarının kümesi olsun. O zaman

$$E_X^{(r)}(Q) = R_{id_Q}(Q,Q)$$

olur.

Teorem 1.1.33 $Q \in \Sigma'_{XI}(D)$ için aşağıdakiler sağlanır.

a) $I(D') \cap I(D'') = \varnothing$, $\forall D' \neq D'' \in Q\vartheta_{XI}$,

b) $I^*(Q) = \bigcup_{D' \in Q\vartheta_{XI}} R_{id_{D'}}(D',D')$,

c) X sonlu ise $|I^*(Q)| = \bigcup_{D' \in Q\vartheta_{XI}} |R_{id_{D'}}(D',D')|$.

Teorem 1.1.34 I, $B_X(D)$ nin idempotent elemanlarının kümesi olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

a) $\forall D' \neq D'' \in \Sigma_{XI}(D)$ için $I(D') \cap I(D'') = \varnothing$,

b) $I = \bigcup_{D' \in \Sigma_{XI}(D)} I^*(D')$,

c) X sonlu ise $|I| = \bigcup_{D' \in \Sigma_{XI}(D)} |I^*(D')|$.

Tanım 1.1.35 D birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $C(D)$, $\breve{D}$ kümesinin ikişer ikişer ayrık alt kümelerinden oluşan bir kümeler ailesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $C(D)$ ailesine D yarılatisinin *karakteristik kümeler ailesi* denir.

1. $\cap D \in C(D)$,

2. $\cup C(D) = \breve{D}$,

3. $\forall \varnothing \neq Z \in D$ için $Z = \cup C_Z(D)$ olacak şekilde $C_Z(D) \subseteq C(D)$ vardır.

Tanım 1.1.36 D, birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $C(D)$, D nin karakteristik kümeler ailesi olsun. O zaman her $Z \in D$ ve $\hat{D}(Z) = D \setminus \{Z' \in D \mid Z \subseteq Z'\}$ kümesi için $Z = (\cap D) \cup \bigcup_{Z' \in \hat{D}(Z)} \chi(Z')$ koşulunu sağlayan $\chi : D \to C(D)$ fonksiyonuna D nin *karakteristik dönüşümü* denir.

Teorem 1.1.37 D, birleşimlerin sonlu tam X-yarılatisi olsun. O zaman $C(D)$, D nin karakteristik kümeler ailesi ve $\chi : D \to C(D)$ karakteristik fonksiyonu teklikle belirlidir.

Teorem 1.1.38 D, birleşimlerin sonlu tam X-yarılatisi olsun. O zaman D nin karakteristik kümeler ailesi $C(D)$ ile D nin eleman sayısı aynıdır.

D_ζ, "$\leq$" kısmi sıralama bağıntısı ile tam üst yarılatis ve bir $D \in \Sigma(X, m)$ birleşimlerin tam X-yarılatisine tam izomorf olsun. Ayrıca $\chi_\zeta : D_\zeta \to C(D_\zeta)$ birebir ve örten dönüşüm olsun. O halde $D' = \left\{ \overline{Z} = \chi_\zeta(\breve{D}) \cup \bigcup_{T \in \hat{D}_\zeta(Z)} \chi_\zeta(T) \mid Z \in D_\zeta \right\}$ olmak üzere D' kümesi üzerinde ϑ bağıntısı, $\overline{Z} \vartheta \overline{Z}' \Leftrightarrow \hat{D}_\zeta(Z) \subseteq \hat{D}_\zeta(Z')$ olsun. Bu durumda D' kümesi üzerinde ϑ bağıntısı, kısmi sıralama bağıntısıdır.

Lemma 1.1.39 D_ζ, "$\leq$" kısmi sıralama bağıntısı ile tam üst yarılatis, $\chi_\zeta : D_\zeta \to C(D_\zeta)$ birebir, örten dönüşüm ve $D' = \left\{ \overline{Z} = \chi_\zeta(\breve{D}) \cup \bigcup_{T \in \hat{D}_\zeta(Z)} \chi_\zeta(T) \mid Z \in D_\zeta \right\}$ olsun. O zaman D' ve D_ζ tam izomorf olur. O halde her $Z \in D_\zeta$ elemanı tam izomorfizma altında görüntüleri olan

$$Z = \chi_\zeta(\breve{D}) \cup \bigcup_{T \in \hat{D}'(Z)} \chi_\zeta(T)$$

ile belirlenebilir. Her bir $Z \in D_\zeta$ elemanı için yazılabilen bu eşitliklere D_ζ *nin formal eşitlikleri* denir.

Tanım 1.1.40 $Z' \in D_\zeta \setminus \{\breve{D}_\zeta\}$ olsun. $Z' \in \hat{D}_\zeta(T_0)$ ve $\left|\hat{D}_\zeta(T_0) \setminus \hat{D}_\zeta(Z')\right| = 1$ olacak şekilde en az bir $T_0 \in D_\zeta$ varsa $\chi_\zeta(Z') \in C(D_\zeta)$ elemanına D_ζ yarılatisinin *temel kaynak elemanı* denir.

Not 1.1.41 D_ζ yarılatisinin temel kaynak elemanları boş kümeden farklıdır.

İspat: $\chi_\zeta(Z') \in C(D_\zeta)$ elemanı D_ζ yarılatisinin temel kaynak elemanı olsun. O halde $\hat{D}_\zeta(T_0) \setminus \hat{D}_\zeta(Z') = \{Z'\}$ olacak şekilde en az bir $T_0 \in D_\zeta$ vardır. Dolayısıyla $\hat{D}_\zeta(T_0) = \hat{D}_\zeta(Z') \cup \{Z'\}$ olur. $\chi_\zeta(Z') = \varnothing$ olduğunu kabul edelim. χ_ζ karakteristik dönüşüm olduğundan $Z' = T_0$ olur. Dolayısıyla $Z' \in D_\zeta(Z')$ bulunur. Bu ise $\chi_\zeta(Z')$ elemanının D_ζ yarılatisinin temel kaynak elemanı olması ile çelişir. O halde $\chi_\zeta(Z') \neq \varnothing$ olur. Yani D_ζ yarılatisinin temel kaynak elemanları boş kümeden farklıdır.

Tanım 1.1.42 $Z' \in D_\zeta$ olsun. $\chi_\zeta(Z') = \chi_\zeta(\breve{D}_\zeta)$ veya her $Z \in D_\zeta$ ve $Z' \in \hat{D}_\zeta(Z)$ için $\left|\hat{D}_\zeta(Z) \setminus \hat{D}_\zeta(Z')\right| \geq 2$ ise $\chi_\zeta(Z') \in C(D_\zeta)$ elemanına D_ζ yarılatisinin *yardımcı kaynak elemanı* denir.

Not 1.1.43 $\chi_\zeta(\breve{D}) \in C(D_\zeta)$ elemanı D_ζ yarılatisinin her zaman yardımcı kaynak elemanıdır.

Teorem 1.1.44 D_ζ sonlu yarılatis ve $Z' \in D_\zeta$ elemanını örten sadece bir eleman var olsun. O zaman $\chi_\zeta(Z') \in C(D_\zeta)$ elemanı D_ζ yarılatisinin temel kaynak elemanı olur.

Teorem 1.1.45 D_ζ sonlu yarılatis ve $Z' \in D_\zeta$ elemanını örten elemanların sayısı ikiden büyük veya eşit olsun. O zaman $\chi_\zeta(Z') \in C(D_\zeta)$ elemanı D_ζ yarılatisinin yardımcı kaynak elemanı olur.

Teorem 1.1.46 X sonlu bir küme, $D_{\zeta} \in \sum_n (X,m)$ yarılatisinin temel kaynaklarının sayısı δ ve D_{ζ} nın otomorfizmlerinin sayısı q olsun. Bu durumda $|X| = n \geq \delta$ ve $\left|\sum_n (X,m)\right| = s$ ise

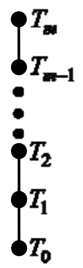
$$s = \frac{1}{q} \cdot \sum_{p=\delta}^{m} \left(\sum_{i=1}^{p+1} \left(\frac{(-1)^{p+i+1} \cdot C_{m-\delta}^{p-\delta} \cdot C_p^{\delta} \cdot (\delta!) \cdot ((p-\delta)!) \cdot i^n}{(i-1)! \cdot (p-i+1)!} \right) \right)$$

olur.

Teorem 1.1.47 D birleşimlerin tam X -yarılatisi osun. Ayrıca $m \geq 1$ ve

$$T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_m \tag{1.1.1}$$

olmak üzere $Q = \{T_0, T_1, ..., T_m\}$, D nin birleşimlerin tam X -alt yarılatisi olsun (Şekil 1). O zaman Q birleşimlerin tam XI -alt yarılatisi olur.

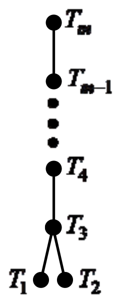


Şekil 1. Elemanları (1.1.1) koşullarını sağlayan $Q = \{T_0, T_1, ..., T_m\}$ nun diyagramı.

Teorem 1.1.48 D birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $m \geq 3$ olmak üzere $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$, D nin birleşimlerin tam X -alt yarılatisi olsun. Ayrıca Q yarılatisinin elemanları

$$T_1,\ T_2 \notin \{\varnothing\},\ T_1 \cup T_2 = T_3 \text{ ve } T_3 \subset T_4 \subset \cdots \subset T_m \tag{1.1.2}$$

koşullarını sağlasın (Şekil 2). O zaman Q yarılatisinin birleşimlerin tam XI -alt yarılatisi olması için gerek ve yeter koşul $T_1 \cap T_2 = \varnothing$ olmasıdır.

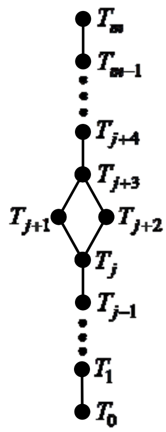


Şekil 2. Elemanları (1.1.2) koşullarını sağlayan $Q=\{T_1,T_2,T_3,...,T_m\}$ nun diyagramı.

Teorem 1.1.49 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $m\geq 3$ olmak üzere $Q=\{T_0,T_1,...,T_j,...,T_m\}$, D nin birleşimlerin tam X-alt yarılatisi olsun. Q yarılatisinin elemanları $0\leq j\leq m-3$ için

$$\begin{aligned}
&T_0\subset T_1\subset\cdots\subset T_j\subset T_{j+1}\subset T_{j+3}\subset\cdots\subset T_m,\\
&T_0\subset T_1\subset\cdots\subset T_j\subset T_{j+2}\subset T_{j+3}\subset\cdots\subset T_m,\\
&T_{j+1}\setminus T_{j+2}\neq\varnothing,\ T_{j+2}\setminus T_{j+1}\neq\varnothing \text{ ve } T_{j+1}\cup T_{j+2}=T_{j+3}
\end{aligned}\tag{1.1.3}$$

koşullarını sağlasın (Şekil 3). O zaman Q birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olur.

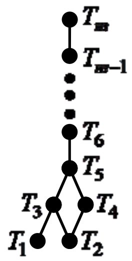


Şekil 3. Elemanları (1.1.3) koşullarını sağlayan $Q=\{T_0,T_1,...,T_j,...,T_m\}$ nun diyagramı.

Teorem 1.1.50 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $m\geq 5$ olmak üzere D nin birleşimlerin tam X-alt yarılatisi olan $Q=\{T_1,T_2,T_3,...,T_m\}$ yarılatisinin elemanları

$$\begin{aligned}&T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset \cdots \subset T_m,\ T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset \cdots \subset T_m,\\&T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset \cdots \subset T_m,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\\&T_3 \setminus T_4 \neq \varnothing,\ T_4 \setminus T_3 \neq \varnothing,\ T_1 \cup T_2 = T_3 \text{ ve } T_3 \cup T_4 = T_5\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

koşullarını sağlasın (Şekil 4). O zaman Q yarılatisinin birleşimlerin tam XI -alt yarılatisi olması için gerek ve yeter koşul $T_1 \cap T_4 = \varnothing$ olmasıdır.

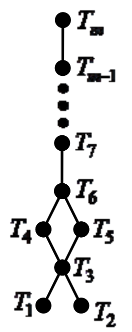


Şekil 4. Elemanları (1.1.4) koşullarını sağlayan $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$ nun diyagramı.

Teorem 1.1.51 D birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $m \geq 6$ olmak üzere D nin birleşimlerin tam X -alt yarılatisi olan $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$ yarılatisinin elemanları

$$\begin{aligned}&T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,\ T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,\\&T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,\ T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,\\&T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_4 \setminus T_5 \neq \varnothing,\ T_5 \setminus T_4 \neq \varnothing,\\&T_1 \cup T_2 = T_3,\ T_4 \cup T_5 = T_6\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

koşullarını sağlasın (Şekil 5). O zaman Q yarılatisinin birleşimlerin tam XI -alt yarılatisi olması için gerek ve yeter koşul $T_1 \cap T_2 = \varnothing$ olmasıdır.



Şekil 5. Elemanları (1.1.5) koşullarını sağlayan $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$ nun diyagramı.

Teorem 1.1.52 $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_m$ olmak üzere $Q = \{T_0, T_1, ..., T_m\}$ $(m \geq 1)$, D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olsun. Ayrıca $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m}(Y_i^\alpha \times T_i)$ biçiminde ve $Q = V(D, \alpha)$ olsun. O zaman α nın $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul D', D nin alt yarılatisi olmak üzere $\varphi : Q \to D'$ bir tam α-izomorfizmasının $p = 0,1,...,m-1$ ve $q = 1,2,...,m$ için

$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_p^\alpha \supseteq \varphi(T_p),\ Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \varnothing$$

koşullarını sağlamasıdır.

Sonuç 1.1.53 $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_m$ olmak üzere $Q = \{T_0, T_1, ..., T_m\}$ $(m \geq 1)$, D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olsun. Ayrıca $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m}(Y_i^\alpha \times T_i)$ biçiminde ve $Q = V(Q, \alpha)$ olsun. O zaman α, $B_X(Q)$ yarıgrubunun sağ birim elemanıdır ancak ve ancak $p = 0,1,...,m-1$ ve $q = 1,2,...,m$ için

$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_p^\alpha \supseteq T_p \text{ ve } Y_q^\alpha \cap T_q \neq \varnothing$$

koşulları sağlanır.

Teorem 1.1.54 X sonlu bir küme, D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_m$ olmak üzere $Q = \{T_0, T_1, ..., T_m\}$ $(m \geq 1)$ yarılatisi D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olsun. Eğer $Q = \{T_0, T_1, ..., T_m\}$ ile $D' = \{\overline{T}_0, \overline{T}_1, ..., \overline{T}_m\}$ tam α-izomorf ise $|\Omega(Q)| = m_0$ olmak üzere

$$|R(D')| = m_0 \cdot \left(2^{|\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_0|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1|} - 2^{|\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1|}\right) \cdots \left((m+1)^{|\overline{T}_m \setminus \overline{T}_{m-1}|} - m^{|\overline{T}_m \setminus \overline{T}_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus \overline{T}_m|}$$

olur.

Sonuç 1.1.55 X sonlu bir küme, D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_m$ olmak üzere $Q = \{T_0, T_1, ..., T_m\}$ $(m \geq 1)$, D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olsun. O zaman $E_X^{(r)}(Q)$, $B_X(Q)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi olmak üzere

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(2^{|T_1 \setminus T_0|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T_2 \setminus T_1|} - 2^{|T_2 \setminus T_1|}\right) \cdots \left((m+1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - m^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus T_m|}$$

olur.

Teorem 1.1.56 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $Q=\{T_1,T_2,T_3,...,T_m\}$, $(m\geq 3)$ elemanları

$$T_1,T_2\notin\{\varnothing\},\ T_1\cap T_2=\varnothing,\ T_1\cup T_2=T_3 \text{ ve } T_3\subset T_4\subset\cdots\subset T_m$$

koşullarını sağlayan D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olsun. Üstelik $\alpha\in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha=\bigcup_{i=1}^{m}\left(Y_i^\alpha\times T_i\right)$ biçiminde ve $Q=V(D,\alpha)$ olsun. O zaman α ikili bağıntısının $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul D', D nin alt yarılatisi olmak üzere $\varphi:Q\to D'$ tam α-izomorfizmasının

$$Y_1^\alpha\supseteq\varphi(T_1),\ Y_2^\alpha\supseteq\varphi(T_2),\ Y_1^\alpha\cup Y_2^\alpha\cup\cdots\cup Y_k^\alpha\supseteq\varphi(T_k),$$

$$Y_q^\alpha\cap\varphi(T_q)\neq\varnothing,\ (k=4,5,...,m-1 \text{ ve } q=4,5,...,m)$$

koşullarını sağlamasıdır.

Sonuç 1.1.57 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $Q=\{T_1,T_2,T_3,...,T_m\}$, $(m\geq 3)$ elemanları

$$T_1,T_2\notin\{\varnothing\},\ T_1\cap T_2=\varnothing,\ T_1\cup T_2=T_3 \text{ ve } T_3\subset T_4\subset\cdots\subset T_m$$

koşullarını sağlayan D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olsun. Üstelik $\alpha\in B_X(Q)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha=\bigcup_{i=1}^{m}\left(Y_i^\alpha\times T_i\right)$ biçiminde ve $Q=V(Q,\alpha)$ olsun. O zaman α, $B_X(Q)$ yarıgrubunun sağ birim elemanıdır ancak ve ancak $k=4,5,...,m-1$ ve $q=4,5,...,m$ için

$$Y_1^\alpha\supseteq T_1,\ Y_2^\alpha\supseteq T_2,\ Y_1^\alpha\cup Y_2^\alpha\cup\cdots\cup Y_k^\alpha\supseteq T_k \text{ ve } Y_q^\alpha\cap T_q\neq\varnothing$$

koşulları sağlanır.

Teorem 1.1.58 X sonlu bir küme ve D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $Q=\{T_1,T_2,T_3,...,T_m\}$, $(m\geq 3)$ elemanları

$$T_1,T_2\notin\{\varnothing\},\ T_1\cap T_2=\varnothing,\ T_1\cup T_2=T_3 \text{ ve } T_3\subset T_4\subset\cdots\subset T_m$$

koşullarını sağlayan D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olsun. Eğer $Q=\{T_1,T_2,...,T_m\}$ ile $D'=\{\overline{T}_1,\overline{T}_2,...,\overline{T}_m\}$ tam α-izomorf ise $|\Omega(Q)|=m_0$ olmak üzere

$$\left|R\left(D'\right)\right| = 2\cdot m_0\cdot\left(4^{|\overline{T}_4\setminus\overline{T}_3|}-3^{|\overline{T}_4\setminus\overline{T}_3|}\right)\cdots\left(m^{|\overline{T}_m\setminus\overline{T}_{m-1}|}-\left(m-1\right)^{|\overline{T}_m\setminus\overline{T}_{m-1}|}\right)\cdot m^{|X\setminus\overline{T}_m|}$$

olur.

Sonuç 1.1.59 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $Q=\{T_1,T_2,T_3,...,T_m\}$, $(m\geq 3)$ elemanları

$$T_1,T_2\notin\{\varnothing\},\ T_1\cap T_2=\varnothing,\ T_1\cup T_2=T_3 \text{ ve } T_3\subset T_4\subset\cdots\subset T_m$$

koşullarını sağlayan D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olsun. O zaman $E_X^{(r)}(Q)$, $B_X(Q)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi olmak üzere

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(4^{|T_4\setminus T_3|}-3^{|T_4\setminus T_3|}\right)\cdots\left(m^{|T_m\setminus T_{m-1}|}-\left(m-1\right)^{|T_m\setminus T_{m-1}|}\right)\cdot m^{|X\setminus T_m|}$$

olur.

Teorem 1.1.60 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $m\geq 3$ olmak üzere $Q=\{T_0,T_1,...,T_j,...,T_m\}$, elemanları $0\leq j\leq m-3$ için

$$T_0\subset T_1\subset\cdots\subset T_j\subset T_{j+1}\subset T_{j+3}\subset\cdots\subset T_m,$$
$$T_0\subset T_1\subset\cdots\subset T_j\subset T_{j+2}\subset T_{j+3}\subset\cdots\subset T_m,$$
$$T_{j+1}\setminus T_{j+2}\neq\varnothing,\ T_{j+2}\setminus T_{j+1}\neq\varnothing \text{ ve } T_{j+1}\cup T_{j+2}=T_{j+3}$$

koşullarını sağlayan D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olsun. Üstelik $\alpha\in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha=\bigcup_{i=0}^{m}\left(Y_i^\alpha\times T_i\right)$ biçiminde ve $Q=V(D,\alpha)$ olsun. O zaman α ikili bağıntısının $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul D', D nin alt yarılatisi olmak üzere $\varphi:Q\to D'$ bir tam α-izomorfizmasının

$$Y_0^\alpha\cup Y_1^\alpha\cup\cdots\cup Y_j^\alpha\cup Y_{j+1}^\alpha\supseteq\varphi\left(T_{j+1}\right),\ Y_0^\alpha\cup Y_1^\alpha\cup\cdots\cup Y_j^\alpha\cup Y_{j+2}^\alpha\supseteq\varphi\left(T_{j+2}\right),$$

$$Y_0^\alpha\cup Y_1^\alpha\cup\cdots\cup Y_j^\alpha\cup Y_{j+2}^\alpha\supseteq\varphi\left(T_{j+2}\right),\ Y_0^\alpha\cup Y_1^\alpha\cup\cdots\cup Y_p^\alpha\supseteq\varphi\left(T_p\right),$$

$$Y_q^\alpha\cap\varphi\left(T_q\right)\neq\varnothing,\ p=0,1,2,...,m-1,\ q=1,2,...,m,\left(p\neq j+2,\ q\neq j+3\right)$$

koşullarını sağlamasıdır.

Sonuç 1.1.61 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $m \geq 3$ olmak üzere $Q = \{T_0, T_1, ..., T_j, ..., T_m\}$, elemanları $0 \leq j \leq m-3$ için

$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \varnothing,\ T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \varnothing \text{ ve } T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}$$

koşullarını sağlayan D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olsun. Üstelik $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m} (Y_i^\alpha \times T_i)$ biçiminde ve $Q = V(Q, \alpha)$ olsun. O zaman α, $B_X(Q)$ yarıgrubunun sağ birim elemanıdır ancak ve ancak

$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_j^\alpha \cup Y_{j+1}^\alpha \supseteq T_{j+1},\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_j^\alpha \cup Y_{j+2}^\alpha \supseteq T_{j+2},$$

$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_j^\alpha \cup Y_{j+2}^\alpha \supseteq T_{j+2},\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \cdots \cup Y_p^\alpha \supseteq T_p,$$

$$Y_q^\alpha \cap T_q \neq \varnothing,\ p = 0,1,2,...,m-1,\ q = 1,2,...,m, (p \neq j+2,\ q \neq j+3)$$

koşulları sağlanır.

Teorem 1.1.62 X sonlu bir küme, D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $m \geq 3$ olmak üzere $Q = \{T_0, T_1, ..., T_j, ..., T_m\}$, elemanları $0 \leq j \leq m-3$ için

$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \varnothing,\ T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \varnothing \text{ ve } T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}$$

koşullarını sağlayan D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olsun. Eğer $Q = \{T_0, T_1, ..., T_m\}$ ve $D' = \{\overline{T}_0, \overline{T}_1, ..., \overline{T}_m\}$ tam α-izomorf ise $|\Omega(Q)| = m_0$ olmak üzere

a) $j = 0$ $(T_j = T_0)$ ise

$$|R(D')| = 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{|\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2|} - 1\right) \cdot \left(2^{|\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1|} - 1\right) \cdot \left(5^{|\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3|} - 4^{|\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3|}\right) \cdot$$
$$\cdots \left((m+1)^{|\overline{T}_m \setminus \overline{T}_{m-1}|} - m^{|\overline{T}_m \setminus \overline{T}_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus \overline{T}_m|}$$

b) $1 \le j \le m-3 \ \left(T_j \ne T_0\right)$ ise

$$\begin{aligned}\left|R\left(D'\right)\right| = 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{\left|\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_0\right|} - 1\right) \cdots \left(\left(j+1\right)^{\left|\overline{T}_{j-1} \setminus \overline{T}_{j-2}\right|} - j^{\left|\overline{T}_{j-1} \setminus \overline{T}_{j-2}\right|}\right) \cdot \left(j+1\right)^{\left|\left(\overline{T}_{j+1} \cap \overline{T}_{j+2}\right) \setminus \overline{T}_j\right|} \\ \cdot \left(\left(j+2\right)^{\left|\overline{T}_{j+1} \setminus \overline{T}_{j+2}\right|} - \left(j+1\right)^{\left|\overline{T}_{j+1} \setminus \overline{T}_{j+2}\right|}\right) \cdot \left(\left(j+2\right)^{\left|\overline{T}_{j+2} \setminus \overline{T}_{j+1}\right|} - \left(j+1\right)^{\left|\overline{T}_{j+2} \setminus \overline{T}_{j+1}\right|}\right) \\ \cdot \left(\left(j+5\right)^{\left|\overline{T}_{j+4} \setminus \overline{T}_{j+3}\right|} - \left(j+4\right)^{\left|\overline{T}_{j+4} \setminus \overline{T}_{j+3}\right|}\right) \cdots \left(\left(m+1\right)^{\left|\overline{T}_m \setminus \overline{T}_{m-1}\right|} - m^{\left|\overline{T}_m \setminus \overline{T}_{m-1}\right|}\right) \cdot \left(m+1\right)^{\left|X \setminus \overline{T}_m\right|}\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 1.1.63 X sonlu bir küme, D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $m \ge 3$ olmak üzere $Q = \left\{T_0, T_1, ..., T_j, ..., T_m\right\}$, elemanları $0 \le j \le m-3$ için

$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \ne \varnothing,\ T_{j+2} \setminus T_{j+1} \ne \varnothing \text{ ve } T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}$$

koşullarını sağlayan D nin birleşimlerin tam XI-alt yarılatisi olsun. $E_X^{(r)}\left(Q\right)$, $B_X\left(Q\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi olmak üzere

a) $j = 0 \ \left(T_j = T_0\right)$ ise

$$\begin{aligned}\left|E_X^{(r)}\left(Q\right)\right| = \left(2^{\left|T_1 \setminus T_2\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|T_2 \setminus T_1\right|} - 1\right) \cdot \left(5^{\left|T_4 \setminus T_3\right|} - 4^{\left|T_4 \setminus T_3\right|}\right) \cdots \left(\left(m+1\right)^{\left|T_m \setminus T_{m-1}\right|} - m^{\left|T_m \setminus T_{m-1}\right|}\right) \\ \cdot \left(m+1\right)^{\left|X \setminus T_m\right|}\end{aligned}$$

b) $1 \le j \le m-3 \ \left(T_j \ne T_0\right)$ ise

$$\begin{aligned}\left|E_X^{(r)}\left(Q\right)\right| = \left(2^{\left|T_1 \setminus T_0\right|} - 1\right) \cdots \left(\left(j+1\right)^{\left|\overline{T}_j \setminus \overline{T}_{j-1}\right|} - j^{\left|\overline{T}_j \setminus \overline{T}_{j-1}\right|}\right) \cdot \left(j+1\right)^{\left|\left(T_{j+1} \cap T_{j+2}\right) \setminus T_j\right|} \\ \cdot \left(\left(j+2\right)^{\left|T_{j+1} \setminus T_{j+2}\right|} - \left(j+1\right)^{\left|T_{j+1} \setminus T_{j+2}\right|}\right) \cdot \left(\left(j+2\right)^{\left|T_{j+2} \setminus T_{j+1}\right|} - \left(j+1\right)^{\left|T_{j+2} \setminus T_{j+1}\right|}\right) \\ \cdot \left(\left(j+5\right)^{\left|T_{j+4} \setminus T_{j+3}\right|} - \left(j+4\right)^{\left|T_{j+4} \setminus T_{j+3}\right|}\right) \cdots \left(\left(m+1\right)^{\left|T_m \setminus T_{m-1}\right|} - m^{\left|T_m \setminus T_{m-1}\right|}\right) \cdot \left(m+1\right)^{\left|X \setminus T_m\right|}\end{aligned}$$

olur.

Teorem 1.1.64 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $m \ge 5$ olmak üzere D nin birleşimlerin tam X-alt yarılatisi olan $Q = \left\{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\right\}$ nun elemanları

$$T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset \cdots \subset T_m,\ T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset \cdots \subset T_m,\ T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_1 \setminus T_2 \ne \varnothing,\ T_2 \setminus T_1 \ne \varnothing,\ T_3 \setminus T_4 \ne \varnothing,\ T_4 \setminus T_3 \ne \varnothing,\ T_1 \cup T_2 = T_3 \text{ ve } T_3 \cup T_4 = T_5$$

koşullarını sağlasın. Üstelik $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{m} (Y_i^\alpha \times T_i)$ biçiminde ve $Q = V(D, \alpha)$ olsun. O zaman α nın $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul D', D nin alt yarılatisi olmak üzere $\varphi : Q \to D' = \{\varphi(T_1), \varphi(T_2), ..., \varphi(T_m)\}$ bir tam α-izomorfizmasının

$$Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1),\ Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2),\ Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(T_4),\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \dots \cup Y_k^\alpha \supseteq \varphi(T_k),$$

$$Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \varnothing,\ (k = 5, 6, ..., m-1) \text{ ve } (q = 4, 6, ..., m)$$

koşullarını sağlamasıdır.

Sonuç 1.1.65 D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $m \geq 5$ olmak üzere D nin birleşimlerin tam X-alt yarılatisi olan $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$ nun elemanları

$$T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m,\ T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m,$$

$$T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,$$

$$T_3 \setminus T_4 \neq \varnothing,\ T_4 \setminus T_3 \neq \varnothing,\ T_1 \cup T_2 = T_3 \text{ ve } T_3 \cup T_4 = T_5$$

koşullarını sağlasın. Üstelik $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{m} (Y_i^\alpha \times T_i)$ biçiminde ve $Q = V(Q, \alpha)$ olsun. O zaman α, $B_X(Q)$ yarıgrubunun sağ birim elemanıdır ancak ve ancak

$$Y_1^\alpha \supseteq T_1,\ Y_2^\alpha \supseteq T_2,\ Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq T_4,\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \dots \cup Y_k^\alpha \supseteq T_k,$$

$$Y_q^\alpha \cap T_q \neq \varnothing,\ k = 5, 6, ..., m-1 \text{ ve } q = 4, 6, ..., m$$

koşulları sağlanır.

Teorem 1.1.66 X sonlu bir küme, D birleşimlerin tam X-yarılatisi ve $m \geq 5$ olmak üzere $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$, D nin birleşimlerin tam X-alt yarılatisi olsun. Ayrıca Q yarılatisinin elemanları

$$T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m,\ T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m,$$

$$T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset \dots \subset T_m,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,$$

$$T_3 \setminus T_4 \neq \varnothing,\ T_4 \setminus T_3 \neq \varnothing,\ T_1 \cup T_2 = T_3 \text{ ve } T_3 \cup T_4 = T_5$$

koşullarını sağlasın. Eğer Q ve $D' = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, ..., \overline{T}_m\}$ tam α-izomorf ise $|\Omega(Q)| = m_0$ olmak üzere

$$\left|R\left(D'\right)\right| = m_0 \cdot \left(2^{\left|\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3\right|} - 1\right) \cdot \left(6^{\left|\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_5\right|} - 5^{\left|\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_5\right|}\right) \cdots \left(m^{\left|\overline{T}_m \setminus \overline{T}_{m-1}\right|} - (m-1)^{\left|\overline{T}_m \setminus \overline{T}_{m-1}\right|}\right) \cdot m^{\left|X \setminus \overline{T}_m\right|}$$

olur.

Sonuç 1.1.67 X sonlu bir küme, D birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $m \geq 5$ olmak üzere $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$, D nin birleşimlerin tam X -alt yarılatisi olsun. Ayrıca Q yarılatisinin elemanları

$$T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset \cdots \subset T_m ,\ T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset \cdots \subset T_m ,$$

$$T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset \cdots \subset T_m ,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing ,\ T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing ,$$

$$T_3 \setminus T_4 \neq \varnothing ,\ T_4 \setminus T_3 \neq \varnothing ,\ T_1 \cup T_2 = T_3 \text{ ve } T_3 \cup T_4 = T_5$$

koşullarını sağlasın. $E_X^{(r)}(Q)$, $B_X(Q)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi olmak üzere

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(2^{\left|T_4 \setminus T_3\right|} - 1\right) \cdot \left(6^{\left|T_6 \setminus T_5\right|} - 5^{\left|T_6 \setminus T_5\right|}\right) \cdots \left(m^{\left|T_m \setminus T_{m-1}\right|} - (m-1)^{\left|T_m \setminus T_{m-1}\right|}\right) \cdot m^{\left|X \setminus T_m\right|}$$

olur.

Teorem 1.1.68 D birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $m \geq 6$ için

$$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m ,\ T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m ,$$

$$T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m ,\ T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m ,$$

$$T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing ,\ T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing ,\ T_4 \setminus T_5 \neq \varnothing ,\ T_5 \setminus T_4 \neq \varnothing ,\ T_1 \cup T_2 = T_3 ,\ T_4 \cup T_5 = T_6$$

olmak üzere $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$, D nin bir XI -alt yarılatisi olsun. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{m} \left(Y_i^\alpha \times T_i\right)$ biçiminde var ve $Q = V(D, \alpha)$ olsun. O zaman α nın $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul D' D nin alt yarılatisi olmak üzere $\varphi : Q \to D' = \{\varphi(T_1), \varphi(T_2), ..., \varphi(T_m)\}$ bir tam α -izomorfizmasının

$$Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1),\ Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2),\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(T_4),$$

$$Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \varphi(T_5),\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \cdots \cup Y_p^\alpha \supseteq \varphi(T_p),$$

$$Y_q^\alpha \cap \varphi(T_q) \neq \varnothing ,\ p = 6, ..., m-1 \text{ ve } q = 4, 5, 7, ..., m$$

koşullarını sağlamasıdır.

Sonuç 1.1.69 D birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $m \geq 6$ için

$$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,\ T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,\ T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_4 \setminus T_5 \neq \varnothing,\ T_5 \setminus T_4 \neq \varnothing,\ T_1 \cup T_2 = T_3,\ T_4 \cup T_5 = T_6$$

olmak üzere $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$ D nin bir XI -alt yarılatisi olsun. Bir $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=1}^{m} (Y_i^\alpha \times T_i)$ biçiminde var ve $Q = V(Q, \alpha)$ olsun. O zaman α , $B_X(Q)$ yarıgrubunun sağ birim elemanıdır ancak ve ancak

$$Y_1^\alpha \supseteq T_1,\ Y_2^\alpha \supseteq T_2,\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq T_4,$$
$$Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq T_5,\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \cdots \cup Y_p^\alpha \supseteq T_p,$$
$$Y_q^\alpha \cap T_q \neq \varnothing,\ p = 6, ..., m-1 \text{ ve } q = 4, 5, 7, ..., m$$

koşulları sağlanır.

Teorem 1.1.70 X sonlu bir küme, D birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $m \geq 6$ için

$$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,\ T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,\ T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_4 \setminus T_5 \neq \varnothing,\ T_5 \setminus T_4 \neq \varnothing,\ T_1 \cup T_2 = T_3,\ T_4 \cup T_5 = T_6$$

olmak üzere $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$, D nin bir XI -alt yarılatisi olsun. Eğer Q ile $D' = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, ..., \overline{T}_m\}$ tam α -izomorf ise $|\Omega(Q)| = m_0$ olmak üzere

$$|R(D')| = 4 \cdot m_0 \cdot 3^{\left|(\overline{T}_4 \cap \overline{T}_5) \setminus \overline{T}_3\right|} \cdot \left(4^{\left|\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5\right|} - 3^{\left|\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5\right|}\right) \cdot \left(4^{\left|\overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4\right|} - 3^{\left|\overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4\right|}\right) \cdot \left(7^{\left|\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6\right|} - 6^{\left|\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6\right|}\right) \cdots$$
$$\cdot \left(m^{\left|\overline{T}_m \setminus \overline{T}_{m-1}\right|} - (m-1)^{\left|\overline{T}_m \setminus \overline{T}_{m-1}\right|}\right) \cdot m^{\left|X \setminus \overline{T}_m\right|}$$

olur.

Sonuç 1.1.71 X sonlu bir küme, D birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $m \geq 6$ için

$$T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,\ T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,\ T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset \cdots \subset T_m,$$
$$T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_4 \setminus T_5 \neq \varnothing,\ T_5 \setminus T_4 \neq \varnothing,\ T_1 \cup T_2 = T_3,\ T_4 \cup T_5 = T_6$$

olmak üzere $Q = \{T_1, T_2, T_3, ..., T_m\}$, D nin bir alt yarılatisi olsun. $E_X^{(r)}(Q)$, $B_X(Q)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi olmak üzere

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = 3^{\left|(T_4 \cap T_5)\setminus T_3\right|} \cdot \left(4^{|T_4 \setminus T_5|} - 3^{|T_4 \setminus T_5|}\right) \cdot \left(4^{|T_5 \setminus T_4|} - 3^{|T_5 \setminus T_4|}\right) \cdot \left(7^{|T_7 \setminus T_6|} - 6^{|T_7 \setminus T_6|}\right) \cdots$$
$$\cdot \left(m^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - (m-1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot m^{|X \setminus T_m|}$$

olur.

Bundan sonraki bölümlerde;

- Birleşimlerin tam X -yarılatisi **yerine** tam X -yarılatis,
- Birleşimlerin tam XI -yarılatisi **yerine** XI -yarılatis,
- $Y_{T_i}^{\alpha}$ gösterimi **yerine** Y_i^{α} gösterimi,

kullanılacaktır.

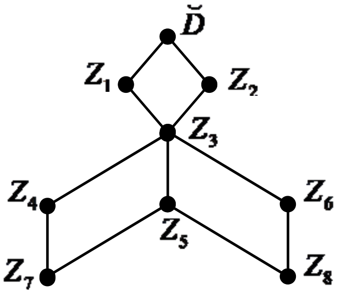
BÖLÜM 2

İKİLİ BAĞINTILARIN TAM YARIGRUPLARI

X boş olmayan bir küme ve $D=\left\{ Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\}$, X in alt kümelerinden oluşan ve elemanları aşağıdaki koşulları sağlayan bir aile olsun.

$$\begin{aligned}
&Z_7 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\\
&Z_7 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\\
&Z_8 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\\
&Z_8 \subset Z_6 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\\
&Z_8 \setminus Z_7 \neq \varnothing,\ Z_7 \setminus Z_8 \neq \varnothing, Z_6 \setminus Z_5 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_6 \neq \varnothing,\\
&Z_6 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_6 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_5 \neq \varnothing,\\
&Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\ Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

D nin diyagramı Şekil 6 daki gibidir.



Şekil 6. Elemanları (2.1) koşullarını sağlayan $D=\left\{ Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\}$ nin diyagramı.

D nin her alt kümesinin kapsama bağıntısına göre bir en küçük üst sınırı var olduğundan D kümelerdeki kapsama bağıntısı ile bir üst yarılatisdir. Ayrıca D kümelerdeki birleşme işlemine göre kapalı olduğundan tam X -yarılatisdir ve en büyük elemanı $\breve{D}$ dır.

Teorem 1.1.37 den dolayı D nin karakteristik kümeler ailesi olan $C(D)$ ve $\chi: D \to C(D)$ karakteristik dönüşümü teklikle belirlidir. Ayrıca Teorem 1.1.38 den $C(D)$ kümesinin eleman sayısı D nin eleman sayısına eşit olduğu biliniyor. O halde P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 , P_5, P_6, P_7 ve P_8 kümeleri $\breve{D}$ nın ikişer ikişer ayrık alt kümeleri olmak üzere

$$C(D)=\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7,P_8\}$$

ve

$$\chi=\begin{pmatrix} \breve{D} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

χ dönüşümünden faydalanarak her $Z\in D$ için

$$\overline{Z}=P_0\cup\bigcup_{T\in\hat{D}(Z)}\chi(T),\ \hat{D}(Z)=D\setminus\{T\in D\mid Z\subseteq T\}$$

formal birleşimi tanımlanabilir. Bu şekildeki formal birleşimlerin kümesi D' ile gösterilirse, Lemma 1.1.39 den D' ile D tam izomorf olur. O halde D nin elemanları formal birleşimlerle ifade edilebilir. Burada

$$\hat{D}(\breve{D})=D\setminus\{T\in D\mid \breve{D}\subseteq T\}=D\setminus\{\breve{D}\},$$

$$\hat{D}(Z_1)=D\setminus\{T\in D\mid Z_1\subseteq T\}=D\setminus\{Z_1,\breve{D}\},$$

$$\hat{D}(Z_2)=D\setminus\{T\in D\mid Z_2\subseteq T\}=D\setminus\{Z_2,\breve{D}\},$$

$$\hat{D}(Z_3)=D\setminus\{T\in D\mid Z_3\subseteq T\}=D\setminus\{Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$$

$$\hat{D}(Z_4)=D\setminus\{T\in D\mid Z_4\subseteq T\}=D\setminus\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$$

$$\hat{D}(Z_5)=D\setminus\{T\in D\mid Z_5\subseteq T\}=D\setminus\{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$$

$$\hat{D}(Z_6)=D\setminus\{T\in D\mid Z_6\subseteq T\}=D\setminus\{Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$$

$$\hat{D}(Z_7)=D\setminus\{T\in D\mid Z_7\subseteq T\}=\{Z_6,Z_8\},$$

$$\hat{D}(Z_8)=D\setminus\{T\in D\mid Z_8\subseteq T\}=\{Z_4,Z_7\},$$

kümeleri kullanılarak D nin elemanlarının formal eşitlikleri,

$$\begin{aligned}
\breve{D} &= P_0 \cup \bigcup_{T\in\hat{D}(\breve{D})} \chi(T) = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8,\\
Z_1 &= P_0 \cup \bigcup_{T\in\hat{D}(Z_1)} \chi(T) = P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8,\\
Z_2 &= P_0 \cup \bigcup_{T\in\hat{D}(Z_2)} \chi(T) = P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8,\\
Z_3 &= P_0 \cup \bigcup_{T\in\hat{D}(Z_2)} \chi(T) = P_0 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8,\\
Z_4 &= P_0 \cup \bigcup_{T\in\hat{D}(Z_4)} \chi(T) = P_0 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8, \qquad (2.2)\\
Z_5 &= P_0 \cup \bigcup_{T\in\hat{D}(Z_5)} \chi(T) = P_0 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8,\\
Z_6 &= P_0 \cup \bigcup_{T\in\hat{D}(Z_6)} \chi(T) = P_0 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_7 \cup P_8,\\
Z_7 &= P_0 \cup \bigcup_{T\in\hat{D}(Z_7)} \chi(T) = P_0 \cup P_6 \cup P_8,\\
Z_8 &= P_0 \cup \bigcup_{T\in\hat{D}(Z_8)} \chi(T) = P_0 \cup P_4 \cup P_7
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.1.44 den dolayı $P_1,\ P_2,\ P_4,\ P_5$ ve P_6 kümeleri D nin temel kaynak elemanlarıdır ve boş kümeden farklıdırlar. Bununla birlikte Teorem 1.1.45 den dolayı $P_3,\ P_7$ ve P_8 kümeleri D nin yardımcı kaynak elemanlarıdır ve boş küme olabilirler. Ayrıca $\chi(\breve{D}) = P_0$ kümesi her zaman D nin yardımcı kaynağı olduğundan boş küme olabilir. O halde $\bigcup_{i=1}^{8} P_i = \breve{D} \subseteq X$ olduğundan $|X| \geq 5$ olur. Ayrıca D yarılatisinin elemanlarının formal eşitliklerinin içinde D nin temel kaynak elemanlarından en az bir tanesi bulunduğundan D nin elemanlarının hepsi boş kümeden farklıdır.

D ye tam izomorf olan tam X -yarılatislerin sınıfını $\Sigma_2(X,9)$ sembolü ile gösterelim. O halde bu sınıftan alınan herhangi bir X -yarılatis ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubunu $B_X(D)$ yardımıyla karakterize edebiliriz.

X sonlu iken $\Sigma_2(X,9)$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

Lemma 2.1 $D \in \Sigma_2(X,9)$ ve $|X| = n$ olsun. O zaman

$$\left|\Sigma_2(X,9)\right| = \frac{1}{4}\left(10^n - 5\cdot 9^n + 10\cdot 8^n - 10\cdot 7^n + 5\cdot 6^n - 5^n\right) \tag{2.3}$$

olur.

İspat: D nin otomorfizmleri,

$$id_D = \begin{pmatrix} \breve{D} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \\ \breve{D} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \end{pmatrix} \quad , \; f = \begin{pmatrix} \breve{D} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \\ \breve{D} & Z_2 & Z_1 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} \breve{D} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \\ \breve{D} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_6 & Z_5 & Z_4 & Z_8 & Z_7 \end{pmatrix} \quad , \; h = \begin{pmatrix} \breve{D} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \\ \breve{D} & Z_2 & Z_1 & Z_3 & Z_6 & Z_5 & Z_4 & Z_8 & Z_7 \end{pmatrix}$$

olup 4 tanedir. O halde D nin otomorfizmlerinin sayısı $q = 4$, temel kaynakların sayısı $\delta = 5$ ve $C_j^k = \dfrac{j!}{k!\,\cdot(j-k)!}$ olduğundan Teorem 1.1.46 dan

$$\left|\Sigma_2(X,9)\right| = \frac{1}{q}\cdot\sum_{p=\delta}^{m}\left(\sum_{i=1}^{p+1}\left(\frac{(-1)^{p+i+1}\cdot C_{m-\delta}^{p-\delta}\cdot C_p^{\delta}\cdot(\delta!)\cdot((p-\delta)!)\cdot i^n}{(i-1)!\,\cdot(p-i+1)!}\right)\right)$$

olup gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\left|\Sigma_2(X,9)\right| = \frac{1}{4}\left(10^n - 5\cdot 9^n + 10\cdot 8^n - 10\cdot 7^n + 5\cdot 6^n - 5^n\right)$$

olarak bulunur. ■

Örnek 1 X kümesinin eleman sayısı sırasıyla 5, 6, 7, 8, 9, 10 olarak alındığında $\Sigma_2(X,9)$ sınıfının ve $B_X(D)$ nin eleman sayılarını hesaplayalım.

(2.3) eşitliğinde $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ sayıları Lemma 2.1 de yerine konulduğunda $\Sigma_2(X,9)$ sınıfının eleman sayısı sırasıyla

$$\left|\Sigma_2(X,9)\right| = 30,\ 1350,\ 35700,\ 724500,\ 1953125,\ 192827250$$

olarak bulunur.

Şimdi, verilen n değerleri için $B_X(D)$ nin eleman sayısını sırasıyla bulalım.

$$\left|B_X(D)\right| = |D|^{|X|} = 9^{|X|}$$

olduğundan verilen n değerleri için

$$\left|B_X\left(D\right)\right| = 59049,\ 531441,\ 4782969,\ 43046721,\ 387420489,\ 3486784401$$

olarak bulunur.

Şimdi D X -yarılatisinin bütün tam X -alt yarılatislerini bulalım.

Lemma 2.2 D X -yarılatisinin bütün tam X -alt yarılatisleri

1) $\{Z_8\}$, $\{Z_7\}$, $\{Z_6\}$, $\{Z_5\}$, $\{Z_4\}$, $\{Z_3\}$, $\{Z_2\}$, $\{Z_1\}$, $\{\breve{D}\}$,

2) $\{Z_3,Z_1\}$, $\{Z_3,Z_2\}$, $\{Z_4,Z_1\}$, $\{Z_4,Z_2\}$, $\{Z_4,Z_3\}$, $\{Z_5,Z_1\}$, $\{Z_5,Z_2\}$, $\{Z_5,Z_3\}$, $\{Z_6,Z_1\}$, $\{Z_6,Z_2\}$, $\{Z_6,Z_3\}$, $\{Z_7,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_3\}$, $\{Z_7,Z_4\}$, $\{Z_7,Z_5\}$, $\{Z_8,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_3\}$, $\{Z_8,Z_5\}$, $\{Z_8,Z_6\}$, $\{Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_4,\breve{D}\}$, $\{Z_5,\breve{D}\}$, $\{Z_6,\breve{D}\}$, $\{Z_7,\breve{D}\}$, $\{Z_8,\breve{D}\}$,

3) $\{Z_4,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_4,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_5,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_5,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_6,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_6,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_3\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_3\}$, $\{Z_8,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_3\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_3\}$, $\{Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_4,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_5,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_5,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_6,\breve{D}\}$,

4) $\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_3,\breve{D}\}$,

5) $\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$,

$\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$,

6) $\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3\}$,$\{Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,$\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,$\{Z_8,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,$\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,

$\{Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3\}$,

7) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2\}$,

$\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,\breve{D}\}$,$\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\}$,

8) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$,

$\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$,

9) $\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,

$\{Z_8,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,

$\{Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,

10) $\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,

$\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,

11) $\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,

12) $\{Z_5,Z_4,Z_3\}$, $\{Z_6,Z_4,Z_3\}$, $\{Z_6,Z_5,Z_3\}$, $\{Z_7,Z_6,Z_3\}$, $\{Z_8,Z_4,Z_3\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5\}$,

$\{Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,

13) $\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_1\}$,

$\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2\}$,

$\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3\}$, $\{Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_4,Z_3,\breve{D}\}$,

$\{Z_6,Z_5,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_6,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_4,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,\breve{D}\}$,

14) $\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$,

$\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$,

$\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\}$,

$\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\}$,

15) $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}$,

16) $\left\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_6,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$,

$\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$,

17) $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$,

18) $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3\right\}$,

19) $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1\right\}$,

$\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\}$,

20) $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$,

$\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}$,

21) $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$,

22) $\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3\right\}$, $\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_3\right\}$, $\left\{Z_8,Z_5,Z_4,Z_3\right\}$, $\left\{Z_8,Z_6,Z_4,Z_3\right\}$,

23) $\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1\right\}$, $\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_2\right\}$, $\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1\right\}$, $\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2\right\}$,

$\left\{Z_8,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\right\}$, $\left\{Z_8,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\right\}$, $\left\{Z_8,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1\right\}$, $\left\{Z_8,Z_6,Z_4,Z_3,Z_2\right\}$,

$\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_6,Z_4,Z_3,\breve{D}\right\}$,

24) $\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$,

$\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}$,

$\left\{Z_8,Z_6,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_6,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}$,

25) $\left\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_3\right\}$,

26) $\left\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\right\}$, $\left\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\right\}$,

27) $\left\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$,

28) $\left\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}$,

29) $\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3\right\}$, $\left\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3\right\}$,

30) $\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\right\}$, $\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\right\}$, $\left\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\right\}$,

$\left\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\right\}$, $\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\right\}$,

31) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$,

$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$,

32) $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$,

33) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}$,

34) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$,

35) $\{Z_7, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$,

$\{Z_8, Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

olur.

İspat: D nin bir elemanlı alt kümeleri birleşim işlemine kapalı olduğundan (1) de verilen kümeler D nin tam X -alt yarılatisleri olurlar. D nin iki elemanlı alt kümelerinin sayısı $C_9^2 = 36$ dır. D nin zincir oluşturan aşağıdaki 29 altkümesi

$\{Z_3, Z_1\}$, $\{Z_3, Z_2\}$, $\{Z_4, Z_1\}$, $\{Z_4, Z_2\}$, $\{Z_4, Z_3\}$, $\{Z_5, Z_1\}$, $\{Z_5, Z_2\}$, $\{Z_5, Z_3\}$,
$\{Z_6, Z_1\}$, $\{Z_6, Z_2\}$, $\{Z_6, Z_3\}$, $\{Z_7, Z_1\}$, $\{Z_7, Z_2\}$, $\{Z_7, Z_3\}$, $\{Z_7, Z_4\}$, $\{Z_7, Z_5\}$,
$\{Z_8, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_3\}$, $\{Z_8, Z_5\}$, $\{Z_8, Z_6\}$, $\{Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_3, \breve{D}\}$,
$\{Z_4, \breve{D}\}$, $\{Z_5, \breve{D}\}$, $\{Z_6, \breve{D}\}$, $\{Z_7, \breve{D}\}$, $\{Z_8, \breve{D}\}$,

kümelerdeki birleşme işlemine kapalı olduklarından D nin tam X -alt yarılatisleri olurlar.

$\{Z_2, Z_1\}$, $\{Z_5, Z_4\}$, $\{Z_6, Z_4\}$, $\{Z_6, Z_5\}$, $\{Z_7, Z_6\}$, $\{Z_8, Z_7\}$, $\{Z_8, Z_4\}$ altkümeleri ise kümelerdeki birleşme işlemine kapalı olmadığından D nin tam X -alt yarılatisleri değillerdir.

D nin üç elemanlı alt kümelerinin sayısı $C_9^3 = 84$ olup bunlardan 50 tanesi;

$\{Z_4, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_4, Z_3, Z_2\}$, $\{Z_5, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_5, Z_3, Z_2\}$, $\{Z_6, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_6, Z_3, Z_2\}$,

$\{Z_7, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_7, Z_3, Z_2\}$, $\{Z_7, Z_4, Z_1\}$, $\{Z_7, Z_4, Z_2\}$, $\{Z_7, Z_4, Z_3\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_1\}$,

$\{Z_7, Z_5, Z_2\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_3\}$, $\{Z_8, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_3, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_5, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_5, Z_2\}$,

$\{Z_8, Z_5, Z_3\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_3\}$, $\{Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_4, Z_1, \breve{D}\}$,

$\{Z_4, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_4, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_6, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_6, Z_2, \breve{D}\}$,

$\{Z_6, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_4, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_5, \breve{D}\}$ $\{Z_8, Z_1, \breve{D}\}$,

$\{Z_8, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_5, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_4, Z_3\}$, $\{Z_6, Z_4, Z_3\}$, $\{Z_6, Z_5, Z_3\}$,

$\{Z_7, Z_6, Z_3\}$, $\{Z_8, Z_4, Z_3\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5\}$, $\{Z_2, Z_1, \breve{D}\}$,

kümelerdeki birleşme işlemine kapalı olduğundan D nin tam X -alt yarılatisleridir. D nin aşağıda listelenen 3 elemanlı alt kümeleri ise birleşme işlemine kapalı olmadığından D nin tam X -alt yarılatisleri değildirler.

$\{Z_3, Z_2, Z_1\}$, $\{Z_4, Z_2, Z_1\}$, $\{Z_5, Z_2, Z_1\}$, $\{Z_5, Z_4, Z_1\}$, $\{Z_5, Z_4, Z_2\}$, $\{Z_6, Z_2, Z_1\}$, $\{Z_6, Z_4, Z_1\}$,

$\{Z_6, Z_4, Z_2\}$, $\{Z_6, Z_5, Z_1\}$, $\{Z_6, Z_5, Z_2\}$, $\{Z_6, Z_5, Z_4\}$, $\{Z_7, Z_2, Z_1\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_4\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_1\}$,

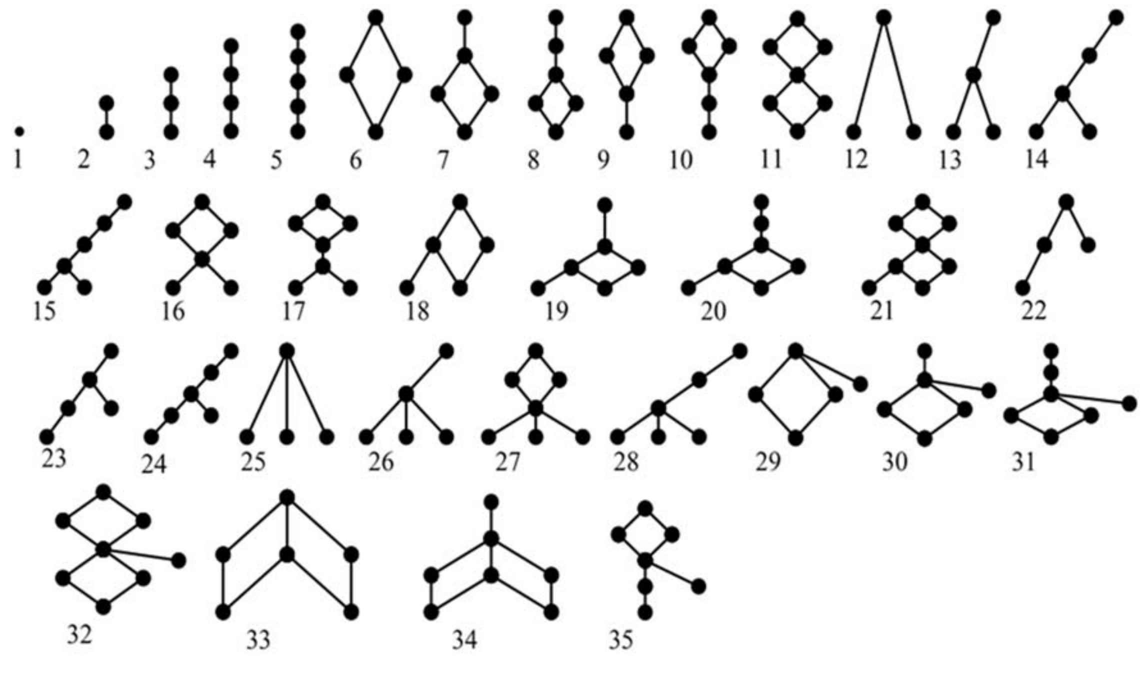
$\{Z_7, Z_6, Z_2\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_4\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_5\}$, $\{Z_8, Z_2, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_4, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_4, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_5, Z_4\}$,

$\{Z_8, Z_6, Z_4\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_5\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_3\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_4\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_6\}$,

$\{Z_5, Z_4, \breve{D}\}$, $\{Z_6, Z_4, \breve{D}\}$, $\{Z_6, Z_5, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_6, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_4, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, \breve{D}\}$

Benzer olarak D nin geriye kalan diğer alt kümelerinin de D nin tam X -alt yarılatisleri oldukları gösterilebilir.■

Lemma 2.2 de verilen D nin X -alt yarılatislerinin diyagramları aşağıdaki gibidir.



Şekil 7. D nin X -alt yarılatislerinin diyagramları.

Şimdi D nin tam X -alt yarılatislerinden XI -alt yarılatis olanları belirleyelim.

Lemma 2.3 Diyagramı Şekil 7 de verilen 22. diyagramdan 35. diyagrama kadar olanlardan herhangi biri biçiminde olan D nin X -alt yarılatisi XI -alt yarılatis değildir.

İspat: Diyagramı 25 deki gibi olan $S=\{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}$ X -alt yarılatisini alalım. S X -alt yarılatisinin en büyük elemanı $\breve{S}=Z_3$ dir. Teorem 1.1.37 ve Teorem 1.1.38 den dolayı S nin karakteristik kümeler ailesi $C(S)=\{P_0', P_1', P_2', P_3'\}$ ve S den $C(S)$ ye bire-bir ve örten olan $\chi=\begin{pmatrix} Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ P_0' & P_1' & P_2' & P_3' \end{pmatrix}$ karakteristik dönüşümü teklikle belirlidir. χ dönüşümünden faydalanarak her $Z\in S$ için $\overline{Z}=P_0'\cup \bigcup_{T\in\hat{S}(Z)} \chi(T)$ formal birleşimi tanımlanabilir. Bu şekildeki formal birleşimlerin kümesi D' ile gösterilirse Lemma 1.1.39 dan dolayı S ile D' izomorf olur. O halde S nin her bir elemanı izomorfizm altındaki görüntüleri olan formal birleşimlerle tanımlanabilir. Aşağıdaki kümeler kullanılarak

$$\hat{S}(Z_3)=S\setminus\{T\in S \mid Z_3\subseteq T\}=\{Z_4, Z_5, Z_6\},$$

$$\hat{S}(Z_4)=S\setminus\{T\in S \mid Z_4\subseteq T\}=\{Z_5, Z_6\},$$

$$\hat{S}(Z_5)=S\setminus\{T\in S \mid Z_5\subseteq T\}=\{Z_4, Z_6\},$$

$$\hat{S}(Z_6)=S\setminus\{T\in S \mid Z_6\subseteq T\}=\{Z_4, Z_5\},$$

S X -alt yarılatisinin elemanlarının formal eşitlikleri,

$$Z_3=P_0'\cup \bigcup_{T\in\hat{S}(Z_3)} \chi(T)=P_0'\cup P_1'\cup P_2'\cup P_3',$$

$$Z_4=P_0'\cup \bigcup_{T\in\hat{S}(Z_4)} \chi(T)=P_0'\cup P_2'\cup P_3',$$

$$Z_5=P_0'\cup \bigcup_{T\in\hat{S}(Z_5)} \chi(T)=P_0'\cup P_1'\cup P_3',$$

$$Z_6=P_0'\cup \bigcup_{T\in\hat{S}(Z_6)} \chi(T)=P_0'\cup P_1'\cup P_2'$$

olarak elde edilir.

Ayrıca Teorem 1.1.44 den dolayı S, tam X -alt yarılatisinin temel kaynak elemanları P_1', P_2', P_3' olur. Öyleyse bu kümeler her zaman boş kümeden farklı olurlar. S X -alt yarılatisinin yardımcı kaynak elemanı P_0' kümesidir. Dolayısıyla P_0' boş küme olabilir.

Şimdi yukarıdaki formal eşitliklerden faydalanarak her $t \in Z_3$ için S_t kümelerini belirleyelim.

$$S_t = \begin{cases} S, \ t \in P_0' \\ \{Z_3, Z_5, Z_6\}, \ t \in P_1' \\ \{Z_3, Z_4, Z_6\}, \ t \in P_2' \\ \{Z_3, Z_4, Z_5\}, \ t \in P_3'. \end{cases}$$

Bu durumda $\wedge(S, S_t)$ kümesi

$$\wedge(S, S_t) = \begin{cases} \varnothing, \ \mathrm{t} \in \mathrm{P}_0' \\ \varnothing, \ \mathrm{t} \in \mathrm{P}_1' \\ \varnothing, \ \mathrm{t} \in \mathrm{P}_2' \\ \varnothing, \ \mathrm{t} \in \mathrm{P}_3' \end{cases}$$

olarak bulunur. P_1', P_2' ve P_3' kümeleri boş kümeden farklı olduğundan $t \in P_1'$, $t \in P_2'$ ve $t \in P_3'$ için $\varnothing = \wedge(S, S_t) \notin S$ olur. Tanım 1.1.9 dan dolayı $S = \{Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}$ X -alt yarılatisi XI -alt yarılatis değildir. Benzer adımlar diyagramı Şekil 7 de 22. diyagramdan 35. diyagrama kadar olan D nin her bir X -alt yarılatisleri için uygulanırsa XI -alt yarılatis olmadıkları görülür.■

Teorem 2.4 $D = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ tam X -yarılatisi XI -yarılatis değildir.

İspat: $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ve P_8 kümeleri X in ikişer ikişer ayrık alt kümeleri ve $\breve{D} = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8$ olduğundan $t \in \breve{D}$ ise t, P_i $(i = \{0,1,...,8\})$ kümelerinden yalnızca birinin elemanı olur. O halde (2.2) eşitliğinden

$t \in P_0$ ise $D_t = D$,
$t \in P_1$ ise $D_t = \{Z_2, \breve{D}\}$,
$t \in P_2$ ise $D_t = \{Z_1, \breve{D}\}$,
$t \in P_3$ ise $D_t = \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}$,
$t \in P_4$ ise $D_t = \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$,

$t \in P_5$ ise $D_t = \{Z_6, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$,

$t \in P_6$ ise $D_t = \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$,

$t \in P_7$ ise $D_t = \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$,

$t \in P_8$ ise $D_t = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$

olarak bulunur. Buradan her bir D_t kümesinin alt sınırlarının kümesi

$t \in P_0$ ise $\mathrm{N}(D, D_t) = \varnothing$,

$t \in P_1$ ise $\mathrm{N}(D, D_t) = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}$,

$t \in P_2$ ise $\mathrm{N}(D, D_t) = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}$,

$t \in P_3$ ise $\mathrm{N}(D, D_t) = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3\}$,

$t \in P_4$ ise $\mathrm{N}(D, D_t) = \{Z_8\}$,

$t \in P_5$ ise $\mathrm{N}(D, D_t) = \varnothing$,

$t \in P_6$ ise $\mathrm{N}(D, D_t) = \{Z_7\}$,

$t \in P_7$ ise $\mathrm{N}(D, D_t) = \varnothing$,

$t \in P_8$ ise $\mathrm{N}(D, D_t) = \varnothing$

olarak elde edilir. Bu kümelerden faydalanarak D_t kümelerinin alt sınırlarının en büyüğü

$t \in P_0$ ise $\wedge(D, D_t) = \varnothing$,

$t \in P_1$ ise $\wedge(D, D_t) = Z_2$,

$t \in P_2$ ise $\wedge(D, D_t) = Z_1$,

$t \in P_3$ ise $\wedge(D, D_t) = Z_3$,

$t \in P_4$ ise $\wedge(D, D_t) = Z_8$,

$t \in P_5$ ise $\wedge(D, D_t) = \varnothing$,

$t \in P_6$ ise $\wedge(D, D_t) = Z_7$,

$t \in P_7$ ise $\wedge(D, D_t) = \varnothing$,

$t \in P_8$ ise $\wedge(D, D_t) = \varnothing$

olarak bulunur. P_5 boş kümeden farklı olduğundan en az bir $t \in P_5$ vardır. Bu durumda $\wedge(D, D_t) \notin D$ olduğundan Tanım 1.1.9 dan D tam X -yarılatisi XI -yarılatis değildir. ■

Lemma 2.5 Diyagramı Şekil 7 de verilen 1. diyagramdan 10. diyagrama kadar olanlardan herhangi biri biçiminde olan D nin X -alt yarılatisi XI - alt yarılatis olur.

İspat: Teorem 1.1.47 den diyagramı Şekil 7 de verilen 1 den 5 e kadar olan D nin tam X -alt yarılatisleri D nin XI - alt yarılatisleri olur.

Teorem 1.1.49 kullanılarak diyagramı Şekil 7 de 6 dan 10 a kadar olan D nin tam X -alt yarılatislerinin XI - alt yarılatisler olduğu görülür.■

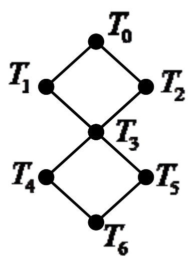
Şimdi D nin tam X -alt yarılatislerinden diyagramı Şekil 7-11 deki gibi olanların XI -alt yarılatis olma durumunu inceleyelim.

Teorem 2.6 D nin $Q=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\}$ tam X -alt yarılatisinin elemanları

$$\begin{aligned}&T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\ &T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\ &T_2 \cup T_1 = T_0,\ T_5 \cup T_4 = T_3,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\\ &T_4 \setminus T_5 \neq \varnothing,\ T_5 \setminus T_4 \neq \varnothing\end{aligned} \tag{2.4}$$

koşullarını sağlasın. O halde Q, XI -alt yarılatisdir.

İspat: $Q=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\}$ teoremde verilen koşulları sağlayan tam X -alt yarılatisi olsun. Bu durumda Q nun diyagramı Şekil 8 deki gibidir.



Şekil 8. Elemanları (2.4) koşullarını sağlayan $Q=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\}$ nun diyagramı.

P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ve P_6 kümeleri T_0 in ikişer ikişer ayrık alt kümeleri olmak üzere Teorem 1.1.37 ve Teorem 1.1.38 den Q nun karakteristik kümeler ailesi $C(Q)=\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\}$ ve karakteristik dönüşümü olan

$$\varphi=\begin{pmatrix} T_0 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{pmatrix}$$

teklikle belirlidir. φ dönüşümünden faydalanarak her $Z \in Q$ için

$$\bar{Z} = P_0 \cup \bigcup_{T \in \hat{Q}(Z)} \varphi(T)$$

formal birleşimi tanımlanabilir. Bu şekildeki formal birleşimlerin kümesi D' ile gösterilecek olursa Lemma 1.1.39 den dolayı Q ile D' tam izomorf olur. O halde Q nun her bir elemanı formal birleşimlerle tanımlanabilir. Böylece Q nun her bir elemanı için aşağıdaki formal eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
T_0 &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6, \\
T_1 &= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6, \\
T_2 &= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6, \\
T_3 &= P_0 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6, \\
T_4 &= P_0 \cup P_5 \cup P_6, \\
T_5 &= P_0 \cup P_4 \cup P_6, \\
T_6 &= P_0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Ayrıca Teorem 1.1.44 den dolayı Q nun temel kaynak elemanları P_1, P_2, P_4 ve P_5 kümeleridir ve boş kümeden farklıdırlar. Teorem 1.1.45 den P_0, P_3 ve P_6 kümeleri Q nun yardımcı kaynak elemanlarıdır ve boş küme olabilirler.

P_i, $(i = 0,1,2,...,6)$ kümeleri ikişer ikişer ayrık olduklarından $t \in T_0$ ise t, P_i kümelerinden yalnızca bir tanesinin elemanı olur. (2.5) eşitliğinden faydalanılarak

$$Q_t = \begin{cases}
Q, & t \in P_0, \\
\{T_0, T_2\}, & t \in P_1, \\
\{T_0, T_1\}, & t \in P_2, \\
\{T_0, T_1, T_2\}, & t \in P_3, \\
\{T_0, T_1, T_2, T_3, T_5\}, & t \in P_4, \\
\{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4\}, & t \in P_5, \\
\{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}, & t \in P_6.
\end{cases} \tag{2.6}$$

kümeleri bulunur. Ayrıca (2.6) eşitliği kullanılarak her bir Q_t kümesinin Q içindeki alt sınırlarının kümesi

$$N\left(Q,Q_t\right)=\begin{cases}\{T_6\}, & t\in P_0,\\ \{T_2,T_3,T_4,T_5,T_6\}, & t\in P_1,\\ \{T_1,T_3,T_4,T_5,T_6\}, & t\in P_2,\\ \{T_3,T_4,T_5,T_6\}, & t\in P_3,\\ \{T_5,T_6\}, & t\in P_4,\\ \{T_4,T_6\}, & t\in P_5,\\ \{T_6\}, & t\in P_6\end{cases} \tag{2.7}$$

olarak bulunur. (2.7) eşitliğinden faydalanılarak her bir Q_t kümesinin alt sınırlarının en büyüğü

$$\wedge\left(Q,Q_t\right)=\begin{cases}T_6, & t\in P_0,\\ T_2, & t\in P_1,\\ T_1, & t\in P_2,\\ T_3, & t\in P_3,\\ T_5, & t\in P_4,\\ T_4, & t\in P_5,\\ T_6, & t\in P_6\end{cases} \tag{2.8}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak her $t\in T_0$ için $\wedge\left(Q,Q_t\right)\in Q$ olur.

Ayrıca (2.5) ve (2.8) eşitliksizleri kullanılarak

$$t\in T_0=P_0\cup P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4\cup P_5\cup P_6\Rightarrow\wedge\left(Q,Q_t\right)=\{T_0,T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6\}$$
$$\Rightarrow\bigcup_{t\in T_0}\wedge\left(Q,Q_t\right)=T_0,$$

$$t\in T_1=P_0\cup P_2\cup P_3\cup P_4\cup P_5\cup P_6\Rightarrow\wedge\left(Q,Q_t\right)=\{T_1,T_3,T_4,T_5,T_6\}$$
$$\Rightarrow\bigcup_{t\in T_1}\wedge\left(Q,Q_t\right)=T_1,$$

$$t\in T_2=P_0\cup P_1\cup P_3\cup P_4\cup P_5\cup P_6\Rightarrow\wedge\left(Q,Q_t\right)=\{T_2,T_3,T_4,T_5,T_6\}$$
$$\Rightarrow\bigcup_{t\in T_2}\wedge\left(Q,Q_t\right)=T_2,$$

$$t\in T_3=P_0\cup P_4\cup P_5\cup P_6\Rightarrow\wedge\left(Q,Q_t\right)=\{T_4,T_5,T_6\}$$
$$\Rightarrow\bigcup_{t\in T_3}\wedge\left(Q,Q_t\right)=T_4\cup T_5\cup T_6=T_3,$$

$$t\in T_4=P_0\cup P_5\cup P_6\Rightarrow\wedge\left(Q,Q_t\right)=\{T_4,T_6\}\Rightarrow\bigcup_{t\in T_4}\wedge\left(Q,Q_t\right)=T_4,$$

$$t \in T_5 = P_0 \cup P_4 \cup P_6 \Rightarrow \wedge\left(Q, Q_t\right) = \{T_5, T_6\} \Rightarrow \bigcup_{t \in T_5} \wedge\left(Q, Q_t\right) = T_5,$$

$$t \in T_6 = P_0 \Rightarrow \wedge\left(Q, Q_t\right) = \{T_6\} \Rightarrow \bigcup_{t \in T_6} \wedge\left(Q, Q_t\right) = T_6$$

elde edilir. O halde Tanım 1.1.9 dan Q tam $XI-$yarılatisdir.■

Sonuç 2.7 D nin tam X -alt yarılatislerinden diyagramı Şekil 7-11 deki gibi olanların hepsi XI - alt yarılatisdir.

İspat: D nin tam X -alt yarılatislerinden diyagramı Şekil 7-11 deki gibi olanların XI -alt yarılatis olduğu Teorem 2.6 dan görülmektedir.■

D nin tam X -alt yarılatislerinden diyagramı Şekil 7 de verilen 12 den 16 ya kadar olanların XI - alt yarılatis olması için gerekli koşulları belirleyelim.

Lemma 2.8 Diyagramı Şekil 7 de verilen 12. diyagramdan 16. diyagrama kadar olanlardan herhangi biri biçiminde olan D nin X -alt yarılatisinin XI - alt yarılatis olması için gerek ve yeter koşul minimal elemanlarının ara kesitlerinin boş küme olmasıdır.

İspat: D nin tam X -alt yarılatislerinden diyagramı Şekil 7 de verilen 12 den 15 e kadar olanlar için Teorem 1.1.48 uygulandığında bunların XI - alt yarılatis olması için gerek ve yeter koşulun minimal elemanlarının ara kesitlerinin boş küme olması gerektiği açıktır.

Teorem 1.1.51 den D nin tam X -alt yarılatislerinden diyagramı Şekil 7 de verilen 16 daki gibi olanların XI - alt yarılatis olması için gerek ve yeter koşulun minimal elemanlarının ara kesitlerinin boş küme olması gerektiği açıktır.■

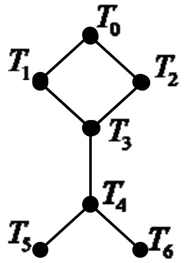
Şimdi D nin tam X -alt yarılatislerinden diyagramı Şekil 7-17 deki gibi olanların XI - alt yarılatis olma durumunu inceleyelim.

Teorem 2.9 D nin $Q = \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\}$ tam X -alt yarılatisinin elemanları

$$\begin{aligned} &T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\ &T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\ &T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_5 \setminus T_6 \neq \varnothing,\ T_6 \setminus T_5 \neq \varnothing,\\ &T_2 \cup T_1 = T_0,\ T_5 \cup T_6 = T_4 \end{aligned} \tag{2.9}$$

koşullarını sağlasın. O zaman Q, XI-alt yarılatis olması için gerek ve yeter koşul $T_6 \cap T_5 = \varnothing$ olmasıdır.

İspat: Q, teoremde verilen koşulları sağlayan tam X -alt yarılatis olsun. Bu durumda Q nun diyagramı Şekil 9 daki gibidir.



Şekil 9. Elemanları (2.9) koşullarını sağlayan $Q=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\}$ nun diyagramı.

Ayrıca $\breve{Q}=T_0$ dır. $C(Q)=\{P_i \mid i=0,1,...,6\}$ karakteristik kümeler ailesinden ve $\varphi(T_i)=P_i$ her $T_i \in Q$, karakteristik dönüşümden yararlanılarak

$$
\begin{aligned}
&T_0 = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6,\\
&T_1 = P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6,\\
&T_2 = P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6,\\
&T_3 = P_0 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6,\\
&T_4 = P_0 \cup P_5 \cup P_{67},\\
&T_5 = P_0 \cup P_6,\\
&T_6 = P_0 \cup P_5
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

formal eşitlikler yazılabilir. Teorem 1.1.44 den P_1, P_2, P_4, P_5 ve P_6 kümeleri Q nun temel kaynak elemanları, Teorem 1.1.45 den P_3, Q nun yardımcı kaynak elemanıdır. Ayrıca P_0 da Tanım 1.1.42 den Q nun yardımcı kaynak elemanıdır. O halde (2.10) eşitliğinde yer alan formal birleşimlerin her birinde Q nun temel kaynak elemanlarından en az bir tanesi bulunduğundan Q nun bütün elemanları boş kümeden farklıdır.

Şimdi (2.10) eşitliğinden $t \in T_0$ için $Q_t=\{Z \in Q \mid t \in Z\}$ ve $\wedge(Q,Q_t)$ kümelerini bulalım.

$$\begin{aligned}
&t \in P_0, \quad Q_t = Q && \Rightarrow \quad \wedge(Q, Q_t) = \varnothing \notin Q,\\
&t \in P_1, \quad Q_t = \{T_2, T_0\} && \Rightarrow \quad \wedge(Q, Q_t) = T_2,\\
&t \in P_2, \quad Q_t = \{T_1, T_0\} && \Rightarrow \quad \wedge(Q, Q_t) = T_1,\\
&t \in P_3, \quad Q_t = \{T_2, T_1, T_0\} && \Rightarrow \quad \wedge(Q, Q_t) = T_3,\\
&t \in P_4, \quad Q_t = \{T_3, T_2, T_1, T_0\} && \Rightarrow \quad \wedge(Q, Q_t) = T_3,\\
&t \in P_5, \quad Q_t = \{T_6, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\} && \Rightarrow \quad \wedge(Q, Q_t) = T_6,\\
&t \in P_6, \quad Q_t = \{T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\} && \Rightarrow \quad \wedge(Q, Q_t) = T_5.
\end{aligned}$$

Q, $XI-$yarılatis olsun. Bu durumda $t \in P_0$ ise $\wedge(Q, Q_t) \notin Q$ olur. Bu ise Q nun $XI-$yarılatis olması ile çelişir. O halde $P_0 = \varnothing$ olur. (2.10) eşitliğinden $T_6 \cap T_5 = P_0$ olduğundan $T_6 \cap T_5 = \varnothing$ bulunur.

Tersine $T_6 \cap T_5 = \varnothing$ olsun. Dolayısıyla $P_0 = \varnothing$ olur. Bu durumda her $t \in T_0$ için $\wedge(Q, Q_t) \in Q$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
t \in T_0 = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 &\Rightarrow \wedge(Q, Q_t) = \{T_1, T_2, T_3, T_5, T_6\}\\
&\Rightarrow \bigcup_{t \in T_0} \wedge(Q, Q_t) = T_1 \cup T_2 = T_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t \in T_1 = P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 &\Rightarrow \wedge(Q, Q_t) = \{T_1, T_3, T_5, T_6\}\\
&\Rightarrow \bigcup_{t \in T_1} \wedge(Q, Q_t) = T_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t \in T_2 = P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 &\Rightarrow \wedge(Q, Q_t) = \{T_2, T_3, T_5, T_6\}\\
&\Rightarrow \bigcup_{t \in T_2} \wedge(Q, Q_t) = T_2,
\end{aligned}$$

$$t \in T_3 = P_0 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \Rightarrow \wedge(Q, Q_t) = \{T_3, T_5, T_6\} \Rightarrow \bigcup_{t \in T_3} \wedge(Q, Q_t) = T_3,$$

$$T_4 = P_0 \cup P_5 \cup P_6 \Rightarrow \wedge(Q, Q_t) = \{T_5, T_6\} \Rightarrow \bigcup_{t \in T_4} \wedge(Q, Q_t) = T_5 \cup T_6 = T_4,$$

$$t \in T_5 = P_0 \cup P_6 \Rightarrow \wedge(Q, Q_t) = \{T_5\} \Rightarrow \bigcup_{t \in T_5} \wedge(Q, Q_t) = T_5,$$

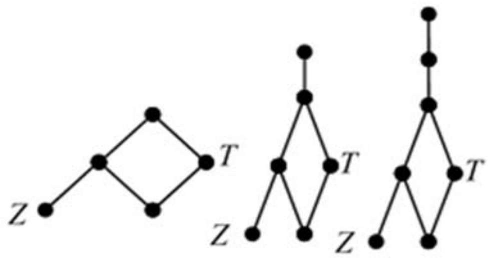
$$t \in T_6 = P_0 \cup P_5 \Rightarrow \wedge(Q, Q_t) = \{T_6\} \Rightarrow \bigcup_{t \in T_6} \wedge(Q, Q_t) = T_6$$

bulunur. O halde Tanım 1.1.9 den Q, $XI-$yarılatis olur.■

Sonuç 2.10 D nin $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ tam X -alt yarılatisinin $XI-$alt yarılatis olması için gerek ve yeter koşul $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$ olmasıdır.

İspat: Teorem 2.9 dan $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ nin $XI-$alt yarılatisi olması için gerek ve yeter koşulun $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$ olması gerektiği elde edilir.■

Şimdi diyagramı Şekil 7 de verilen 18. diyagramdan 20. diyagrama kadar olan diyagramlardan biri gibi olan D nin tam X -alt yarılatislerinin $XI-$alt yarılatis olması için gereken koşulları belirleyelim. Koşulları daha kolay ifade edebilmek için diyagramı Şekil 7 de verilen 18 den 20 ye kadar olanların diyagramlarını aşağıdaki gibi çizelim.



Şekil 10. D nin bazı XI -alt yarılatislerinin diyagramları.

Lemma 2.11 Diyagramı Şekil 10 daki diyagramlardan biri gibi olan D nin tam X -alt yarılatislerinin $XI-$alt yarılatisi olması için gerek ve yeter koşul $Z \cap T = \varnothing$ olmasıdır.

İspat: Teorem 1.1.50 den diyagramı Şekil 10 daki diyagramlardan biri gibi olan D nin tam X -alt yarılatislerinin XI -alt yarılatisi olması için gerek ve yeter koşulun $Z \cap T = \varnothing$ olduğu elde edilir.■

O halde $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_8 \cap Z_5 = \varnothing$ olduğunda Lemma 2.2 de 18 den 20 ye kadar verilen D nin tam X -alt yarılatislerinin hepsi XI -alt yarılatis olur.

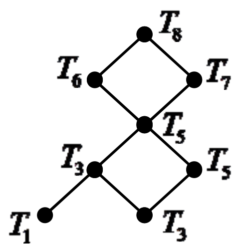
Şimdi D nin tam X -alt yarılatislerinden diyagramı Şekil 7-21 deki gibi olanların XI - alt yarılatis olması için gereken koşulları belirleyelim.

Teorem 2.12 $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ D nin tam X -alt yarılatisi olsun ve Q nun elemanları

$$\begin{aligned}
&T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8,\ T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_7 \subset T_8,\\
&T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8,\ T_2 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_7 \subset T_8,\\
&T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset T_7 \subset T_8,\ T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8\\
&T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_4 \setminus T_3 \neq \varnothing,\\
&T_3 \setminus T_4 \neq \varnothing,\ T_6 \setminus T_7 \neq \varnothing,\ T_7 \setminus T_6 \neq \varnothing,\\
&T_2 \cup T_1 = T_3,\ T_4 \cup T_3 = T_5,\ T_6 \cup T_7 = T_8
\end{aligned} \tag{2.11}$$

koşullarını sağlasın Q nun tam XI -alt yarılatis olması için gerek ve yeter koşul $T_4 \cap T_1 = \varnothing$ olmasıdır.

İspat: $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ tam X -alt yarılatis olsun. Bu durumda Q nun diyagramı Şekil 11 deki gibidir.



Şekil 11

Şekil 11. Elemanları (2.11) koşullarını sağlayan $Q = \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\}$ nun diyagramı.

$C(Q) = \{P_i \mid i = 1, 2, ..., 8\}$ karakteristik kümeler ailesi ve her $T_i \in Q$ için $\varphi(T_i) = P_i$ şeklinde olan φ karakteristik dönüşümden yararlanarak aşağıdaki formal eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
&T_8 = P_8 \cup P_7 \cup P_6 \cup P_5 \cup P_4 \cup P_3 \cup P_2 \cup P_1 &&, T_4 = P_8 \cup P_3 \cup P_2 \cup P_1,\\
&T_7 = P_8 \cup P_6 \cup P_5 \cup P_4 \cup P_3 \cup P_2 \cup P_1 &&, T_3 = P_8 \cup P_4 \cup P_2 \cup P_1,\\
&T_6 = P_8 \cup P_7 \cup P_5 \cup P_4 \cup P_3 \cup P_2 \cup P_1 &&, T_2 = P_8 \cup P_1,\\
&T_5 = P_8 \cup P_4 \cup P_3 \cup P_2 \cup P_1 &&, T_1 = P_8 \cup P_4 \cup P_2.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Teorem 1.1.44 den P_1, P_3, P_4, P_6 ve P_7 kümeleri Q nun temel kaynak elemanları ve Teorem 1.1.45 den P_2 ve P_5 kümeleri Q nun yardımcı kaynak elemanları olur. Ayrıca

$\breve{Q} = T_8$ olduğundan $\varphi(T_8) = P_8$, Q nun yardımcı kaynak elemanıdır. O halde (2.12) eşitliğinde verilen formal birleşimlerde Q nun temel kaynak elemanlarından en az bir tanesi bulunduğundan Q nun elemanları boş kümeden farklıdır.

Şimdi $t \in T_8$ için $Q_t = \{Z \in Q \mid t \in Z\}$ kümelerini bulalım. $T_8 = P_8 \cup P_7 \cup P_6 \cup P_5 \cup P_4 \cup P_3 \cup P_2 \cup P_1$ ve P_i kümeleri ikişer ikişer ayrık olduğundan $t \in T_8$ ise t, P_i kümelerinden sadece bir tanesinin elemanıdır. O halde

$t \in P_8$ ise $Q_t = Q$, $t \in P_4$ ise $Q_t = Q \setminus \ddot{Q}_{T_4} = \{T_8, T_7, T_6, T_5, T_3, T_1\}$,

$t \in P_7$ ise $Q_t = Q \setminus \ddot{Q}_{T_7} = \{T_8, T_6\}$, $t \in P_3$ ise $Q_t = Q \setminus \ddot{Q}_{T_3} = \{T_8, T_7, T_6, T_5, T_4\}$,

$t \in P_6$ ise $Q_t = Q \setminus \ddot{Q}_{T_6} = \{T_8, T_7\}$, $t \in P_2$ ise $Q_t = Q \setminus \ddot{Q}_{T_2} = \{T_8, T_7, T_6, T_5, T_4, T_3, T_1\}$,

$t \in P_5$ ise $Q_t = Q \setminus \ddot{Q}_{T_5} = \{T_8, T_7, T_6\}$, $t \in P_1$ ise $Q_t = Q \setminus \ddot{Q}_{T_1} = \{T_8, T_7, T_6, T_5, T_4, T_3, T_2\}$

olarak bulunur.

Buradan $\wedge(Q, Q_t)$ kümeleri

$$\wedge(Q, Q_t) = \begin{cases} \varnothing, & t \in P_8, \\ T_6, & t \in P_7, \\ T_7, & t \in P_6, \\ T_5, & t \in P_5, \\ T_1, & t \in P_4, \\ T_4, & t \in P_3, \\ \varnothing, & t \in P_2, \\ T_2, & t \in P_1 \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Q XI-alt yarılatis olsun. Eğer $t \in P_8 \cup P_2$ ise $\wedge(Q, Q_t) \notin Q$ olur. Bu da Tanım 1.1.9 dan Q nun XI-yarılatis olması ile çelişir. O halde $P_8 \cup P_2 = \varnothing$ olmalıdır. Sonuç olarak (2.6) eşitliğinden $P_8 \cup P_2 = T_4 \cap T_1 = \varnothing$ olarak elde edilir.

Tersine $T_4 \cap T_1 = \varnothing$ olsun. (2.6) eşitliğinden $P_8 \cup P_2 = T_4 \cap T_1 = \varnothing$ olur. Bu da $P_8 = P_2 = \varnothing$ olmasını gerektirir. Buradan her $t \in T_8$ için $\wedge(Q, Q_t) \in Q$ sağlanır. Ayrıca her $T_i \in Q$ $(i \in \{1, 2, ..., 8\})$ elemanının, $t \in T_i$ olmak üzere $\wedge(Q, Q_t)$ kümelerinin birleşimi olarak yazılabildiği açıktır. Sonuç olarak Tanım 1.1.9 dan Q XI-alt yarılatisdir.■

O halde $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_8 \cap Z_5 = \varnothing$ ise Lemma 2.2-21 de verilen X -alt yarılatislerin tamamı XI -alt yarılatis olur.

Şimdi D nin tam X -alt yarılatislerinin hangi koşullar altında tam XI -alt yarılatisler olduğunu belirleyelim. P_1, P_2, P_4, P_5 ve P_6 kümeleri D nin temel kaynak elemanları olduğundan her zaman boş kümeden farklı olurlar. O halde

$$
\begin{aligned}
&Z_8 \cap Z_7 = P_0 \\
&Z_8 \cap Z_4 = P_0 \cup P_7 \\
&Z_6 \cap Z_4 = P_0 \cup P_5 \cup P_7 \cup P_8 \neq \varnothing, \\
&Z_5 \cap Z_4 = P_0 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8 \neq \varnothing, \\
&Z_7 \cap Z_6 = P_0 \cup P_8 \\
&Z_6 \cap Z_5 = P_0 \cup P_4 \cup P_7 \cup P_8 \neq \varnothing, \\
&Z_8 \cap Z_5 = P_0 \cup P_4 \cup P_7 \neq \varnothing, \\
&Z_2 \cap Z_1 = P_0 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8 \neq \varnothing
\end{aligned}
$$

olur. O zaman aşağıda verilen koşullar altında D nin XI -alt yarılatisleri incelenmelidir.

1. $Z_8 \cap Z_7 \neq \varnothing$. Bu durumda $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ doğal olarak sağlanır.

2. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$.

3. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$.

4. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$.

5. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$.

BÖLÜM 3

İKİLİ BAĞINTILARIN TAM YARIGRUPLARININ İDEMPOTENT ELEMANLARI

Birleşimlerin tam X-yarılatisi D ye tam izomorf olan X-yarılatislerin sınıfı $\Sigma_2\left(X,9\right)$ olduğundan bu sınıftan alınan herhangi bir X-yarılatis ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrubunun idempotent elemanlarının yapısını $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanları yardımıyla karakterize edebiliriz. Dolayısıyla $\Sigma_2\left(X,9\right)$ sınıfının X-yarılatisleri ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgruplarının idempotent elemanlarının özelliklerini belirlemek yerine $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanlarının özelliklerini belirlemek yeterlidir.

Teorem 1.1.15 den D nin her bir D' XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(D'\right)$ yarıgrubunun bir ε sağ birim elemanı vardır. Üstelik Teorem 1.1.13 den ε idempotent olup $V\left(D',\varepsilon\right)=D'$ koşulunu sağlar. Ayrıca $D'\in Q_i\vartheta_{XI}$ olacak şekilde $Q_i\in\Sigma'_{XI}\left(D\right)$ vardır. Dolayısıyla Teorem 1.1.33 den dolayı $B_X\left(D'\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi olan $E_X^{(r)}\left(D'\right)$ ve $B_X\left(D\right)$ nin her $D'\in Q_i\vartheta_{XI}$ için $V\left(D',\varepsilon\right)=D'$ koşulunu sağlayan ε idempotent elemanlarının kümesi $I^*\left(Q_i\right)$ olmak üzere

$$I^*\left(Q_i\right)=\bigcup_{D'\in Q_i\vartheta_{XI}} E_X^{(r)}\left(D'\right)$$

olur. O halde X sonlu iken

$$\left|I^*\left(Q_i\right)\right|=\sum_{D'\in Q_i\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$$

olarak bulunur. 2. Bölümde D nin XI-alt yarılatislerinin

1. $Z_8\cap Z_7\neq\varnothing$

2. $Z_8\cap Z_7=\varnothing,\ Z_8\cap Z_4\neq\varnothing$ ve $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$

3. $Z_8\cap Z_7=\varnothing,\ Z_8\cap Z_4=\varnothing$ ve $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$

4. $Z_8\cap Z_7=\varnothing,\ Z_8\cap Z_4\neq\varnothing$ ve $Z_7\cap Z_6=\varnothing$

5. $Z_8\cap Z_7=\varnothing,\ Z_8\cap Z_4=\varnothing$ ve $Z_7\cap Z_6=\varnothing$

koşulları altında farklı olduğu gösterildi. Dolayısıyla her bir koşul altında $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanlarının yapısı ayrı ayrı incelenmelidir.

3.1. $Z_8 \cap Z_7 \neq \varnothing$ Koşulu Altında İdempotent Elemanlar

Bu bölümde birleşimlerin tam X-yarılatisi D ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X(D)$ nin,

$$Z_8 \cap Z_7 \neq \varnothing$$

koşulu altında idempotent elemanlarının özellikleri ve X sonlu bir küme iken $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısı bulunacaktır.

Şimdi D nin tam XI-alt yarılatislerini bulalım.

Lemma 3.1.1 $Z_8 \cap Z_7 \neq \varnothing$ olsun. O zaman aşağıda verilen D nin tam X-alt yarılatisleri XI-alt yarılatis olurlar.

1) $\{Z_8\}$, $\{Z_7\}$, $\{Z_6\}$, $\{Z_5\}$, $\{Z_4\}$, $\{Z_3\}$, $\{Z_2\}$, $\{Z_1\}$, $\{\breve{D}\}$ (Diyagram 1, Şekil 7);

2) $\{Z_3,Z_1\}$, $\{Z_3,Z_2\}$, $\{Z_4,Z_1\}$, $\{Z_4,Z_2\}$, $\{Z_4,Z_3\}$, $\{Z_5,Z_1\}$, $\{Z_5,Z_2\}$, $\{Z_5,Z_3\}$, $\{Z_6,Z_1\}$, $\{Z_6,Z_2\}$, $\{Z_6,Z_3\}$, $\{Z_7,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_3\}$, $\{Z_7,Z_4\}$, $\{Z_7,Z_5\}$, $\{Z_8,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_3\}$, $\{Z_8,Z_5\}$, $\{Z_8,Z_6\}$, $\{Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_4,\breve{D}\}$, $\{Z_5,\breve{D}\}$, $\{Z_6,\breve{D}\}$, $\{Z_7,\breve{D}\}$, $\{Z_8,\breve{D}\}$ (Diyagram 2, Şekil 7);

3) $\{Z_4,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_4,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_5,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_5,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_6,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_6,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_3\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_3\}$, $\{Z_8,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_3\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_3\}$, $\{Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_6,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_4,\breve{D}\}$, $\{Z_7,Z_5,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_5,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_6,\breve{D}\}$ (Diyagram 3, Şekil 7);

4) $\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$,

$\{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_4, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_5, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_5, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_5, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_3, \breve{D}\}$ (Diyagram 4, Şekil 7);

5) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$ (Diyagram 5, Şekil 7);

6) $\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3\}$, $\{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3\}$ (Diyagram 6, Şekil 7);

7) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$ (Diyagram 7, Şekil 7);

8) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$ (Diyagram 8, Şekil 7);

9) $\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (Diyagram 9, Şekil 7);

10) $\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (Diyagram 10, Şekil 7);

11) $\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (Diyagram 11, Şekil 7);

İspat: Lemma 2.5 den 1 den 10 a kadar verilen D nin tam X -alt yarılatislerinin XI -alt yarılatis oldukları görülür. Sonuç 2.7 den dolayı Lemma 3.1.1 de 11 de verilen D nin tam X -alt yarılatislerinin XI -alt yarılatis oldukları açıktır.■

Teorem 3.1.2 $Q=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\}$, D nin XI-alt yarılatisi olsun ve Q nun elemanları

$$\begin{aligned}&T_6\subset T_4\subset T_3\subset T_1\subset T_0,\ T_6\subset T_4\subset T_3\subset T_2\subset T_0,\\&T_6\subset T_5\subset T_3\subset T_1\subset T_0,\ T_6\subset T_5\subset T_3\subset T_2\subset T_0,\\&T_2\cup T_1=T_0,\ T_5\cup T_4=T_3,\ T_1\setminus T_2\neq\varnothing,\ T_2\setminus T_1\neq\varnothing,\\&T_4\setminus T_5\neq\varnothing,\ T_5\setminus T_4\neq\varnothing\end{aligned}$$

koşullarını sağlasın. Üstelik bir $\alpha\in B_X(Q)$ ikili bağıntısı için $V(D,\alpha)=Q$ koşulu sağlansın ve α nın quasinormal gösterimi $\alpha=\bigcup_{i=0}^{6}(Y_i^\alpha\times T_i)$ biçiminde olsun. Bu durumda α $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır ancak ve ancak Q dan D nin bir D' alt yarılatisine bir φ tam α-izomorfizması

$$\begin{aligned}&Y_6^\alpha\supseteq\varphi(T_6),\ Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\supseteq\varphi(T_5),\ Y_6^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq\varphi(T_4),\\&Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\varphi(T_2),\\&Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(T_1),\\&Y_1^\alpha\cap\varphi(T_1)\neq\varnothing,\ Y_2^\alpha\cap\varphi(T_2)\neq\varnothing,\\&Y_4^\alpha\cap\varphi(T_4)\neq\varnothing,\ Y_5^\alpha\cap\varphi(T_5)\neq\varnothing\end{aligned}$$

koşullarını sağlar.

İspat: $V(D,\alpha)=Q$ olduğundan $V(D,\alpha)$, D nin XI-alt yarılatisi olur. Ayrıca $\varnothing\notin Q$ olduğundan, $V(D,\alpha)\setminus\{\varnothing\}=Q$ olur. $D(\alpha)=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1\}$ kümesi $V(D,\alpha)\setminus\{\varnothing\}$ kümesinin üretecidir. Buradan

$$\begin{aligned}&\ddot{D}(\alpha)_{T_1}=\{T_1,T_3,T_4,T_5,T_6\},\ \ddot{D}(\alpha)_{T_2}=\{T_2,T_3,T_4,T_5,T_6\},\\&\ddot{D}(\alpha)_{T_3}=\{T_3,T_4,T_5,T_6\},\ \ddot{D}(\alpha)_{T_4}=\{T_4,T_6\},\\&\ddot{D}(\alpha)_{T_5}=\{T_5,T_6\},\ \ddot{D}(\alpha)_{T_6}=\{T_6\}\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

olarak bulunur. Bu kümelerin nonlimit elemanlarını inceleyelim.

$$\begin{aligned}&T_1\setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_1},T_1\right)=T_1\setminus\left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_1}\setminus\{T_1\}\right)\right)=T_1\setminus T_3\neq\varnothing,\\&T_2\setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_2},T_2\right)=T_2\setminus\left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_2}\setminus\{T_2\}\right)\right)=T_2\setminus T_3\neq\varnothing,\\&T_3\setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_3},T_3\right)=T_3\setminus\left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_3}\setminus\{T_3\}\right)\right)=T_3\setminus T_3=\varnothing,\\&T_4\setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_4},T_4\right)=T_4\setminus\left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_4}\setminus\{T_4\}\right)\right)=T_4\setminus T_6\neq\varnothing,\end{aligned}$$

$$T_5 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_5}, T_5\right) = T_5 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_5} \setminus \{T_5\}\right)\right) = T_5 \setminus T_6 \neq \varnothing,$$

$$T_6 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_6}, T_6\right) = T_6 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_6} \setminus \{T_6\}\right)\right) = T_6 \setminus \varnothing = T_6 \neq \varnothing,$$

olduğundan T_1, T_2, T_4, T_5, T_6 kümeleri sırasıyla $\ddot{D}(\alpha)_{T_1}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_2}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_4}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_5}$ ve $\ddot{D}(\alpha)_{T_6}$ kümelerinin nonlimit elemanı olurlar.

$(\Rightarrow)$**:** α, $B_X(D)$ nin regüler elemanı olsun. Teorem 1.1.20 den dolayı Q dan D nin bir D' alt yarılatisine, φ tam α-izomorfizması vardır. O zaman $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ olur. (3.1.1) eşitliği ve Teorem 1.1.20-(b) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&Y_6^\alpha \supseteq \varphi(T_6),\ Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \varphi(T_5),\ Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(T_4),\\
&Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(T_3),\\
&Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2),\\
&Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. φ tam α-izomorfizması olduğundan

$$Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha = \left(Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha\right) \cup \left(Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha\right) \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(T_5) \cup \varphi(T_4) = \varphi(T_3)$$

özelliği sağlanır.

T_1, T_2, T_4, T_5, T_6 kümeleri sırasıyla $\ddot{D}(\alpha)_{T_1}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_2}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_4}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_5}$ ve $\ddot{D}(\alpha)_{T_6}$ kümelerinin nonlimit elemanı olduğundan Teorem 1.1.20-(c) den $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \varnothing$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \varnothing$ ve $Y_6^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \varnothing$ elde edilir. Bununla birlikte $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(T_6)$ olduğundan $Y_6^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \varnothing$ sağlanır.

$(\Leftarrow)$**:** φ tam α-izomorfizması olsun. O zaman

$$\varphi(T_3) = \varphi(T_5) \cup \varphi(T_4) \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha$$

olarak bulunur. O halde her $T_k \in D(\alpha)$ için

$$\bigcup_{T' \in \ddot{D}(\alpha)_{T_k}} Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T_k)$$

kapsaması sağlanır. Dolayısıyla Teorem 1.1.20 nin (a) şıkkı sağlanmış oldu.

Ayrıca $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(T_6)$ olduğundan $Y_6^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \varnothing$ sağlanır. Dolayısıyla her $T_k \in \ddot{D}(\alpha)_{T_k}$ nonlimit elemanı için $Y_{T_k}^\alpha \cap \varphi(T_k) \neq \varnothing$ olur. O zaman Teorem 1.1.20 nin (b) şıkkı sağlanmış olur.

Bunun yanında $Y_6^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \varnothing$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \varnothing$, $\varphi(T_6) \subseteq \varphi(T_3)$, $\varphi(T_5) \subseteq \varphi(T_3)$ ve $\varphi(T_4) \subseteq \varphi(T_3)$ olduğundan $Y_6^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \varnothing$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \varnothing$ ve $Y_4^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \varnothing$ olur. O halde

$$B(T_3) = \left\{ Z \in \ddot{D}(\alpha)_{T_3} \mid Y_Z^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \varnothing \right\} = \{T_6, T_5, T_4\}$$

ve

$$\cup B(T_3) = T_6 \cup T_5 \cup T_4 = T_3$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $T_3 \in \ddot{D}(\alpha)_{T_3}$ limit elemanı için Teorem 1.1.20 nin (d) şıkkı sağlandı. O halde α, $B_X(D)$ nin regüler elemanı olur. Yani $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ olarak bulunur.■

Sonuç 3.1.3 D nin $Q = \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\}$ XI-alt yarılatisinin elemanları

$$T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,$$
$$T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,$$
$$T_2 \cup T_1 = T_0,\ T_5 \cup T_4 = T_3,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,$$
$$T_4 \setminus T_5 \neq \varnothing,\ T_5 \setminus T_4 \neq \varnothing$$

koşullarını sağlasın. Üstelik bir $\alpha \in B_X(Q)$ ikili bağıntısı için $V(Q,\alpha) = Q$ koşulu sağlansın ve α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{6} (Y_i^\alpha \times T_i)$ biçiminde olsun. Bu durumda α nın sağ birim eleman olması için gerekli ve yeterli koşul

$$Y_6^\alpha \supseteq T_6,\ Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq T_5,\ Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq T_4,$$
$$Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq T_2,$$
$$Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq T_1,$$
$$Y_1^\alpha \cap T_1 \neq \varnothing,\ Y_2^\alpha \cap T_2 \neq \varnothing,$$
$$Y_4^\alpha \cap T_4 \neq \varnothing,\ Y_5^\alpha \cap T_5 \neq \varnothing$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 3.1.2 de φ tam α-izomorfizması $V(D,\alpha)$ nın birim dönüşümü olarak alındığında Teorem 1.1.31 den dolayı $\alpha \in B_X(Q)$ elemanı idempotent olur. Ayrıca φ tam α-izomorfizması birim dönüşümken her $T \in Q$ için $\varphi(T)\alpha = T\alpha = T$ olduğundan $V(Q,\alpha) = Q$ olur. O halde Teorem 1.1.13 den $\alpha \in B_X(Q)$ sağ birim olur.■

Şimdi $B_X\left(D\right)$ yarıgrubunun elemanlarının idempotent olması için gereken koşulları belirleyelim.

Teorem 3.1.4 $D=\left\{ Z_8,\, Z_7,\, Z_6,\, Z_5,\, Z_4,\, Z_3,\, Z_2,\, Z_1,\, \breve{D} \right\}\in\Sigma_2\left(X,9\right)$ ve $Z_8\cap Z_7\neq\varnothing$ olsun. $\alpha\in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen biçimlerde quasinormal gösterimlerden birine sahip olması ve yanlarında verilen koşulları sağlamasıdır.

a) $\alpha=\left(X\times T\right),\; T\in D$,

b) $T,\, T'\in D$ ve $T\subset T'$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha\supseteq T$ ve $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

c) $T,\, T',\, T''\in D$ ve $T\subset T'\subset T''$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha\supseteq T,\; Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T',\; Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$ ve $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

d) $Z,\, Z',\, T,\, T'\in D$ ve $Z\subset Z'\subset T\subset T'$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times Z'\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha\supseteq Z$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z'$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T,\; Y_{Z'}^\alpha\cap Z'\neq\varnothing,\; Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

e) $Z,\, Z',\, T,\, T'\in D$ ve $Z\subset Z'\subset T\subset T'\subset\breve{D}$ olmak üzere α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times Z'\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha\supseteq Z$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z'$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_{Z'}^\alpha\cap Z'\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing,\; Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$ ve $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

f) $Z,\, Z',\, T,\, T'\in D$, $Z\subset T$, $Z\subset T'$, $T\setminus T'\neq\varnothing$ ve $T'\setminus T\neq\varnothing$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times\left(T\cup T'\right)\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

g) $Z, Z', T, T' \in D$, $Z \subset T$, $Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z'$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

h) $Z, Z', T, T' \in D, Z \subset T$, $Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z' \subset \breve{D}$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup$ $\left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

i) $Z, Z', T, T' \in D$, $Z \subset Z' \subset T$, $Z \subset Z' \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup$ $\left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

j) $T, T' \in D$ ve $T \subset T' \subset Z_3$ olmak üzere $\alpha \in B_X\left(D\right)$ nın quasinormal gösterimi

$$\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$$

biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

k) $Z, T, T' \in D$, $Z \subset T$, $Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' = Z_3$ olmak üzere $\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi

$$\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$$

biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı idempotent olsun. Bu durumda $B_X(D)$ kümesinin tanımından $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ olacak şekilde $f : X \to D$ dönüşümü vardır. Dolayısıyla her $x \in X$ için $f(x) \in \{ Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \}$ olur. O halde D nin bir D' tam X -alt yarılatisi için

$$\alpha = \bigcup_{T \in D'} \left(Y_T^\alpha \times T \right)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$V(D,\alpha) = D' = V(D',\alpha)$$

olur. Teorem 1.1.14 den $V(D,\alpha)$ nın D nin XI -alt yarılatisi olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla D', D nin XI -alt yarılatisi olur. Yani D', $Z_8 \cap Z_7 \neq \varnothing$ koşulu altında D nin Lemma 3.1.1 de verilen XI -alt yarılatislerini tarar. O halde α idempotent elemanını (a)-(k) da verilen quasinormal gösterimlerden birine sahiptir. Şimdi de α nın yanlarında verilen koşulları sağladığını gösterelim.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısınının quasinormal gösterimi (a) daki gibi ve $Q_1 = \{T\}$ olsun. Lemma 3.1.1 den dolayı Q_1, D nin XI -alt yarılatisidir. Ayrıca $V(Q_1,\alpha) = Q_1 = V(D,\alpha)$ olur. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ olacak şekilde $f : X \to D$ dönüşümü vardır. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_1$ olarak bulunur. Bu şekildeki f dönüşümü tek olduğundan $B_X(Q_1)$ in sadece tek elemanı vardır. $B_X(Q_1)$ kümesi bileşke işlemine kapalı olduğundan $\alpha \in B_X(Q_1)$ ikili bağıntısı hem sağ birim hem idempotent hem de regüler elemandır. Ayrıca $B_X(Q_1) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ yarıgrubunun da idempotent elemanıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (b) deki gibi olsun. $T,\ T' \in D$ ve $T \subset T'$ olmak üzere $Q_2 = \{T, T'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ olacak şekilde $f : X \to D$ dönüşümü vardır. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_2$ olur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_2)$ olur. Lemma 3.1.1 den Q_2, D nin XI -alt yarılatisi olur. Ayrıca $V(Q_2,\alpha) = Q_2 = V(D,\alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.53 den α nın $B_X(Q_2)$ nin sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^\alpha \supseteq T$ ve

$Y_{T'}^{\alpha} \cap T' \neq \varnothing$ koşulları sağlamasıdır. Üstelik α, hem $B_X(Q_2)$ nin sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_2)$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (c) deki gibi ve $T,\ T',\ T'' \in D$ ve $T \subset T' \subset T''$ olmak üzere $Q_3 = \{T, T', T''\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_3$ olur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_3)$ olur. Lemma 3.1.1 den Q_3, D nin XI-alt yarılatisi olur. Ayrıca $V(Q_3, \alpha) = Q_3 = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.53 den α nın $B_X(Q_3)$ nin sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul α nın $Y_T^{\alpha} \supseteq T,\ Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \supseteq T',\ Y_{T'}^{\alpha} \cap T' \neq \varnothing$ ve $Y_{T''}^{\alpha} \cap T'' \neq \varnothing$ koşulları sağlamasıdır. α, $B_X(Q_3)$ ün sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_3)$ ün hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (d) deki gibi ve $Z,\ Z',\ T,\ T' \in D$ ve $Z \subset Z' \subset T \subset T'$ olmak üzere $Q_4 = \{Z, Z', T, T'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_4$ olur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_4)$ olur. Lemma 3.1.1 den Q_4, D nin XI-alt yarılatisidir. Ayrıca $V(Q_4, \alpha) = Q_4 = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.53 den α nın $B_X(Q_4)$ ün sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^{\alpha} \supseteq Z$, $Y_Z^{\alpha} \cup Y_{Z'}^{\alpha} \supseteq Z'$, $Y_Z^{\alpha} \cup Y_{Z'}^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \supseteq T$, $Y_{Z'}^{\alpha} \cap Z' \neq \varnothing$, $Y_T^{\alpha} \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^{\alpha} \cap T' \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α $B_X(Q_4)$ ün sağ birim elemanı Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_4)$ ün hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (e) deki gibi ve $Z,\ Z',\ T,\ T' \in D$ ve $Z \subset Z' \subset T \subset T' \subset \breve{D}$ olmak üzere $Q_5 = \{Z, Z', T, T', \breve{D}\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_5$ olur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_5)$ olur. Lemma 3.1.1 den Q_5, D nin XI-alt yarılatisidir. Ayrıca $V(Q_5, \alpha) = Q_5 = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.53 den α nın $B_X(Q_5)$ in sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α $B_X(Q_5)$ in sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_5)$ in hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olarak bulunur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (f) deki gibi olsun. Z, Z', T, $T' \in D$, $Z \subset T$, $Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere $Q_6 = \{Z, T, T', T \cup T'\}$ ile gösterilirse Lemma 3.1.1 den dolayı Q_6, D nin XI-alt yarılatisidir.. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_6$ olur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_6)$ olur. Ayrıca $V(Q_6, \alpha) = Q_6 = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. Sonuç 1.1.61 den α nın $B_X(Q_6)$ nın sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_6)$ nın sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_6)$ nın hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (g) deki gibi ve $Z, Z', T, T' \in D$, $Z \subset T$, $Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z'$ olmak üzere $Q_7 = \{Z, T, T', T \cup T', Z'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_7$ olur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_7)$ olur. Lemma 3.1.1 den dolayı Q_7, D nin XI-alt yarılatisidir. Ayrıca $V(Q_7, \alpha) = Q_7 = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.61 α nın $B_X(Q_7)$ nin sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_7)$ nin sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_7)$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olarak bulunur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (h) daki gibi ve $Z,\ Z',\ T,\ T' \in D$, $Z \subset T$, $Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z' \subset \breve{D}$ olmak üzere $Q_8 = \{Z, T, T', T \cup T'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup\limits_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_8$ olur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_8)$ olur. Lemma 3.1.1 den dolayı Q_8, D nin XI-alt yarılatisidir. Ayrıca $V(Q_8, \alpha) = Q_8 = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.61 den α nın $B_X(Q_8)$ in sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α $B_X(Q_8)$ in sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α hem $B_X(Q_8)$ in hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (i) deki gibi ve $Z,\ Z',\ T,\ T' \in D$, $Z \subset Z' \subset T$, $Z \subset Z' \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere $Q_9 = \{Z, Z', T, T', T \cup T'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup\limits_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_9$ olur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_9)$ olur. Lemma 3.1.1 den dolayı Q_9, D nin XI-alt yarılatisidir. Ayrıca $V(Q_9, \alpha) = Q_9 = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.61 den α ikili bağıntısının $B_X(Q_9)$ yarı grubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$ koşullarının sağlanmasıdır. Üstelik den α nın $B_X(Q_9)$ un sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_9)$ un hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (j) deki gibi ve $T,\ T' \in D$ ve $T \subset T' \subset Z_3$ olmak üzere $Q_{10} = \{T, T', Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ olsun. Lemma 3.1.1 den dolayı Q_{10}, D nin XI-alt yarılatisidir. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup\limits_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için

$f(x) \in Q_{10}$ olur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{10})$ olur. Ayrıca $V(Q_{10}, \alpha) = Q_{10} = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.61 den α nın $B_X(Q_{10})$ un sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{10})$ un sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{10})$ un hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (k) deki gibi ve $Z, T, T' \in D$, $Z \subset T$, $Z \subset T'$, $T \backslash T' \neq \varnothing$, $T' \backslash T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' = Z_3$ olmak üzere $Q_{11} = \{Z, T, T', Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{11}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{11})$ olur. Lemma 3.1.1 den dolayı Q_{11}, D nin XI-alt yarılatisidir. Ayrıca $V(Q_{11}, \alpha) = Q_{11} = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 3.1.3 den α nın $B_X(Q_{11})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşulları sağlamasıdır. Üstelik α $B_X(Q_{11})$ in sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{11})$ in hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.■

Lemma 3.1.5 $Q = \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\}$, D nin XI-alt yarılatisi ve Q nun elemanları

$$\begin{aligned}
&T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\
&T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\
&T_2 \cup T_1 = T_0,\ T_5 \cup T_4 = T_3,\ T_1 \backslash T_2 \neq \varnothing,\ T_2 \backslash T_1 \neq \varnothing,\\
&T_4 \backslash T_5 \neq \varnothing,\ T_5 \backslash T_4 \neq \varnothing
\end{aligned}$$

koşullarını sağlasın. O zaman

$$\{T_4 \cap T_5, T_4 \backslash T_5, T_5 \backslash T_4, (T_1 \cap T_2) \backslash T_3, T_1 \backslash T_2, T_2 \backslash T_1, X \backslash T_0\}$$

kümesi X in parçalanışı olur.

İspat: (2.5) deki formal eşitliklerden

$$P_6=(T_4\cap T_5)\setminus T_6,\ P_5=T_4\setminus T_5,\ P_4=T_5\setminus T_4,$$
$$P_3=(T_1\cap T_2)\setminus T_3,\ P_2=T_1\setminus T_2,\ P_1=T_2\setminus T_1,\ P_0=T_6$$

olarak elde edilir. Ayrıca $C(Q)=\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\}$, Q nun karakteristik kümeler ailesi olduğundan P_i ler ikişer ikişer ayrık ve $\bigcup_{i=0}^{6}P_i=T_0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\{T_4\cap T_5,T_4\setminus T_5,T_5\setminus T_4,(T_1\cap T_2)\setminus T_3,T_1\setminus T_2,T_2\setminus T_1,X\setminus T_0\}$$

kümesi X in parçalanışı olur.■

Lemma 3.1.6 X sonlu bir küme, $Q=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\}$ kümesi D nin XI-alt yarılatisi olsun ve Q nun elemanları

$$T_6\subset T_4\subset T_3\subset T_1\subset T_0,\ T_6\subset T_4\subset T_3\subset T_2\subset T_0,$$
$$T_6\subset T_5\subset T_3\subset T_1\subset T_0,\ T_6\subset T_5\subset T_3\subset T_2\subset T_0,$$
$$T_2\cup T_1=T_0,\ T_5\cup T_4=T_3,T_1\setminus T_2\neq\varnothing,T_2\setminus T_1\neq\varnothing,$$
$$T_4\setminus T_5\neq\varnothing,T_5\setminus T_4\neq\varnothing.$$

koşullarını sağlasın. Ayrıca bir $f:X\to D$ dönüşümünün $\overline{T}_5\cap\overline{T}_4$, $\overline{T}_5\setminus\overline{T}_4$, $\overline{T}_4\setminus\overline{T}_5$, $(\overline{T}_2\cap\overline{T}_1)\setminus\overline{T}_3$, $\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1$, $\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2$ ve $X\setminus\overline{T}_0$ kümeleri üzerine kısıtlanışı aşağıdaki gibi olsun.

$$f_0:\overline{T}_5\cap\overline{T}_4\to\{T_6\},$$
$$f_1:\overline{T}_5\setminus\overline{T}_4\to\{T_6,T_5\}\text{ ve }\exists a\in\overline{T}_5\setminus\overline{T}_4\text{ için }f_1(a)=T_5,$$
$$f_2:\overline{T}_4\setminus\overline{T}_5\to\{T_6,T_4\}\text{ ve }\exists b\in\overline{T}_4\setminus\overline{T}_5\text{ için }f_2(a)=T_4,$$
$$f_3:(\overline{T}_2\cap\overline{T}_1)\setminus\overline{T}_3\to\{T_6,T_5,T_4,T_3\},$$
$$f_4:\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1\to\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2\}\text{ ve }\exists c\in\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1\text{ için }f_4(c)=T_2,$$
$$f_5:\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2\to\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_1\}\text{ ve }\exists d\in\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2\text{ için }f_5(d)=T_1,$$
$$f_6:X\setminus\overline{T}_0\to Q.$$

O zaman $f=(f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)$ ayrık dönüşümlerin sıralı sistemi olup bu şekildeki ayrık dönüşümlerin sıralı sistemlerinin kümesi F olmak üzere $|R_\varphi(Q,D')|=|\mathrm{F}|$ olur.

İspat: $\alpha\in R_\varphi(Q,D')$ olsun. Bu durumda $\alpha\in B_X(D)$ regüler ve $V(D,\alpha)=Q$ olur. Teorem 3.1.2 den dolayı Q dan D nin $D'=\{\varphi(T_0),\varphi(T_1),\varphi(T_2),\varphi(T_3),\varphi(T_4),\varphi(T_5),\varphi(T_6)\}$ alt yarılatisine bir φ tam α-izomorfizması

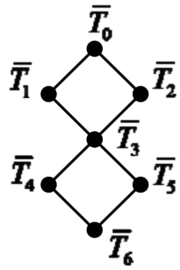
$$Y_6^\alpha \supseteq \varphi(T_6),\ Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \varphi(T_5),\ Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(T_4),$$
$$Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2),$$
$$Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1),$$
$$Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \varnothing,\ Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \varnothing,$$
$$Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \varnothing,\ Y_5^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \varnothing.$$

koşullarını sağlar. Ayrıca $i \in \{0,1,...,6\}$ için $\varphi(T_i)$ ler $\overline{T}_i$ ile gösterilirse

$D' = \{\overline{T}_0, \overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3, \overline{T}_4, \overline{T}_5, \overline{T}_6\}$ olur ve α regüler elemanı aşağıdaki koşulları sağlar.

$$Y_6^\alpha \supseteq \overline{T}_6,\ Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \overline{T}_5,\ Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \overline{T}_4,$$
$$Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \overline{T}_2,$$
$$Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \overline{T}_1,$$
$$Y_1^\alpha \cap \overline{T}_1 \neq \varnothing,\ Y_2^\alpha \cap \overline{T}_2 \neq \varnothing,$$
$$Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4 \neq \varnothing,\ Y_5^\alpha \cap \overline{T}_5 \neq \varnothing.$$

Q ve D' tam α-izomorf olduklarından D', XI-alt yarılatisinin diyagramı Şekil 12 deki gibidir.



Şekil 12. Elemanları (2.4) koşullarını sağlayan Q yarılatisine tam α-izomorf olan D' yarılatisinin diyagramı.

Ayrıca tam α-izomorfizm altında ayrık kümelerin görüntüsü ayrık ve $D' \subseteq D$ olduğundan $\{\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4,\ \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4,\ \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5,\ (\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1) \setminus \overline{T}_3,\ \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1,\ \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2,\ X \setminus \overline{T}_0\}$ kümesi de X in parçalanışıdır. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan α ikili bağıntısı bir $f_\alpha : X \to D$ dönüşümü ile tanımlıdır. f_α dönüşümünün $\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4$, $\overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4$, $\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5$, $(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1) \setminus \overline{T}_3$, $\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1$, $\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2$ ve $X \setminus \overline{T}_0$ kümeleri üzerine kısıtlanışı sırasıyla $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}$ ve $f_{6\alpha}$ olsun. Şimdi Y_i^α kümelerinden faydalanarak $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}$ ve $f_{6\alpha}$ dönüşümlerinin özelliklerini bulalım.

$t \in \overline{T}_5 \cap \overline{T}_4$ olsun. $\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4 \subseteq Y_6^\alpha$ olduğundan $t \in Y_6^\alpha$ olur. Dolayısıyla $t\alpha = T_6$ olur. O halde her $t \in \overline{T}_5 \cap \overline{T}_4$ için $f_{0\alpha}(t) = T_6$ bulunur.

$t \in \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4$ olsun. $\overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4 \subseteq \overline{T}_5 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha$ olduğundan $t \in Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha$ olur. Dolayısıyla her $t \in \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4$ için $f_{1\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_6, T_5\}$ olur. Ayrıca $Y_5^\alpha \cap \overline{T}_5 \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t_1 \in Y_5^\alpha \cap \overline{T}_5$ vardır. Buradan $t_1\alpha = T_5$ ve $t_1 \in \overline{T}_5$ olur. $t_1 \in \overline{T}_4$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\overline{T}_4 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha$ olduğundan $t_1\alpha \in \{T_6, T_4\}$ olur. Bu ise $T_5 \notin \{T_6, T_4\}$ olduğundan $t_1\alpha = T_5$ olması ile çelişir. O halde $t_1 \notin \overline{T}_4$ dir. Yani $Y_5^\alpha \cap \overline{T}_5 \subseteq \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4$ olur. Sonuç olarak en az bir $t_1 \in \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4$ için $f_{1\alpha}(t_1) = t_1\alpha = T_5$ olur.

$t \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5 \Rightarrow \overline{T}_4 \setminus \overline{T} \subseteq \overline{T}_4 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha$ olduğundan $\forall t \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5$ için $f_{2\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_6, T_4\}$ olur. Bununla birlikte $Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4 \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t_2 \in Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4$ vardır. Buradan $t_2\alpha = T_4$ ve $t_2 \in \overline{T}_4$ olur. $t_2 \in \overline{T}_5$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\overline{T}_5 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha$ olduğundan $t_2\alpha \in \{T_6, T_5\}$ olur. Bu da $T_4 \notin \{T_6, T_5\}$ olduğundan $t_2\alpha = T_4$ olması ile çelişir. O halde $t_2 \notin \overline{T}_5$ dir. Yani $Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4 \subseteq \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5$ olarak bulunur. Sonuç olarak en az bir $t_2 \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5$ için $f_{2\alpha}(t_2) = t_2\alpha = T_4$ olduğu elde edilir.

$t \in (\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1) \setminus \overline{T} \Rightarrow (\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1) \setminus \overline{T}_3 \subseteq \overline{T}_2 \cap \overline{T}_1 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha$ olduğundan her $t \in (\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1) \setminus \overline{T}_3$ için $f_{3\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_6, T_5, T_4, T_3\}$ olarak bulunur.

$t \in \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1 \Rightarrow \overline{T}_2 \setminus \overline{T} \subseteq \overline{T}_2 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha$ olduğundan her $t \in \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1$ için $f_{4\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2\}$ olarak bulunur. Ayrıca $Y_2^\alpha \cap \overline{T}_2 \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t_3 \in Y_2^\alpha \cap \overline{T}_2$ vardır. Buradan $t_3\alpha = T_2$ ve $t_3 \in \overline{T}_2$ olur. $t_3 \in \overline{T}_1$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\overline{T}_1 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$ olduğundan $t_3\alpha \in \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_1\}$ olur. Bu ise $T_2 \notin \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_1\}$ olduğundan $t_3\alpha = T_2$ olması ile çelişir. O halde $t_3 \notin \overline{T}_1$ dir. Yani $Y_2^\alpha \cap \overline{T}_2 \subseteq \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1$ olur. Dolayısıyla en az bir $t_2 \in \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1$ için $f_{4\alpha}(t_3) = t_3\alpha = T_2$ olarak bulunur.

$t \in \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2 \subseteq \overline{T}_1 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$ olduğundan her $t \in \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2$ için $f_{5\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_1\}$ olarak bulunur. Bununla birlikte $Y_1^\alpha \cap \overline{T}_1 \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t_4 \in Y_1^\alpha \cap \overline{T}_1$ vardır. Buradan $t_4\alpha = T_1$ ve $t_4 \in \overline{T}_1$. $t_4 \in \overline{T}_2$ olduğunu varsayalım. O zaman $\overline{T}_2 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha$ olduğundan $t_4\alpha \in \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2\}$ olur. Bu da

$T_1 \notin \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2\}$ olduğundan çelişkidir. O halde $t_4 \notin \overline{T}_2$ dir. Yani $Y_1^\alpha \cap \overline{T}_1 \subseteq \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2$ olur. Dolayısıyla en az bir $t_1 \in \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2$ için $f_{5\alpha}(t_3) = t_4\alpha = T_1$ olarak elde edilir.

$t \in X \setminus \overline{T}_0 \Rightarrow X \setminus \overline{T}_0 \subseteq X = Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha$ olduğundan her $t \in X \setminus \overline{T}_0$ için $f_{6\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\}$ olarak bulunur.

O halde $f_\alpha = (f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}) \in \mathbb{F}$ olur. Böylece $R_\varphi(Q, D')$ kümesinin her α elemanına karşılık bir $f_\alpha = (f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha})$ ayrık dönüşümlerin sıralı sisteminin var olduğu görülür.

Şimdi $f = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathbb{F}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{F}$ kümesinin tanımından, $f : X \to D$ dönüşümünün $\overline{T}_5 \cap \overline{T}_4$, $\overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4$, $\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5$, $(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1) \setminus \overline{T}_3$, $\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1$, $\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2$, X$\setminus \overline{T}_0$ kümeleri üzerine kısıtlanışları

$$\begin{aligned}
&f_0 : \overline{T}_5 \cap \overline{T}_4 \to \{T_6\},\\
&f_1 : \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4 \to \{T_6, T_5\} \text{ ve } \exists a \in \overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4 \text{ için} f_1(a) = T_5,\\
&f_2 : \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5 \to \{T_6, T_4\} \text{ ve } \exists b \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5 \text{ için} f_2(a) = T_4,\\
&f_3 : (\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1) \setminus \overline{T}_3 \to \{T_6, T_5, T_4, T_3\},\\
&f_4 : \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1 \to \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2\} \text{ ve } \exists c \in \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1 \text{ için} f_4(c) = T_2,\\
&f_5 : \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2 \to \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_1\} \text{ ve } \exists d \in \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2 \text{ için} f_5(d) = T_1,\\
&f_6 : X \setminus \overline{T}_0 \to Q.
\end{aligned}$$

Bu dönüşümlerden faydalanarak

$$\beta = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$$

ikili bağıntısını tanımlayalım. β ikili bağıntısı f dönüşümü ile tanımlandığından $\beta \in B_X(D)$ olur. Ayrıca β nın tanımından dolayı da $f(x) = x\beta$ olur. $i \in \{0,1,...,6\}$ için Y_i^β kümelerinin tanımından

$$\beta = \bigcup_{k=0}^{6} (Y_k^\beta \times T_k)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca tam α-izomorfizma altında $V(D,\alpha)$ nın üreteci $D(\alpha) = \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1\}$ kümesinin görüntüsü olan $D'(\alpha) = \{\overline{T}_6, \overline{T}_5, \overline{T}_4, \overline{T}_3, \overline{T}_2, \overline{T}_1\}$ kümesi de D' nün üreteci olur. Öte yandan φ, tam α-izomorfizma olduğundan $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}_4$, $\overline{T}_5$, $\overline{T}_6$

kümeleri sırasıyla $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_1}$, $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_2}$, $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_4}$, $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_5}$ ve $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_6}$ kümelerinin nonlimit elemanı olur. Şimdi nonlimit elemanların sağladığı özellikleri bulalım.

$$t\in\overline{T}_6\subseteq\overline{T}_5\cap\overline{T}_4\Rightarrow f(t)=f_0(t)=t\beta=T_6\Rightarrow t\in Y_6^\beta\Rightarrow\overline{T}_6\subseteq Y_6^\beta,$$

$$t\in\overline{T}_5=\left(\overline{T}_5\setminus\overline{T}_4\right)\cup\left(\overline{T}_5\cap\overline{T}_4\right)\Rightarrow f(t)=t\beta\in\{T_6,T_5\}\Rightarrow t\in Y_6^\beta\cup Y_5^\beta\Rightarrow\overline{T}_5\subseteq Y_6^\beta\cup Y_5^\beta,$$

$$t\in\overline{T}_4=\left(\overline{T}_4\setminus\overline{T}_5\right)\cup\left(\overline{T}_5\cap\overline{T}_4\right)\Rightarrow f(t)=t\beta\in\{T_6,T_4\}\Rightarrow t\in Y_6^\beta\cup Y_4^\beta\Rightarrow\overline{T}_4\subseteq Y_6^\beta\cup Y_4^\beta,$$

$$\begin{aligned}t\in\overline{T}_2=\left(\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1\right)\cup\left(\left(\overline{T}_2\cap\overline{T}_1\right)\setminus\overline{T}_3\right)\cup\overline{T}_5\cup\overline{T}_4&\Rightarrow f(t)=t\beta\in\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2\}\\&\Rightarrow t\in Y_6^\beta\cup Y_5^\beta\cup Y_4^\beta\cup Y_3^\beta\cup Y_2^\beta\\&\Rightarrow\overline{T}_2\subseteq Y_6^\beta\cup Y_5^\beta\cup Y_4^\beta\cup Y_3^\beta\cup Y_2^\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t\in\overline{T}_1=\left(\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2\right)\cup\left(\left(\overline{T}_2\cap\overline{T}_1\right)\setminus\overline{T}_3\right)\cup\overline{T}_5\cup\overline{T}_4&\Rightarrow f(t)=t\beta\in\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_1\}\\&\Rightarrow t\in Y_6^\beta\cup Y_5^\beta\cup Y_4^\beta\cup Y_3^\beta\cup Y_1^\beta\\&\Rightarrow\overline{T}_1\subseteq Y_6^\beta\cup Y_5^\beta\cup Y_4^\beta\cup Y_3^\beta\cup Y_1^\beta\end{aligned}$$

özellikleri elde edilir.

Ayrıca en az bir $a\in\overline{T}_5\setminus\overline{T}_4$ için $f_1(a)=T_5$ olduğundan $a\in Y_5^\beta\cap\overline{T}_5$ olarak bulunur. Buradan $Y_5^\beta\cap\overline{T}_5\neq\varnothing$ olur. Benzer olarak f_2,f_4 ve f_5 dönüşümlerinin özellikleri düşünüldüğünde $Y_4^\beta\cap\overline{T}_4\neq\varnothing$, $Y_2^\beta\cap\overline{T}_2\neq\varnothing$ ve $Y_1^\beta\cap\overline{T}_1\neq\varnothing$ elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}&Y_6^\beta\supseteq\overline{T}_6,\ Y_6^\beta\cup Y_5^\beta\supseteq\overline{T}_5,\ Y_6^\beta\cup Y_4^\beta\supseteq T_4,\\&Y_6^\beta\cup Y_5^\beta\cup Y_4^\beta\cup Y_3^\beta\cup Y_2^\beta\supseteq\overline{T}_2,\\&Y_6^\beta\cup Y_5^\beta\cup Y_4^\beta\cup Y_3^\beta\cup Y_1^\beta\supseteq\overline{T}_1,\\&Y_1^\beta\cap\overline{T}_1\neq\varnothing,\ Y_2^\beta\cap\overline{T}_2\neq\varnothing,\ Y_4^\beta\cap\overline{T}_4\neq\varnothing,\ Y_5^\beta\cap\overline{T}_5\neq\varnothing\end{aligned}$$

olur. $V(D,\beta)=\{Y\beta\mid Y\in D\}$, $\overline{T}_i\beta=\bigcup_{x\in\overline{T}_i}x\beta$, $D'\subseteq D$ ve f dönüşümünün özellikleri dikkate alındığında

$$\overline{T}_6\beta=T_6\Rightarrow T_6\in V(D,\beta),$$

$$\overline{T}_5\beta=T_6\cup T_5=T_5\Rightarrow T_5\in V(D,\beta),$$

$$\overline{T}_4\beta=T_6\cup T_4=T_4\Rightarrow T_4\in V(D,\beta),$$

$$\overline{T}_3\beta=\left(\overline{T}_5\cup\overline{T}_4\right)\beta=\overline{T}_5\beta\cup\overline{T}_4\beta=T_5\cup T_4=T_3\Rightarrow T_3\in V(D,\beta),$$

$$\overline{T}_2\beta=T_6\cup T_5\cup T_4\cup T_3\cup T_2=T_2\Rightarrow T_2\in V(D,\beta),$$

$$\overline{T}_1\beta=T_6\cup T_5\cup T_4\cup T_3\cup T_1=T_1\Rightarrow T_1\in V(D,\beta),$$

$$\overline{T}_0\beta = \left(\overline{T}_1 \cup \overline{T}_2\right)\beta = \overline{T}_1\beta \cup \overline{T}_2\beta = T_1 \cup T_2 = T_0 \Rightarrow T_0 \in V\left(D,\beta\right)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $Q \subseteq V\left(D,\beta\right)$ olur. Öte yandan

$$\begin{aligned} Z \in V\left(D,\beta\right) &\Rightarrow Z = Y\beta,\ \exists Y \in D \\ &\Rightarrow Z = Y\beta = \bigcup_{y\in Y} y\beta = \bigcup_{y\in Y} f\left(y\right) \in Q \end{aligned}$$

olur. O halde $V\left(D,\beta\right) \subseteq Q$ olur. Sonuç olarak $V\left(D,\beta\right) = Q$ elde edilir.

Ayrıca her $T \in V\left(D,\beta\right)$ için $\varphi\left(T\right)\beta = \overline{T}\beta = T$ olduğundan φ tam β-izomorfizmasıdır. Teorem 3.1.2 den $\beta \in R_\varphi\left(Q,D'\right)$ elde edilir. Yani F nin her bir elemanına karşılık $R_\varphi\left(Q,D'\right)$ kümesinde bir regüler eleman vardır.

Şimdi $\alpha,\beta \in R_\varphi\left(Q,D'\right)$ ve $\alpha \neq \beta$ olsun. Bu durumda α ya karşılık $f_\alpha\left(t\right) = t\alpha$ olacak şekilde $f_\alpha = \left(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}\right)$ sıralı sistemi ve β ya karşılık $f_\beta\left(t\right) = t\beta$ olacak şekilde $f_\beta = \left(f_{0\beta}, f_{1\beta}, f_{2\beta}, f_{3\beta}, f_{4\beta}, f_{5\beta}, f_{6\beta}\right)$ sıralı sistemi vardır. $f_\alpha = f_\beta$ olsun. O zaman her $t \in X$ için $f_\alpha\left(t\right) = f_\beta\left(t\right)$ olur. Bu ise her $t \in X$ için $t\alpha = t\beta$ olmasını gerektirir. Buradan $\alpha = \beta$ elde edilir. Bu da kabulümüz ile çelişir. O halde $f_\alpha \neq f_\beta$ olur.

Sonuç olarak $R_\varphi\left(Q,D'\right)$ ile F arasında bire-bir eşleme vardır. Dolayısıyla $\left|R_\varphi\left(Q,D'\right)\right| = \left|\mathrm{F}\right|$ olur.■

Teorem 3.1.7 X sonlu bir küme ve $Q = \left\{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\right\}$, elemanları

$$\begin{aligned} &T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0, \\ &T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0, \\ &T_2 \cup T_1 = T_0,\ T_5 \cup T_4 = T_3,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing, T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing, \\ &T_4 \setminus T_5 \neq \varnothing, T_5 \setminus T_4 \neq \varnothing \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan D nin XI-alt yarılatisi olsun. Eğer Q ve $D' = \left\{\overline{T}_0, \overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3, \overline{T}_4, \overline{T}_5, \overline{T}_6\right\}$ kümeleri tam α-izomorf ise $\Omega\left(Q\right) = m_0$ olmak üzere

$$\left|R\left(D'\right)\right| = m_0 \cdot 4 \cdot \left(2^{\left|\overline{T}_5 \setminus \overline{T}_4\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_5\right|} - 1\right) \cdot 4^{\left|\left(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1\right) \setminus \overline{T}_3\right|} \cdot \left(5^{\left|\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1\right|} - 4^{\left|\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2\right|} - 4^{\left|\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2\right|}\right) \cdot 7^{\left|X \setminus \overline{T}_0\right|}$$

olur.

İspat: Lemma 3.1.6 dan, $R_\varphi(Q,D')$ nün eleman sayısı, $\mathbb{F}$ kümesindeki birbirinden farklı sıralı sistemlerin sayısına eşittir. Teorem 1.1.10 dan faydalanarak birbirinden farklı yazılabilecek $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ ve f_6 fonksiyonlarının sayısı sırayla

$$1,\ 2^{|\overline{T}_5\setminus\overline{T}_4|}-1,\ 2^{|\overline{T}_4\setminus\overline{T}_5|}-1,\ 4^{|(\overline{T}_2\cap\overline{T}_1)\setminus\overline{T}_3|},\ 5^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|}-4^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|},\ 5^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|}-4^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|},\ 7^{|X\setminus\overline{T}_0|}$$

olarak bulunur. O halde

$$|R_\varphi(Q,D')| = \left(2^{|\overline{T}_5\setminus\overline{T}_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|\overline{T}_4\setminus\overline{T}_5|}-1\right)\cdot 4^{|(\overline{T}_2\cap\overline{T}_1)\setminus\overline{T}_3|}\cdot\left(5^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|}-4^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|}\right)\cdot\left(5^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|}-4^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\overline{T}_0|}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca Q nun otomorfizmleri,

$$id_Q = \begin{pmatrix} T_6 & T_5 & T_4 & T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \\ T_6 & T_5 & T_4 & T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} T_6 & T_5 & T_4 & T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \\ T_6 & T_5 & T_4 & T_3 & T_1 & T_2 & T_0 \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} T_6 & T_5 & T_4 & T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \\ T_6 & T_4 & T_5 & T_3 & T_1 & T_2 & T_0 \end{pmatrix} \text{ ve } h = \begin{pmatrix} T_6 & T_5 & T_4 & T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \\ T_6 & T_4 & T_5 & T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \end{pmatrix}$$

olup dört tanedir. Teorem 1.1.29 dan dolayı

$$|R(D')| = m_0\cdot 4\cdot\left(2^{|\overline{T}_5\setminus\overline{T}_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|\overline{T}_4\setminus\overline{T}_5|}-1\right)\cdot 4^{|(\overline{T}_2\cap\overline{T}_1)\setminus\overline{T}_3|}\cdot\left(5^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|}-4^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|}\right)\cdot\left(5^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|}-4^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\overline{T}_0|}$$

olarak elde edilir.■

Sonuç 3.1.8 $Q=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\}$, D nin XI-alt yarılatisi olsun ve Q nun elemanları

$$\begin{aligned}&T_6\subset T_4\subset T_3\subset T_1\subset T_0,\ T_6\subset T_4\subset T_3\subset T_2\subset T_0,\\ &T_6\subset T_5\subset T_3\subset T_1\subset T_0,\ T_6\subset T_5\subset T_3\subset T_2\subset T_0,\\ &T_2\cup T_1=T_0,\ T_5\cup T_4=T_3,\ T_1\setminus T_2\neq\varnothing, T_2\setminus T_1\neq\varnothing,\\ &T_4\setminus T_5\neq\varnothing, T_5\setminus T_4\neq\varnothing.\end{aligned}$$

koşullarını sağlasın. Eğer X sonlu bir küme ise $B_X(Q)$ nun sağ birim elemanlarının sayısı

$$|E_X^{(r)}(Q)| = \left(2^{|T_5\setminus T_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|T_4\setminus T_5|}-1\right)\cdot 4^{|(T_2\cap T_1)\setminus T_3|}\cdot\left(5^{|T_2\setminus T_1|}-4^{|T_2\setminus T_1|}\right)\cdot\left(5^{|T_1\setminus T_2|}-4^{|T_1\setminus T_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus T_0|}$$

olur.

İspat: Teorem 1.1.32 den dolayı $E_X^{(r)}(Q)=R_{id_Q}(Q,Q)$ olur. Teorem 3.1.7 de $D'=Q$ olarak alınırsa

$$|R_{id_Q}(Q,Q)| = |R_\varphi(Q,Q)|$$

olur. O halde Teorem 3.1.7 den dolayı

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(2^{|T_5 \setminus T_4|} - 1\right) \cdot \left(2^{|T_4 \setminus T_5|} - 1\right) \cdot 4^{|(T_2 \cap T_1) \setminus T_3|} \cdot \left(5^{|T_2 \setminus T_1|} - 4^{|T_2 \setminus T_1|}\right) \cdot \left(5^{|T_1 \setminus T_2|} - 4^{|T_1 \setminus T_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus T_0|}$$

olarak bulunur.■

X sonlu bir küme olsun.

$$Z_8 \cap Z_7 \neq \varnothing$$

koşulu altında $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısını bulalım.

Lemma 3.1.9 X sonlu ise

$$\left|I^*(Q_1)\right| = 9$$

olur.

İspat: Her bir $Q' \in Q_1 \vartheta_{XI}$ için $\left|B_X(Q')\right| = 1$ ve

$$Q_1 \vartheta_{XI} = \left\{\{Z_8\}, \{Z_7\}, \{Z_6\}, \{Z_5\}, \{Z_4\}, \{Z_3\}, \{Z_2\}, \{Z_1\}, \{\breve{D}\}\right\}$$

olduğundan

$$\left|I^*(Q_1)\right| = \sum_{Q' \in Q_1 \vartheta_{XI}} \left|I(Q')\right| = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{9} = 9$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.1.10 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\left|I^*(Q_2)\right| = &\left(2^{|Z_1 \setminus Z_3|} + 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} + 2^{|Z_1 \setminus Z_5|} + 2^{|Z_1 \setminus Z_6|} + 2^{|Z_1 \setminus Z_7|} + 2^{|Z_1 \setminus Z_8|} - 6\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \\
&\left(2^{|Z_2 \setminus Z_3|} + 2^{|Z_2 \setminus Z_4|} + 2^{|Z_2 \setminus Z_5|} + 2^{|Z_2 \setminus Z_6|} + 2^{|Z_2 \setminus Z_7|} + 2^{|Z_2 \setminus Z_8|} - 6\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \\
&\left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} + 2^{|Z_3 \setminus Z_5|} + 2^{|Z_3 \setminus Z_6|} + 2^{|Z_3 \setminus Z_7|} + 2^{|Z_3 \setminus Z_8|} - 5\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} + \\
&\left(2^{|Z_5 \setminus Z_7|} + 2^{|Z_5 \setminus Z_8|} - 2\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|} + \left(2^{|Z_6 \setminus Z_8|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_6|} + \\
&\left(2^{|\breve{D} \setminus Z_1|} + 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|} + 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|} + 2^{|\breve{D} \setminus Z_4|} + 2^{|\breve{D} \setminus Z_5|} + 2^{|\breve{D} \setminus Z_6|} + 2^{|\breve{D} \setminus Z_7|} + 2^{|\breve{D} \setminus Z_8|} - 8\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|}
\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.55 den dolayı $Q_2 = \{T, T'\}$ XI-alt yarılatisi ile belirlenen $B_X(Q_2)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı $\left|E_X^{(r)}(Q_2)\right| = \left(2^{|T' \setminus T|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus T'|}$ olarak bulunur.

Bu durumda

$$Q_2\vartheta_{XI}=\{\{Z_3,Z_1\},\{Z_3,Z_2\},\{Z_4,Z_1\},\{Z_4,Z_2\},\{Z_4,Z_3\},\{Z_5,Z_1\},\{Z_5,Z_2\},$$
$$\{Z_5,Z_3\},\{Z_6,Z_1\},\{Z_6,Z_2\},\{Z_6,Z_3\},\{Z_7,Z_1\},\{Z_7,Z_2\},\{Z_7,Z_3\},$$
$$\{Z_7,Z_4\},\{Z_7,Z_5\},\{Z_8,Z_1\},\{Z_8,Z_2\},\{Z_8,Z_3\},\{Z_8,Z_5\},\{Z_8,Z_6\},$$
$$\{Z_1,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_6,\breve{D}\},\{Z_7,\breve{D}\},\{Z_8,\breve{D}\}\},$$

ve $\left|I^*(Q_2)\right|=\sum_{D'\in Q_2\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$\left|I^*(Q_2)\right|=\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}+2^{|Z_1\setminus Z_4|}+2^{|Z_1\setminus Z_5|}+2^{|Z_1\setminus Z_6|}+2^{|Z_1\setminus Z_7|}+2^{|Z_1\setminus Z_8|}-6\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}+2^{|Z_2\setminus Z_4|}+2^{|Z_2\setminus Z_5|}+2^{|Z_2\setminus Z_6|}+2^{|Z_2\setminus Z_7|}+2^{|Z_2\setminus Z_8|}-6\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}+2^{|Z_3\setminus Z_5|}+2^{|Z_3\setminus Z_6|}+2^{|Z_3\setminus Z_7|}+2^{|Z_3\setminus Z_8|}-5\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|}+$$
$$\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}+2^{|Z_5\setminus Z_8|}-2\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_5|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_6|}+$$
$$\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_7|}+2^{|\breve{D}\setminus Z_8|}-8\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.1.11 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*(Q_3)\right|=\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_3|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_3|}+$$
$$\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_3|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|}-2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_6|}-2^{|Z_2\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_3|}+$$

$$\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_1\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_2\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_1\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_6|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.55 den faydalanarak $Q_3=\{T,T',T''\}$ XI -alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_3)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_3)\right|=\left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot\left(3^{|T''\setminus T'|}-2^{|T''\setminus T'|}\right)\cdot 3^{|X\setminus T''|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}Q_3\vartheta_{XI}=\{&\{Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_4,Z_3,Z_2\},\{Z_5,Z_3,Z_1\},\{Z_5,Z_3,Z_2\},\{Z_6,Z_3,Z_1\},\{Z_6,Z_3,Z_2\},\\&\{Z_7,Z_3,Z_1\},\{Z_7,Z_3,Z_2\},\{Z_7,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_2\},\{Z_7,Z_4,Z_3\},\{Z_7,Z_5,Z_1\},\\&\{Z_7,Z_5,Z_2\},\{Z_7,Z_5,Z_3\},\{Z_8,Z_3,Z_1\},\{Z_8,Z_3,Z_2\},\{Z_8,Z_5,Z_1\},\{Z_8,Z_5,Z_2\},\\&\{Z_8,Z_5,Z_3\},\{Z_8,Z_6,Z_1\},\{Z_8,Z_6,Z_2\},\{Z_8,Z_6,Z_3\},\{Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_3,Z_2,\breve{D}\},\\&\{Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,\breve{D}\},\\&\{Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,\breve{D}\},\\&\{Z_7,Z_4,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,\breve{D}\},\{Z_8,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_3,\breve{D}\},\{Z_8,Z_5,\breve{D}\},\\&\{Z_8,Z_6,\breve{D}\}\},\end{aligned}$$

ve $\left|I^*(Q_3)\right|=\sum\limits_{D'\in Q_3\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left|I^*\left(Q_3\right)\right| = {} & \left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+ \\
& \left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+ \\
& \left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+ \\
& \left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+ \\
& \left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+ \\
& \left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_3|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+ \\
& \left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_3|}+ \\
& \left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+ \\
& \left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+ \\
& \left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_3|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|}-2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+ \\
& \left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_6|}-2^{|Z_2\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_3|}+ \\
& \left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_1\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_2\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_1\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_6|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.1.12 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\left|I^*(Q_4)\right| = {} & \left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot \\
& \left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot \\
& \left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+ \\
& \left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot \\
& \left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot \\
& \left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+ \\
& \left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot \\
& \left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot \\
& \left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot \\
& \left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot \\
& \left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot \\
& \left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot \\
& \left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot \\
& \left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot \\
& \left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot \\
& \left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot \\
& \left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|}-2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& \left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_6|}-2^{|Z_2\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot \\
& \left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}
\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.55 den dolayı $Q_4 = \{Z, Z', T, T'\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_4)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_4)\right| = \left(2^{|Z'\setminus Z|}-1\right)\cdot\left(3^{|T\setminus Z'|}-2^{|T\setminus Z'|}\right)\cdot\left(4^{|T'\setminus T|}-3^{|T'\setminus T|}\right)\cdot 4^{|X\setminus T'|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} Q_4\vartheta_{XI} = \{&\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\},\\ &\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_1\},\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2\},\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_1\},\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2\},\\ &\{Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\\ &\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\\ &\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\\ &\{Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_8,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\\ &\{Z_8,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_8,Z_6,Z_1,\breve{D}\},\\ &\{Z_8,Z_6,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_6,Z_3,\breve{D}\}\}, \end{aligned}$$

ve $\left|I^*(Q_4)\right| = \sum\limits_{D'\in Q_4\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left|I^*(Q_4)\right| = &\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\\ &\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\\ &\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+\\ &\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\\ &\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\\ &\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+\\ &\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\\ &\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\\ &\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\\ &\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\\ &\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot \end{aligned}$$

$$\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot$$

$$\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot$$

$$\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot$$

$$\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot$$

$$\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot$$

$$\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|}-2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_6|}-2^{|Z_2\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot$$

$$\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.1.13 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_5\right)\right|=\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.55 den dolayı $Q_5=\left\{Z,Z',T,T',\breve{D}\right\}$ XI -alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_5\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_5\right)\right|=\left(2^{|Z'\setminus Z|}-1\right)\cdot\left(3^{|T\setminus Z'|}-2^{|T\setminus Z'|}\right)\cdot\left(4^{|T'\setminus T|}-3^{|T'\setminus T|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus T'\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus T'\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}Q_5\vartheta_{XI}=\Big\{&\left\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\\&\left\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\Big\},\end{aligned}$$

ve $\left|I^*\left(Q_5\right)\right|=\sum\limits_{D'\in Q_5\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_5\right)\right|=&\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.1.14 X sonlu ise

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_6\right)\right|=&\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_3|}+6\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_3|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.63-(a) dan dolayı $Q_6=\left\{Z,T,T',T\cup T'\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_6\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_6\right)\right|=\left(2^{|T\setminus T'|}-1\right)\cdot\left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus(T\cup T')|}$$

olarak bulunur. Bu durmda

$$\begin{aligned}Q_6\vartheta_{XI}=\Big\{&\left\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3\right\},\left\{Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\\&\left\{Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3\right\}\Big\},\end{aligned}$$

ve $\left|I^*\left(Q_6\right)\right| = \sum_{D'\in Q_6\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\left|I^*\left(Q_6\right)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_3|} + 6\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_3|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.1.15 X sonlu ise

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_7\right)\right| = {} & \left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|} + \\ & \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|} + \\ & \left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|} + \\ & \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|} + \\ & \left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|} + \\ & \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.63-(a) dan dolayı $Q_7 = \left\{Z, T, T', T\cup T', Z'\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_7\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_7\right)\right| = \left(2^{|T\setminus T'|}-1\right)\cdot\left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z'\setminus(T\cup T')|}-4^{|Z'\setminus(T\cup T')|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z'|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}Q_7\vartheta_{XI} = \{ & \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \\ & \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}\},\end{aligned}$$

ve $\left|I^*\left(Q_7\right)\right| = \sum_{D'\in Q_7\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_7\right)\right| = {} & \left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|} + \\ & \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|} + \\ & \left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|} +\end{aligned}$$

$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.1.16 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*(Q_8)\right|=\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.63-(a) dan $Q_8=\{Z,T,T',T\cup T',Z',\breve{D}\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_8)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_8)\right|=\left(2^{|T\setminus T'|}-1\right)\cdot\left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z'\setminus(T\cup T')|}-4^{|Z'\setminus(T\cup T')|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z'|}-5^{|\breve{D}\setminus Z'|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Q_8\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}\right.$$
$$\left.\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}\right\},$$

ve $\left|I^*(Q_8)\right|=\sum_{D'\in Q_8\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$\left|I^*(Q_8)\right|=\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.1.17 X sonlu ise

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_9)\right| = &\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_6|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.63-(b) den dolayı $Q_9=\{Z,Z',T,T',T\cup T'\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_9)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_9)\right|=\left(2^{|Z'\setminus Z|}-1\right)\cdot 2^{|(T\cap T')\setminus Z'|}\cdot\left(3^{|T\setminus T'|}-2^{|T\setminus T'|}\right)\cdot\left(3^{|T'\setminus T|}-2^{|T'\setminus T|}\right)\cdot 5^{|X\setminus(T\cup T')|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}Q_9\vartheta_{XI}=\Big\{&\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\{Z_8,Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\\ &\{Z_8,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\{Z_7,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\\ &\{Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\Big\},\end{aligned}$$

ve $\left|I^*(Q_9)\right|=\sum\limits_{D'\in Q_9\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_9)\right| = &\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_6|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\end{aligned}$$

$$\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.1.18 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_{10})\right|=&\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\\&\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\\&\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\\&3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\\&\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.63-(b) den dolayı $Q_{10}=\left\{T,T',Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{10})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{10})\right|=\left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus T'|}-2^{|Z_3\setminus T'|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}Q_{10}\vartheta_{XI}=\Big\{&\left\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\\&\left\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\Big\},\end{aligned}$$

ve $\left|I^*(Q_{10})\right|=\sum\limits_{D'\in Q_{10}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_{10})\right|=&\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\\&\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\\&\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\\&3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\\&\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.1.19 X sonlu ise

$$\left|I^*(Q_{11})\right| = \left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|}-4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|}-4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$$
$$+\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|}-4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|}-4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 3.1.8 den dolayı $Q_{11}=\{Z,T,T',Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{11})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{11})\right| = \left(2^{|T\setminus T'|}-1\right)\cdot\left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot 4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|}-4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|}-4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Q_{11}\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\right\}$$

ve

$$\left|I^*(Q_{11})\right| = \sum_{D'\in Q_{11}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}(D')\right|$$

olduğundan

$$\left|I^*(Q_{11})\right| = \left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|}-4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|}-4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$$
$$+\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|}-4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|}-4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur.■

Teorem 3.1.20 X sonlu bir küme ve $Z_8\cap Z_7\neq\varnothing$ olsun. O zaman $B_X(D)$ nin idempotent elemanlarının sayısı

$$|I_D|=\sum_{i=1}^{11}\left|I^*(Q_i)\right|$$

olur.

İspat: Teorem 1.1.34-(c) den dolayı $|I_D|=\sum_{i=1}^{11}\left|I^*(Q_i)\right|$ olur.■

Lemma 3.1.1. de verilen D nin tam X-alt yarılatislerinin hepsinin bütün koşullar altında XI-alt yarılatisler olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla diğer koşullar altında $B_X(D)$ nin idempotent elemanları bulunurken Teorem 3.1.4 de verilen quasinormal gösterimlere sahip olan idempotent elemanlar dışında ki $B_X(D)$ nin idempotent elemanları incelenmelidir. Diğer koşullar altında X sonlu iken bu tür idempotent elemanların sayısının

$$k_0 = \sum_{i=1}^{11} \left| I^*(Q_i) \right|$$

ile toplamı $B_X(D)$ nin idempotent elemanlarının sayısını verir.

3.2. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ Koşulları Altında İdempotent Elemanlar

Bu bölümde birleşimlerin tam X -yarılatisi olan D ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X(D)$ nin,

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing, Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$$

koşulları altında idempotent elemanlarınının özellikleri ve X sonlu iken idempotent elemanlarının sayısı belirlenecektir.

Lemma 3.1.1 de verilen D nin tam X -alt yarılatislerinin hepsinin bütün koşullar altında XI -alt yarılatisler olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$$

koşulları altında bunlar dışında kalan D nin tam XI -alt yarılatislerini bulalım.

Lemma 3.2.1 $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing, Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ olsun. O zaman aşağıda verilen D nin tam X -alt yarılatisleri XI -alt yarılatis olurlar.

1) $\{Z_8, Z_7, Z_5\}$ (Diyagram 12, Şekil 7);

2) $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}$ (Diyagram 13, Şekil 7);

3) $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\}$ (Diyagram 14, Şekil 7);

4) $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$ (Diyagram 15, Şekil 7);

5) $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (Diyagram 16, Şekil 7);

6) $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (Diyagram 17, Şekil 7);

İspat: Lemma 2.8 den 1 den 5 e kadar verilen D nin tam X -alt yarılatisleri XI -alt yarılatis olurlar. Sonuç 2.10 dan dolayı $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ tam X -alt yarılatisi, D nin XI -alt yarılatisi olur.■

Teorem 3.2.2 $Q = \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\}$, D nin XI -alt yarılatisi olsun ve Q nun elemanları

$$\begin{gathered}
T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\
T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\
T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_5 \setminus T_6 \neq \varnothing, T_6 \setminus T_5 \neq \varnothing,\\
T_2 \cup T_1 = T_0,\ T_5 \cup T_6 = T_4
\end{gathered}$$

koşullarını sağlasın. Üstelik bir $\alpha \in B_X(Q)$ ikili bağıntısı için $V(D,\alpha) = Q$ koşulu sağlansın ve α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \bigcup_{i=0}^{6} (Y_i^\alpha \times T_i)$ biçiminde olsun. Bu durumda α $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır ancak ve ancak Q dan D nin bir D' alt yarılatisine bir φ tam α -izomorfizması

$$\begin{gathered}
Y_6^\alpha \supseteq \varphi(T_6),\ Y_5^\alpha \supseteq \varphi(T_5),\ Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(T_3),\\
Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2),\\
Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1),\\
Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \varnothing,\ Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \varnothing,\ Y_3^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \varnothing.
\end{gathered}$$

koşullarını sağlar.

İspat: $V(D,\alpha) = Q$ olduğundan $V(D,\alpha)$, D nin XI -alt yarılatisi olur. Ayrıca $\varnothing \notin Q$ olduğundan, $V(D,\alpha) \setminus \{\varnothing\} = Q$ olur. $D(\alpha) = \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1\}$ kümesi $V(D,\alpha) \setminus \{\varnothing\}$ kümesinin üretecidir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\ddot{D}(\alpha)_{T_1} = \{T_1, T_3, T_4, T_5, T_6\} &&, \ddot{D}(\alpha)_{T_2} = \{T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}\\
&\ddot{D}(\alpha)_{T_3} = \{T_3, T_4, T_5, T_6\} &&, \ddot{D}(\alpha)_{T_4} = \{T_4, T_5, T_6\} \qquad (3.2.1)\\
&\ddot{D}(\alpha)_{T_5} = \{T_5\} &&, \ddot{D}(\alpha)_{T_6} = \{T_6\}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu kümelerin nonlimit elemanlarını inceleyelim.

$$T_1 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_1}, T_1\right) = T_1 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_1} \setminus \{T_1\}\right)\right) = T_1 \setminus T_3 \neq \varnothing,$$
$$T_2 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_2}, T_2\right) = T_2 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_2} \setminus \{T_2\}\right)\right) = T_2 \setminus T_3 \neq \varnothing,$$
$$T_3 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_3}, T_3\right) = T_3 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_3} \setminus \{T_3\}\right)\right) = T_3 \setminus T_4 \neq \varnothing,$$
$$T_4 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_4}, T_4\right) = T_4 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_4} \setminus \{T_4\}\right)\right) = T_4 \setminus T_4 = \varnothing,$$
$$T_5 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_5}, T_5\right) = T_5 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_5} \setminus \{T_5\}\right)\right) = T_5 \setminus \varnothing = T_5 \neq \varnothing,$$
$$T_6 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_6}, T_6\right) = T_6 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_6} \setminus \{T_6\}\right)\right) = T_6 \setminus \varnothing = T_6 \neq \varnothing$$

olduğundan T_1, T_2, T_3, T_5, T_6 kümeleri sırasıyla $\ddot{D}(\alpha)_{T_1}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_2}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_3}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_5}$ ve $\ddot{D}(\alpha)_{T_6}$ kümelerinin nonlimit elemanı olurlar.

$(\Rightarrow)$**:** α, $B_X(D)$ nin regüler elemanı olsun. Teorem 1.1.20 den dolayı Q dan D nin bir D' alt yarılatisine, φ tam α-izomorfizması vardır. O zaman $\alpha \in R_\varphi(Q, D')$ olur. (3.2.1) eşitliği ve Teorem 1.1.20-(b) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&Y_6^\alpha \supseteq \varphi(T_6),\ Y_5^\alpha \supseteq \varphi(T_5),\ Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(T_4),\\
&Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(T_3),\ Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2),\\
&Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1),\\
&Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \varnothing,\ Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \varnothing,\ Y_3^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \varnothing
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

elde edilir. φ tam α-izomorfizması olduğundan

$$Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(T_6) \cup \varphi(T_5) = \varphi(T_4)$$

özelliği sağlanır.

T_1, T_2, T_3, T_5, T_6 kümeleri sırasıyla $\ddot{D}(\alpha)_{T_1}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_2}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_3}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_5}$ ve $\ddot{D}(\alpha)_{T_6}$ kümelerinin nonlimit elemanı olduğundan Teorem 1.1.20-(c) den dolayı $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \varnothing$, $Y_5^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \varnothing$ ve $Y_6^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \varnothing$ elde edilir. Bununla birlikte (3.2.2) den $Y_6^\alpha \supseteq \varphi(T_6)$ ve $Y_5^\alpha \supseteq \varphi(T_5)$ olduğundan $Y_6^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \varnothing$ ve $Y_5^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \varnothing$ sağlanır.

$(\Leftarrow)$**:** φ tam α-izomorfizması olsun. O zaman

$$\varphi(T_4) = \varphi(T_6) \cup \varphi(T_5) \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha$$

olarak bulunur. O halde $D(\alpha)=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1\}$ üreteç kümesi ve her $T_k \in D(\alpha)$ için

$$\bigcup_{T' \in \ddot{D}(\alpha)_{T_k}} Y_{T'}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_k)$$

kapsaması sağlanır. Dolayısıyla Teorem 1.1.20 nin (a) şıkkı sağlanmış olur.

Üstelik $Y_6^{\alpha} \supseteq \varphi(T_6)$ ve $Y_5^{\alpha} \supseteq \varphi(T_5)$ olduğundan $Y_6^{\alpha} \cap \varphi(T_6) \neq \varnothing$ ve $Y_5^{\alpha} \cap \varphi(T_5) \neq \varnothing$ sağlanır. Dolayısıyla her $T \in \ddot{D}(\alpha)_T$ nonlimit elemanı için $Y_T^{\alpha} \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ olur. . Dolayısıyla Teorem 1.1.20 nin (b) şıkkı sağlanmış olur.

Bunun yanında $Y_6^{\alpha} \cap \varphi(T_6) \neq \varnothing$, $Y_5^{\alpha} \cap \varphi(T_5) \neq \varnothing$, $\varphi(T_6) \subseteq \varphi(T_4)$ ve $\varphi(T_5) \subseteq \varphi(T_4)$ olduğundan $Y_6^{\alpha} \cap \varphi(T_4) \neq \varnothing$, $Y_5^{\alpha} \cap \varphi(T_4) \neq \varnothing$ olur. O halde

$$B(T_4)=\left\{Z \in \ddot{D}(\alpha)_{T_4} \mid Y_Z^{\alpha} \cap \varphi(T_4) \neq \varnothing\right\}=\{T_6,T_5\}$$

ve

$$\cup B(T_4)=T_6 \cup T_5 = T_4$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $T_4 \in \ddot{D}(\alpha)_{T_4}$ limit elemanı için Teorem 1.1.20 nin (d) şıkkı sağlanmış olur. O halde α, $B_X(D)$ nin regüler elemanı olur. Yani $\alpha \in R_{\varphi}(Q,D')$ olarak bulunur.■

Sonuç 3.2.3 D nin $Q=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\}$, XI -alt yarılatisinin elemanları

$$\begin{aligned}
&T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\
&T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_5 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\
&T_2 \cup T_1 = T_0,\ T_5 \cup T_4 = T_3, T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing, T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\\
&T_4 \setminus T_5 \neq \varnothing, T_5 \setminus T_4 \neq \varnothing.
\end{aligned}$$

koşullarını sağlasın. Üstelik bir $\alpha \in B_X(Q)$ ikili bağıntısı için $V(Q,\alpha)=Q$ koşulu sağlansın ve α nın quasinormal gösterimi $\alpha=\bigcup_{i=0}^{6}(Y_i^{\alpha} \times T_i)$ formunda olsun. Bu durumda α nın sağ birim olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\begin{aligned}
&Y_6^{\alpha} \supseteq T_6,\ Y_5^{\alpha} \supseteq T_5,\ Y_6^{\alpha} \cup Y_5^{\alpha} \cup Y_4^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \supseteq T_3,\\
&Y_6^{\alpha} \cup Y_5^{\alpha} \cup Y_4^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_2^{\alpha} \supseteq T_2,\\
&Y_6^{\alpha} \cup Y_5^{\alpha} \cup Y_4^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_1^{\alpha} \supseteq T_1,\\
&Y_1^{\alpha} \cap T_1 \neq \varnothing,\ Y_2^{\alpha} \cap T_2 \neq \varnothing,\ Y_3^{\alpha} \cap T_3 \neq \varnothing
\end{aligned}$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 3.2.2 de φ tam α-izomorfizması $V(D,\alpha)$ nın birim dönüşümü olarak alındığında Teorem 1.1.31 den dolayı $\alpha \in B_X(Q)$ elemanı idempotent olur. Ayrıca φ tam α-izomorfizması birim dönüşümken her $T \in Q$ için $\varphi(T)\alpha = T\alpha = T$ olduğundan $V(Q,\alpha) = Q$ olarak elde edilir. Teorem 1.1.13 den $\alpha \in B_X(Q)$ sağ birim olur.■

Teorem 3.1.4 verilen şekilde quasinormal gösterimi olan ikili bağıntılar

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$$

koşulları altında $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarıdır. O halde bunlar dışında quasinormal gösterime sahip olan $B_X(D)$ nin idempotent elemanlarının özelliklerini belirleyelim.

Teorem 3.2.4 $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen biçimlerde quasinormal gösterimlerden birine sahip olması ve yanlarında verilen koşulları sağlamasıdır.

a) $T,\ T' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ koşullarını sağlar.

b) $T,\ T',\ Z \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

c) $T,\ T',\ Z,\ Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

d) $T \in \{Z_2, Z_1\}$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z_8\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_8^\alpha \supseteq Z$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

e) $T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subseteq Z_3$

$T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$ olmak üzere α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi

$\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$

biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$,

$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

f) α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_8^\alpha \times Z_8\right) \cup \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right)$

$\cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_8^\alpha \supseteq Z_8$,

$Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$,

$Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$

koşullarını sağlar.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı idempotent olsun. Bu durumda $B_X(D)$ kümesinin tanımından $\alpha = \bigcup_{x\in X}\left(\{x\} \times f(x)\right)$ olacak şekilde $f : X \to D$ dönüşümü vardır. Dolayısıyla her $x \in X$ için $f(x) \in \{ Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \}$ olur. O halde D nin bir D' alt yarılatisi için

$$\alpha = \bigcup_{T\in D'}\left(Y_T^\alpha \times T\right)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$V(D,\alpha) = D' = V(D',\alpha)$$

olur. Teorem 1.1.14 den $V(D,\alpha)$ nın D nin XI-alt yarılatisi olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla D', D nin XI-alt yarılatisi olur. Yani D' X-alt yarılatisi, $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ koşulları altında D nin Lemma 3.2.1 de verilen XI-alt yarılatislerini tarar. O halde α idempotent elemanını (a)-(f) da verilen quasinormal gösterimlerden birine sahiptir. Şimdi de α nın yanlarında verilen koşulları sağladığını gösterelim.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (a) daki gibi olsun ve $T,\ T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cap T' = \varnothing$ olmak üzere $Q_{12} = \{T, T', T \cup T'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$

olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{12}$ olur. Lemma 3.2.1 den dolayı Q_{12}, D nin XI-alt yarılatisi olur. Ayrıca $V(Q_{12},\alpha) = Q_{12} = V(D,\alpha)$ olduğu da açıktır. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{12})$ olur. O halde Sonuç 1.1.57 den α nın $B_X(Q_{12})$ nin sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul α nın $Y_T^{\alpha} \supseteq T$ ve $Y_{T'}^{\alpha} \supseteq T'$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{12})$ nin sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α hem $B_X(Q_{12})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (b) de ki gibi ve T, T', $Z \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $T \cup T' \subset Z$ ve $T \cap T' = \varnothing$ olmak üzere $Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $\alpha = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times f(x))$ olacak şekilde $f : X \to D$ dönüşümü vardır. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{13}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{13})$ olur. Lemma 3.2.1 den dolayı Q_{13}, D nin XI-alt yarılatisi olur. Ayrıca $V(Q_{13},\alpha) = Q_{13} = V(D,\alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.57 den α ikili bağıntısının $B_X(Q_{13})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^{\alpha} \supseteq T$, $Y_{T'}^{\alpha} \supseteq T'$ ve $Y_Z^{\alpha} \cap Z \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{13})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{13})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (c) deki gibi ve T, T', Z, $Z' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ ve $T \cap T' = \varnothing$ olmak üzere $Q_{14} = \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{14}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{14})$ olur. Lemma 3.2.1 den dolayı Q_{14}, D nin XI-alt yarılatisi olur. Ayrıca $V(Q_{14},\alpha) = Q_{14} = V(D,\alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.57 den dolayı α nın $B_X(Q_{14})$ ün sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^{\alpha} \supseteq T$, $Y_{T'}^{\alpha} \supseteq T'$, $Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \cup Y_{T \cup T'}^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha} \supseteq Z$, $Y_Z^{\alpha} \cap Z \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^{\alpha} \cap Z' \neq \varnothing$

koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X\left(Q_{14}\right)$ ün sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X\left(Q_{14}\right)$ ün hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (d) deki gibi ve $T \in \left\{Z_2, Z_1\right\}$ olmak üzere $Q_{15} = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, T, \breve{D}\right\}$ olsun. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f : X \rightarrow D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup\limits_{x\in X}\left(\left\{x\right\}\times f\left(x\right)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f\left(x\right) \in Q_{15}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X\left(Q_{15}\right)$ olur. Lemma 3.2.1 den dolayı Q_{15} D nin XI-alt yarılatisi olur. Ayrıca $V\left(Q_{15}, \alpha\right) = Q_{15} = V\left(D, \alpha\right)$ olduğu açıktır. Sonuç 1.1.57 den α nın $B_X\left(Q_{15}\right)$ ün sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_8^\alpha \supseteq Z$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X\left(Q_{15}\right)$ ün sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X\left(Q_{15}\right)$ in hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (e) deki gibi ve $T \cap T' = \varnothing$, T, $T' \in \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\right\}$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subseteq Z_3$ olmak üzere $Q_{16} = \left\{T, T', T \cup T', Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ olsun. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f : X \rightarrow D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup\limits_{x\in X}\left(\left\{x\right\}\times f\left(x\right)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f\left(x\right) \in Q_{16}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X\left(Q_{16}\right)$ olur. Lemma 3.2.1 den Q_{16} nın D nin XI-alt yarılatisi olduğu elde edilir. Ayrıca $V\left(Q_{16}, \alpha\right) = Q_{16} = V\left(D, \alpha\right)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.57 den α ikili bağıntısının $B_X\left(Q_{16}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α ikili bağıntısı $B_X\left(Q_{16}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X\left(Q_{16}\right)$ nın hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (f) deki gibi ve $Q_{17} = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ olsun. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f : X \rightarrow D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x)\in Q_{17}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{17})$ olur. Lemma 3.2.1 den Q_{17} D nin XI -alt yarılatisi olarak bulunur. Ayrıca $V(Q_{17},\alpha)=Q_{17}=V(D,\alpha)$ olduğu açıktır. O halde Sonuç 3.2.3 den α ikili bağıntısının $B_X(Q_{17})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_8^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α ikili bağıntısı $B_X(Q_{17})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{17})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.■

Lemma 3.2.5 $Q=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\}$, D nin XI -alt yarılatisi ve Q nun elemanları

$$\begin{gathered}
T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\
T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\
T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_5 \setminus T_6 \neq \varnothing,\ T_6 \setminus T_5 \neq \varnothing,\\
T_2 \cup T_1 = T_0,\ T_5 \cup T_6 = T_4
\end{gathered}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\{T_6, T_5, (T_1\cap T_2)\setminus T_4, T_1\setminus T_2, T_2\setminus T_1, X\setminus T_0\}$$

kümesi X in parçalanışıdır.

İspat: Q, XI -alt yarılatis olduğundan Teorem 2.9 dan dolayı $T_6 \cap T_5 = P_0 = \varnothing$ olur. $P_0=\varnothing$ olduğundan (2.10) daki formal eşitliklerden

$$P_6 = T_5,\ P_5 = T_6,\ P_4 \cup P_3 = (T_1\cap T_2)\setminus T_4,\ P_2 = T_1\setminus T_2,\ P_1 = T_2 \setminus T_1$$

olarak elde edilir. Ayrıca $C(Q)=\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\}$, Q nun karakteristik kümeler ailesi olduğundan P_i ler ikişer ikişer ayrık ve $\bigcup_{i=0}^{6} P_i = T_0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\{T_4\cap T_5, T_4\setminus T_5, T_5\setminus T_4, (T_1\cap T_2)\setminus T_3, T_1\setminus T_2, T_2\setminus T_1, X\setminus T_0\}$$

kümesi X in parçalanışı olur.■

Lemma 3.2.6 X sonlu ve D nin XI -alt yarılatisi olan $Q=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\}$ nun elemanları

$$T_5\subset T_4\subset T_3\subset T_1\subset T_0,\ T_5\subset T_4\subset T_3\subset T_2\subset T_0,$$
$$T_6\subset T_4\subset T_3\subset T_1\subset T_0,\ T_6\subset T_4\subset T_3\subset T_2\subset T_0,$$
$$T_2\setminus T_1\neq\varnothing,\ T_1\setminus T_2\neq\varnothing,\ T_5\setminus T_6\neq\varnothing, T_6\setminus T_5\neq\varnothing,$$
$$T_2\cup T_1=T_0,\ T_5\cup T_6=T_4$$

koşullarını sağlasın. Ayrıca $f:X\to D$ dönüşümünün $\overline{T}_6,\ \overline{T}_5,\ \left(\overline{T}_2\cap\overline{T}_1\right)\setminus\overline{T}_4,\ \overline{T}_2\setminus\overline{T}_1,\ \overline{T}_1\setminus\overline{T}_2$ ve $X\setminus\overline{T}_0$ kümeleri üzerine kısıtlanışı aşağıdaki gibi olsun.

$$f_0:\overline{T}_6\to\{T_6\},$$
$$f_1:\overline{T}_5\to\{T_5\},$$
$$f_2:\left(\overline{T}_2\cap\overline{T}_1\right)\setminus\overline{T}_4\to\{T_6,T_5,T_4,T_3\}\text{ ve }\exists a\in\overline{T}_3\setminus\overline{T}_4\text{ için } f_2(a)=T_3,$$
$$f_3:\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1\to\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2\}\text{ ve }\exists b\in\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1\text{ için } f_3(b)=T_2,$$
$$f_4:\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2\to\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_1\}\text{ ve }\exists c\in\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2\text{ için } f_4(c)=T_1,$$
$$f_5:X\setminus\overline{T}_0\to\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1\}.$$

O zaman $f=(f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)$ ayrık dönüşümlerin sıralı sistemi olup bu şekildeki ayrık dönüşümlerin sıralı sistemlerinin kümesi F olmak üzere $\left|R_\varphi(Q,D')\right|=|\mathrm{F}|$ dir.

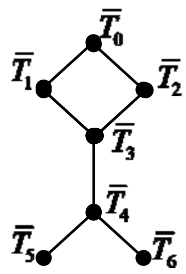
İspat: $\alpha\in R_\varphi(Q,D')$ olsun. Bu durumda $\alpha\in B_X(D)$ regüler, $V(D,\alpha)=Q$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.2.2 den dolayı Q dan D nin $D'=\{\varphi(T_0),\varphi(T_1),\varphi(T_2),\varphi(T_3),\varphi(T_4),\varphi(T_5),\varphi(T_6)\}$ alt yarılatisine bir φ tam α-izomorfizması

$$Y_6^\alpha\supseteq\varphi(T_6),\ Y_5^\alpha\supseteq\varphi(T_5),\ Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(T_3),$$
$$Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\varphi(T_2),$$
$$Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(T_1),$$
$$Y_1^\alpha\cap\varphi(T_1)\neq\varnothing,\ Y_2^\alpha\cap\varphi(T_2)\neq\varnothing,\ Y_3^\alpha\cap\varphi(T_3)\neq\varnothing$$

koşullarını sağlar. Ayrıca $i\in\{0,1,...,6\}$ için $\varphi(T_i)$ ler $\overline{T}_i$ ile gösterilinirse $D'=\{\overline{T}_0,\overline{T}_1,\overline{T}_2,\overline{T}_3,\overline{T}_4,\overline{T}_5,\overline{T}_6\}$ olur ve α regüler elemanı aşağıdaki koşulları sağlar.

$$Y_6^\alpha\supseteq\overline{T}_6,\ Y_5^\alpha\supseteq\overline{T}_5,\ Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\overline{T}_3,$$
$$Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\overline{T}_2,\ Y_6^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\overline{T}_1,$$
$$Y_1^\alpha\cap\overline{T}_1\neq\varnothing,\ Y_2^\alpha\cap\overline{T}_2\neq\varnothing,\ Y_3^\alpha\cap\overline{T}_3\neq\varnothing.$$

Q ve D' tam α-izomorf olduklarından D', XI-alt yarılatisinin diyagramı Şekil 13 deki gibidir.



Şekil 13. Elemanları (2.9) koşullarını sağlayan Q yarılatisine tam α-izomorf olan D' yarılatisinin diyagramı.

Ayrıca tam α-izomorfizm altında ayrık kümelerin görüntüsü ayrık ve $D' \subseteq D$ olduğundan $\left\{\overline{T}_6,\ \overline{T}_5,\ \left(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1\right) \setminus \overline{T}_4,\ \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1,\ \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2,\ X \setminus \overline{T}_0\right\}$ kümesi de X in parçalanışıdır. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan α ikili bağıntısı bir $f_\alpha : X \to D$ dönüşümü ile tanımlıdır. f_α dönüşümünün $\overline{T}_6,\ \overline{T}_5,\ \left(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1\right) \setminus \overline{T}_4,\ \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1,\ \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2$ ve X\$\overline{T}_0$ kümeleri üzerine kısıtlanışı sırasıyla $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}$ ve $f_{5\alpha}$ olsun. Şimdi Y_i^α kümelerinden faydalanarak $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}$ ve $f_{5\alpha}$ dönüşümlerinin özelliklerini bulalım.

$t \in \overline{T}_6$ olsun. $\overline{T}_6 \subseteq Y_6^\alpha$ olduğundan $t \in Y_6^\alpha$ olur. O halde her $t \in \overline{T}_6$ için $f_{0\alpha}\left(t\right) = t\alpha = T_6$ olarak bulunur.

$t \in \overline{T}_5$ olsun. $\overline{T}_5 \subseteq Y_5^\alpha$ olduğundan $t \in Y_5^\alpha$ olur. Buradan her $t \in \overline{T}_5$ için $f_{1\alpha}\left(t\right) = t\alpha = T_5$ olur.

$t \in \left(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1\right) \setminus \overline{T}_4$ olsun. $\left(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1\right) \setminus \overline{T}_4 \subseteq \overline{T}_2 \cap \overline{T}_1 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha$ olduğundan her $t \in \left(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1\right) \setminus \overline{T}_4$ için $f_{2\alpha}\left(t\right) = t\alpha \in \left\{T_6, T_5, T_4, T_3\right\}$ olarak elde edilir. Ayrıca $Y_3^\alpha \cap \overline{T}_3 \neq \varnothing$ ve $\overline{T}_3 = \overline{T}_5 \cup \overline{T}_6 \subseteq Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha$ olduğundan en az bir $t_1 \in Y_3^\alpha \cap \overline{T}_3$ vardır. Buradan $t_1\alpha = T_3$ ve $t_1 \in \overline{T}_3$. olur. $t_1 \in \overline{T}_4$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\overline{T}_4 = \overline{T}_5 \cup \overline{T}_6 \subseteq Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha$ olduğundan $t_1\alpha \in \left\{T_6, T_5\right\}$ olur. Bu ise $T_3 \notin \left\{T_6, T_5\right\}$ olduğundan $t_1\alpha = T_3$ olması ile çelişir. O halde $t_1 \notin \overline{T}_4$ olur. Yani $Y_3^\alpha \cap \overline{T}_3 \subseteq \overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4$ olur. Sonuç olarak en az bir $t_1 \in \overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4$ için $f_{1\alpha}\left(t_1\right) = t_1\alpha = T_3$ olarak bulunur.

$t \in \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1$ olsun. $\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1 \subseteq \overline{T}_2 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha$ olduğundan $\forall t \in \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1$ için $f_{3\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2\}$ olarak bulunur. Bununla birlikte $Y_2^\alpha \cap \overline{T}_2 \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t_2 \in Y_2^\alpha \cap \overline{T}_2$ vardır. Buradan $t_2\alpha = T_2$ ve $t_2 \in \overline{T}_2$ olur. $t_2 \in \overline{T}_1$ olduğunu kabul edelim. $\overline{T}_1 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$ olduğundan $t_2\alpha \in \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_1\}$ olur. Bu da $T_2 \notin \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_1\}$ olması ile çelişir. O halde $t_2 \notin \overline{T}_1$ dir. Yani $Y_2^\alpha \cap \overline{T}_2 \subseteq \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1$ olur. Sonuç olarak en az bir $t_2 \in \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1$ için $f_{3\alpha}(t_2) = t_2\alpha = T_2$ olduğu elde edilir.

$t \in \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2$ olsun. $\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2 \subseteq \overline{T}_1 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha$ olduğundan her $t \in \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2$ için $f_{4\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_1\}$ olarak bulunur. Ayrıca $Y_1^\alpha \cap \overline{T}_1 \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t_3 \in Y_1^\alpha \cap \overline{T}_1$ vardır. Buradan $t_3\alpha = T_1$ ve $t_3 \in \overline{T}_1$ olur. $t_3 \in \overline{T}_2$ olduğunu kabul edelim. $\overline{T}_2 \subseteq Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha$ olduğundan $t_3\alpha \in \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2\}$ olur. Bu ise $T_1 \notin \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2\}$ olduğundan $t_3\alpha = T_1$ olması ile çelişir. O halde $t_3 \notin \overline{T}_2$ dir. Yani $Y_1^\alpha \cap \overline{T}_1 \subseteq \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2$ olur. Dolayısıyla en az bir $t_3 \in \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2$ için $f_{4\alpha}(t_3) = t_3\alpha = T_1$ olarak bulunur.

$t \in X \setminus \overline{T}_0$ olsun. $X \setminus \overline{T}_0 \subseteq X = Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha$ olduğundan her $t \in X \setminus \overline{T}_0$ için $f_{5\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\}$ olarak bulunur.

O halde $f_\alpha = (f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}) \in \mathbf{F}$ olur. Böylece $R_\varphi(Q, D')$ kümesinin her α elemanına karşılık bir $f_\alpha = (f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha})$ ayrık dönüşümlerin sıralı sisteminin var olduğu görülür.

Şimdi $f = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in \mathbf{F}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{F}$ kümesinin tanımından, $f : X \to D$ dönüşümünün $\overline{T}_6$, $\overline{T}_5$, $(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1) \setminus \overline{T}_4$, $\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1$, $\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2$, $X \setminus \overline{T}_0$ kümeleri üzerine kısıtlanışları

$$
\begin{aligned}
&f_0 : \overline{T}_6 \to \{T_6\}, \\
&f_1 : \overline{T}_5 \to \{T_5\}, \\
&f_2 : (\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1) \setminus \overline{T}_4 \to \{T_6, T_5, T_4, T_3\} \text{ ve } \exists a \in \overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4 \text{ için } f_2(a) = T_3, \\
&f_3 : \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1 \to \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2\} \text{ ve } \exists b \in \overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1 \text{ için } f_3(b) = T_2, \\
&f_4 : \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2 \to \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_1\} \text{ ve } \exists c \in \overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2 \text{ için } f_4(c) = T_1, \\
&f_5 : X \setminus \overline{T}_0 \to \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1\}.
\end{aligned}
$$

özelliklerini sağlar. Bu dönüşümlerden faydalanarak $\beta = \bigcup_{x \in X} \left(\{x\} \times f(x) \right)$ ikili bağıntısını tanımlayalım. β ikili bağıntısı f dönüşümü ile tanımlandığından $\beta \in B_X(D)$ olur. Ayrıca β nın tanımından dolayı da $f(x) = x\beta$ olur. $i \in \{0,1,...,6\}$ için Y_i^{β} kümelerinin tanımından $\beta = \bigcup_{k=0}^{6} \left(Y_k^{\beta} \times T_k \right)$ biçiminde yazılabilir. Öte yandan φ, tam α-izomorfizması altında $V(D,\alpha)$ nın üreteci olan $D(\alpha) = \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1\}$ kümesinin görüntüsü $D'(\alpha) = \{\overline{T}_6, \overline{T}_5, \overline{T}_4, \overline{T}_3, \overline{T}_2, \overline{T}_1\}$ kümeside D' nün üreteci olur. Ayrıca φ, tam α-izomorfizma olduğundan $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}_3$, $\overline{T}_5$, $\overline{T}_6$ kümeleri sırasıyla $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_1}$, $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_2}$, $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_3}$, $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_5}$ ve $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_6}$ kümelerinin nonlimit elemanı olur. Şimdi nonlimit elemanların sağladığı özellikleri bulalım.

$$t \in \overline{T}_6 \Rightarrow f(t) = f_0(t) = t\beta = T_6 \Rightarrow t \in Y_6^{\beta} \Rightarrow \overline{T}_6 \subseteq Y_6^{\beta},$$

$$t \in \overline{T}_5 \Rightarrow f(t) = f_1(t) = t\beta = T_5 \Rightarrow t \in Y_5^{\beta} \Rightarrow \overline{T}_5 \subseteq Y_5^{\beta},$$

$$\begin{aligned} t \in \overline{T}_3 = \left(\overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4\right) \cup \overline{T}_6 \cup \overline{T}_5 \subseteq \left(\left(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1\right) \setminus \overline{T}_4\right) \cup \overline{T}_6 \cup \overline{T}_5 &\Rightarrow f(t) = t\beta \in \{T_6, T_5, T_4, T_3\} \\ &\Rightarrow t \in Y_6^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \\ &\Rightarrow \overline{T}_3 \subseteq Y_6^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_3^{\beta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t \in \overline{T}_2 = \left(\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1\right) \cup \left(\left(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1\right) \setminus \overline{T}_4\right) \cup \overline{T}_5 \cup \overline{T}_6 &\Rightarrow f(t) = t\beta \in \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2\} \\ &\Rightarrow t \in Y_6^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_2^{\beta} \\ &\Rightarrow \overline{T}_2 \subseteq Y_6^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_2^{\beta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t \in \overline{T}_1 = \left(\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2\right) \cup \left(\left(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1\right) \setminus \overline{T}_4\right) \cup \overline{T}_5 \cup \overline{T}_6 &\Rightarrow f(t) = t\beta \in \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_1\} \\ &\Rightarrow t \in Y_6^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_1^{\beta} \\ &\Rightarrow \overline{T}_1 \subseteq Y_6^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_1^{\beta} \end{aligned}$$

özellikleri elde edilir.

Ayrıca en az bir $a \in \overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4$ için $f_2(a) = T_3$ olduğundan $a \in Y_3^{\beta} \cap \overline{T}_3$ olarak bulunur. Buradan $Y_3^{\beta} \cap \overline{T}_3 \neq \varnothing$ olur. Benzer olarak f_3 ve f_4 dönüşümlerinin özellikleri düşünüldüğünde $Y_2^{\beta} \cap \overline{T}_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^{\beta} \cap \overline{T}_1 \neq \varnothing$ elde edilir. Sonuç olarak

$$Y_6^{\beta} \supseteq \overline{T}_6,\ Y_5^{\beta} \supseteq \overline{T}_5,\ Y_6^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \supseteq \overline{T}_3,$$
$$Y_6^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_2^{\beta} \supseteq \overline{T}_2,$$
$$Y_6^{\beta} \cup Y_5^{\beta} \cup Y_4^{\beta} \cup Y_3^{\beta} \cup Y_1^{\beta} \supseteq \overline{T}_1,$$
$$Y_1^{\beta} \cap \overline{T}_1 \neq \varnothing,\ Y_2^{\beta} \cap \overline{T}_2 \neq \varnothing,\ Y_3^{\beta} \cap \overline{T}_3 \neq \varnothing$$

olur. $V(D,\beta)=\{Y\beta \mid Y\in D\}$, $\overline{T}_i\beta=\bigcup_{x\in\overline{T}_i} x\beta$, $D'\subseteq D$ ve f dönüşümünün özellikleri dikkate alındığında

$$\overline{T}_6\beta = T_6 \Rightarrow T_6 \in V(D,\beta),$$
$$\overline{T}_5\beta = T_5 \Rightarrow T_5 \in V(D,\beta),$$
$$\overline{T}_4\beta = \overline{T}_5\beta \cup \overline{T}_6\beta = T_5 \cup T_6 = T_4 \Rightarrow T_4 \in V(D,\beta),$$
$$\overline{T}_3\beta = \left(\overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4\right) \cup T_4 = T_3 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_4 = T_3 \Rightarrow T_3 \in V(D,\beta),$$
$$\overline{T}_2\beta = T_6 \cup T_5 \cup T_4 \cup T_3 \cup T_2 = T_2 \Rightarrow T_2 \in V(D,\beta)$$
$$\overline{T}_1\beta = T_6 \cup T_5 \cup T_4 \cup T_3 \cup T_1 = T_1 \Rightarrow T_1 \in V(D,\beta)$$
$$\overline{T}_0\beta = \left(\overline{T}_1 \cup \overline{T}_2\right)\beta = \overline{T}_1\beta \cup \overline{T}_2\beta = T_1 \cup T_2 = T_0 \Rightarrow T_0 \in V(D,\beta)$$

elde edilir. O halde $Q\subseteq V(D,\beta)$ olur. Öte yandan

$$Z\in V(D,\beta) \Rightarrow Z = Y\beta,\ \exists Y\in D$$
$$\Rightarrow Z = Y\beta = \bigcup_{y\in Y} y\beta = \bigcup_{y\in Y} f(y) \in Q$$

olur. O halde $V(D,\beta)\subseteq Q$ olur Sonuç olarak $V(D,\beta)=Q$ elde edilir.

Ayrıca her $T\in V(D,\beta)$ için $\varphi(T)\beta=\overline{T}\beta=T$ olduğundan φ tam β-izomorfizmasıdır. Teorem 3.2.2 den $\beta\in R_{\varphi}(Q,D')$ elde edilir. Yani F nin her bir elemanına karşılık $R_{\varphi}(Q,D')$ kümesinde bir regüler eleman vardır.

Şimdi $\alpha,\beta\in R_{\varphi}(Q,D')$ ve $\alpha\neq\beta$ olsun. Bu durumda α ya karşılık $f_{\alpha}(t)=t\alpha$ olacak şekilde $f_{\alpha}=\left(f_{0\alpha},f_{1\alpha},f_{2\alpha},f_{3\alpha},f_{4\alpha},f_{5\alpha}\right)$ sıralı sistemi ve β ya karşılık $f_{\beta}(t)=t\beta$ olacak şekilde $f_{\beta}=\left(f_{0\beta},f_{1\beta},f_{2\beta},f_{3\beta},f_{4\beta},f_{5\beta}\right)$ sıralı sistemi vardır. $f_{\alpha}=f_{\beta}$ olsun. O zaman her $t\in X$ için $f_{\alpha}(t)=f_{\beta}(t)$ olur. Bu ise her $t\in X$ için $t\alpha=t\beta$ olmasını gerektirir. Buradan $\alpha=\beta$ elde edilir. Bu da kabulümüz ile çelişir. O halde $f_{\alpha}\neq f_{\beta}$ olur.

Sonuç olarak $R_{\varphi}(Q,D')$ ile $\mathbb{F}$ arasında bire-bir eşleme vardır. Dolayısıyla $\left|R_{\varphi}(Q,D')\right| = |\mathbb{F}|$ olur.■

Teorem 3.2.7 X sonlu ve $Q=\{T_6,T_5,T_4,T_3,T_2,T_1,T_0\}$, elemanları aşağıdaki koşulları sağlayan

$$\begin{aligned}
&T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\
&T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,\\
&T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_5 \setminus T_6 \neq \varnothing, T_6 \setminus T_5 \neq \varnothing,\\
&T_2 \cup T_1 = T_0,\ T_5 \cup T_6 = T_4.
\end{aligned}$$

D nin XI -alt yarılatisi olsun. Eğer Q ve $D'=\{\overline{T}_0,\overline{T}_1,\overline{T}_2,\overline{T}_3,\overline{T}_4,\overline{T}_5,\overline{T}_6\}$ kümeleri tam α - izomorf ise $\Omega(Q)=m_0$ olmak üzere

$$\left|R(D')\right| = m_0 \cdot 4 \cdot \left(4^{|\overline{T}_3\setminus\overline{T}_4|} - 3^{|\overline{T}_3\setminus\overline{T}_4|}\right)\cdot 4^{|(\overline{T}_2\cap\overline{T}_1)\setminus\overline{T}_3|}\cdot\left(5^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|} - 4^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|}\right)\cdot\left(5^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|} - 4^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\overline{T}_0|}$$

olur.

İspat: Lemma 3.2.6 dan, $R_{\varphi}(Q,D')$ nün eleman sayısı, $\mathbb{F}$ kümesindeki birbirinden farklı sıralı sistemlerin sayısına eşittir. Teorem 1.1.10 dan faydalanarak birbirinden farklı yazılabilecek f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 ve f_5 fonksiyonlarının sayısı sırayla

$$1,\ 1,\ 4^{|(\overline{T}_2\cap\overline{T}_1)\setminus\overline{T}_3|}\cdot\left(4^{|\overline{T}_3\setminus\overline{T}_4|} - 3^{|\overline{T}_3\setminus\overline{T}_4|}\right),\ 5^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|} - 4^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|},\ 5^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|} - 4^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|},\ 7^{|X\setminus\overline{T}_0|}$$

olarak bulunur. O halde

$$\left|R_{\varphi}(Q,D')\right| = \left(4^{|\overline{T}_3\setminus\overline{T}_4|} - 3^{|\overline{T}_3\setminus\overline{T}_4|}\right)\cdot 4^{|(\overline{T}_2\cap\overline{T}_1)\setminus\overline{T}_3|}\cdot\left(5^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|} - 4^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|}\right)\cdot\left(5^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|} - 4^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\overline{T}_0|}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca Q nun otomorfizmleri,

$$id_Q = \begin{pmatrix} T_6 & T_5 & T_4 & T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \\ T_6 & T_5 & T_4 & T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \end{pmatrix} \quad , \ f = \begin{pmatrix} T_6 & T_5 & T_4 & T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \\ T_6 & T_5 & T_4 & T_3 & T_1 & T_2 & T_0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} T_6 & T_5 & T_4 & T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \\ T_5 & T_6 & T_4 & T_3 & T_1 & T_2 & T_0 \end{pmatrix} \quad , \ h = \begin{pmatrix} T_6 & T_5 & T_4 & T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \\ T_5 & T_6 & T_4 & T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \end{pmatrix}$$

olup dört tanedir.

Teorem 1.1.29 dan dolayı

$$\left|R\left(D'\right)\right| = m_0 \cdot 4 \cdot \left(4^{\left|\overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4\right|} - 3^{\left|\overline{T}_3 \setminus \overline{T}_4\right|}\right) \cdot 4^{\left|\left(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_1\right) \setminus \overline{T}_3\right|} \cdot \left(5^{\left|\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1\right|} - 4^{\left|\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2\right|} - 4^{\left|\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_2\right|}\right) \cdot 7^{\left|X \setminus \overline{T}_0\right|}$$

olarak elde edilir.■

Sonuç 3.2.8 X sonlu bir küme, $Q = \{T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_0\}$ D nin XI -alt yarılatisi olsun ve Q nun elemanları

$$T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_5 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,$$
$$T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_1 \subset T_0,\ T_6 \subset T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_0,$$
$$T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_5 \setminus T_6 \neq \varnothing, T_6 \setminus T_5 \neq \varnothing,$$
$$T_2 \cup T_1 = T_0,\ T_5 \cup T_6 = T_4.$$

koşullarını sağlasın. O zaman $B_X(Q)$ nun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(4^{\left|T_3 \setminus T_4\right|} - 3^{\left|T_3 \setminus T_4\right|}\right) \cdot 4^{\left|\left(T_2 \cap T_1\right) \setminus T_3\right|} \cdot \left(5^{\left|T_2 \setminus T_1\right|} - 4^{\left|T_2 \setminus T_1\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|T_1 \setminus T_2\right|} - 4^{\left|T_1 \setminus T_2\right|}\right) \cdot 7^{\left|X \setminus T_0\right|}$$

olur.

İspat: Teorem 1.1.32 den dolayı $E_X^{(r)}(Q) = R_{id_Q}(Q,Q)$ olur. $D' = Q$ olarak alınırsa $\left|R_{id_Q}(Q,Q)\right| = \left|R_\varphi(Q,Q)\right|$ olur. O halde Teorem 3.2.7 den dolayı

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(4^{\left|T_3 \setminus T_4\right|} - 3^{\left|T_3 \setminus T_4\right|}\right) \cdot 4^{\left|\left(T_2 \cap T_1\right) \setminus T_3\right|} \cdot \left(5^{\left|T_2 \setminus T_1\right|} - 4^{\left|T_2 \setminus T_1\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|T_1 \setminus T_2\right|} - 4^{\left|T_1 \setminus T_2\right|}\right) \cdot 7^{\left|X \setminus T_0\right|}$$

olarak bulunur.■

Şimdi X sonlu bir küme olsun.

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing, Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$$

koşulları altında $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarınının sayısını bulalım.

Lemma 3.2.9 X sonlu ise

$$\left|I^*(Q_{12})\right| = 3^{\left|X \setminus Z_5\right|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan dolayı $Q_{12} = \{T, T', T \cup T'\}$ XI -alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{12})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{12})\right| = 3^{\left|X \setminus (T \cup T')\right|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Q_{12}\vartheta_{XI} = \{\{Z_8, Z_7, Z_5\}\}$$

ve $\left|I^*(Q_{12})\right| = \sum\limits_{D' \in Q_{12}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$\left|I^*(Q_{12})\right| = 3^{|X \setminus Z_5|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.2.10 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*(Q_{13})\right| = \left(4^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_3|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan faydalanarak $Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{13})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{13})\right| = \left(4^{|Z \setminus (T \cup T')|} - 3^{|Z \setminus (T \cup T')|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z|}$$

olur. Üstelik

$$Q_{13}\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}\right\}$$

ve $\left|I^*(Q_{13})\right| = \sum\limits_{D' \in Q_{13}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$\left|I^*(Q_{13})\right| = \left(4^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_3|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.2.11 X sonlu ise

$$\left|I^*(Q_{14})\right| = \left(4^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 4^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 4^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan dolayı $Q_{14} = \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{14})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{14})\right| = \left(4^{|Z \setminus (T \cup T')|} - 3^{|Z \setminus (T \cup T')|}\right) \cdot \left(5^{|Z' \setminus Z|} - 4^{|Z' \setminus Z|}\right) \cdot 5^{|X \setminus Z'|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Q_{14}\vartheta_{XI} = \{\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\},$$
$$\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\}\},$$

ve $\left|I^*(Q_{14})\right| = \sum_{D' \in Q_{14}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_{14})\right| = &\left(4^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\ &\left(5^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ &\left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 4^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\ &\left(5^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 4^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_2|}\end{aligned}$$

elde edilir.■

Lemma 3.2.12 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_{15})\right| = &\left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 4^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ &\left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 4^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan dolayı $Q_{15} = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, T, \breve{D}\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{15})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{15})\right| = \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|T \setminus Z_3|} - 4^{|T \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus T|} - 5^{|\breve{D} \setminus T|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olur. Üstelik

$$Q_{15}\vartheta_{XI} = \{\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}\}$$

ve $\left|I^*(Q_{15})\right| = \sum_{D' \in Q_{15}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$\left|I^*\left(Q_{15}\right)\right| = \left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|} - 4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|} - 4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|} - 5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.2.13 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{16}\right)\right| = 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|} - 3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|} - 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.71 den dolayı $Q_{16} = \left\{T, T', T\cup T', Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{16}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{16}\right)\right| = 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus(T\cup T')|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|} - 3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|} - 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Q_{16}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{16}\right)\right| = \sum\limits_{D'\in Q_{16}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\left|I^*\left(Q_{16}\right)\right| = 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|} - 3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|} - 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.■

Lemma 3.2.14 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{17}\right)\right| = 4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|} - 4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|} - 4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 3.2.8 den dolayı $Q_{17} = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{17}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{17}\right)\right| = 4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|} - 4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|} - 4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur. Üstelik

$$Q_{17}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{17}\right)\right| = \sum\limits_{D'\in Q_{17}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\left|I^*\left(Q_{17}\right)\right| = 4^{\left|\left(Z_2\cap Z_1\right)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak elde edilir.■

Teorem 3.2.15 X sonlu bir küme ve $Z_8\cap Z_7=\varnothing$, $Z_8\cap Z_4\neq\varnothing$ ve $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$ olsun. O zaman $B_X\left(D\right)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısı

$$\left|I_D\right| = \sum_{i=1}^{17}\left|I^*\left(Q_i\right)\right|$$

olur.

İspat: Teorem 1.1.34-(c) den dolayı $\left|I_D\right| = \sum_{i=1}^{17}\left|I^*\left(Q_i\right)\right|$ elde edilir.■

3.3 $Z_8\cap Z_7=\varnothing$, $Z_8\cap Z_4=\varnothing$ ve $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$ Koşulları Altında İdempotent Elemanlar

Bu bölümde birleşimlerin tam X-yarılatisi D ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X\left(D\right)$ yarıgrubunun

$$Z_8\cap Z_7=\varnothing,\ Z_8\cap Z_4=\varnothing \text{ ve } Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$$

koşulları altında idempotent elemanlarınının özellikleri ve X sonlu iken idempotent elemanlarının sayısı belirlenecektir.

Lemma 3.1.1. de verilen D nin tam X-alt yarılatisleri

$$Z_8\cap Z_7=\varnothing,\ Z_8\cap Z_4=\varnothing \text{ ve } Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$$

koşulları altında da D nin XI-alt yarılatisleri olduklarından bunlar dışında kalan D nin XI-alt yarılatislerini bulalım.

Lemma 3.3.1 $Z_8\cap Z_7=\varnothing, Z_8\cap Z_4=\varnothing$ ve $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$ olsun. O zaman aşağıda verilen D nin tam X-alt yarılatisleri XI-alt yarılatis olurlar.

1) $\left\{Z_8,Z_4,Z_3\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_5\right\}$ (Diyagram 12, Şekil 7);

2) $\left\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_1\right\}$, $\left\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3\right\}$, $\left\{Z_8,Z_4,Z_3,\breve{D}\right\}$, $\left\{Z_8,Z_7,Z_5,\breve{D}\right\}$ (Diyagram 13, Şekil 7);

3) $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\}$ $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\}$ (Diyagram 14, Şekil 7);

4) $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$ (Diyagram 15, Şekil 7);

5) $\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (Diyagram 16, Şekil 7);

6) $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (Diyagram 17, Şekil 7);

7) $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3\}$ (Diyagram 18, Şekil 7);

8) $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\}$ $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\}$ (Diyagram 19, Şekil 7);

9) $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$ (Diyagram 20, Şekil 7);

10) $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, (Diyagram 21, Şekil 7)

İspat: Lemma 2.8 den dolayı 1 den 5 e kadar verilen D nin tam X -alt yarılatisleri XI -alt yarılatis olurlar. Sonuç 2.10 dan $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ tam X -alt yarılatisi, D nin XI -alt yarılatisi olur. Lemma 2.11 den 7 den 9 a kadar verilen D nin tam X -alt yarılatisleri XI -alt yarılatis olurlar. Teorem 2.12 den 12 de verilen D nin tam X -alt yarılatisi XI -alt yarılatis olur.■

Teorem 3.3.2 $Q=\{T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6,T_7,T_8\}$ kümesi D nin XI -alt yarılatisi olsun ve Q nun elemanları

$$T_1\subset T_3\subset T_5\subset T_6\subset T_8,\ T_1\subset T_3\subset T_5\subset T_7\subset T_8,$$
$$T_2\subset T_4\subset T_5\subset T_7\subset T_8,\ T_2\subset T_4\subset T_5\subset T_6\subset T_8$$
$$T_2\setminus T_1\neq\varnothing,\ T_1\setminus T_2\neq\varnothing,\ T_4\setminus T_3\neq\varnothing,$$
$$T_3\setminus T_4\neq\varnothing,\ T_6\setminus T_7\neq\varnothing,\ T_7\setminus T_6\neq\varnothing,$$
$$T_2\cup T_1=T_3,\ T_4\cup T_3=T_5,\ T_6\cup T_7=T_8$$

koşullarını sağlasın. Üstelik bir $\alpha\in B_X(Q)$ ikili bağıntısı için $V(D,\alpha)=Q$ ve α nın quasinormal gösterimi $\alpha=\bigcup_{i=0}^{6}\left(Y_i^\alpha\times T_i\right)$ biçiminde olsun. Bu durumda α , $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır ancak ve ancak Q dan D nin bir D' alt yarılatisine bir φ tam α -izomorfizması

$$Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1),\ Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2),\ Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(T_4),$$
$$Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq \varphi(T_6),$$
$$Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha \supseteq \varphi(T_7),$$
$$Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \varnothing,\ Y_6^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \varnothing,\ Y_7^\alpha \cap \varphi(T_7) \neq \varnothing$$

koşullarını sağlar.

İspat: $V(D,\alpha) = Q$ olduğundan $V(D,\alpha)$, D nin XI -alt yarılatisidir. Ayrıca $\varnothing \notin Q$ olduğundan, $V(D,\alpha)\setminus\{\varnothing\} = Q$ olur. $D(\alpha) = \{T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6,T_7\}$ kümesi $V(D,\alpha)\setminus\{\varnothing\}$ kümesinin üretecidir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\ddot{D}(\alpha)_{T_1} = \{T_1\},\ \ddot{D}(\alpha)_{T_2} = \{T_2\},\ \ddot{D}(\alpha)_{T_3} = \{T_1,T_2,T_3\},\\
&\ddot{D}(\alpha)_{T_4} = \{T_2,T_4\},\ \ddot{D}(\alpha)_{T_5} = \{T_1,T_2,T_3,T_4,T_5\},\\
&\ddot{D}(\alpha)_{T_6} = \{T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6\},\ \ddot{D}(\alpha)_{T_6} = \{T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_7\}
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

olarak bulunur. Bu kümelerin nonlimit elemanlarını inceleyelim.

$$T_1 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_1}, T_1\right) = T_1 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_1} \setminus \{T_1\}\right)\right) = T_1 \setminus \varnothing = T_1 \neq \varnothing,$$
$$T_2 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_2}, T_2\right) = T_2 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_2} \setminus \{T_2\}\right)\right) = T_2 \setminus T_3 \neq \varnothing,$$
$$T_3 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_3}, T_3\right) = T_3 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_3} \setminus \{T_3\}\right)\right) = T_3 \setminus T_3 = \varnothing,$$
$$T_4 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_4}, T_4\right) = T_4 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_4} \setminus \{T_4\}\right)\right) = T_4 \setminus T_2 \neq \varnothing,$$
$$T_5 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_5}, T_5\right) = T_5 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_5} \setminus \{T_5\}\right)\right) = T_5 \setminus T_5 = \varnothing,$$
$$T_6 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_6}, T_6\right) = T_6 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_6} \setminus \{T_6\}\right)\right) = T_6 \setminus T_5 \neq \varnothing,$$
$$T_7 \setminus l\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_7}, T_7\right) = T_7 \setminus \left(\cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{T_7} \setminus \{T_7\}\right)\right) = T_7 \setminus T_5 \neq \varnothing$$

olduğundan T_1, T_2, T_4, T_6, T_7 kümeleri sırasıyla $\ddot{D}(\alpha)_{T_1}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_2}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_4}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_6}$ ve $\ddot{D}(\alpha)_{T_7}$ kümelerinin nonlimit elemanı olurlar.

$(\Rightarrow)$**:** α, $B_X(D)$ nin regüler elemanı olsun. Teorem 1.1.20 den dolayı Q dan D nin bir D' alt yarılatisine, φ tam α -izomorfizması vardır. O halde $\alpha \in R_\varphi(Q,D')$ olur. (3.3.1) eşitliği ve Teorem 1.1.20-(b) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1),\ Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2),\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(T_3),\\
&Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(T_4), Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \varphi(T_5),\\
&Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq \varphi(T_6),\\
&Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha \supseteq \varphi(T_7),
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

elde edilir. φ tam α-izomorfizması olduğundan

$$Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_1) \cup \varphi(T_2) = \varphi(T_3)$$

ve

$$Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \varphi(T_3) \cup \varphi(T_4) = \varphi(T_5)$$

özellikleri sağlanır.

$T_1,\ T_2,\ T_4,\ T_6,\ T_7$ kümeleri sırasıyla $\ddot{D}(\alpha)_{T_1}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_2}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_4}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_6}$ ve $\ddot{D}(\alpha)_{T_7}$ kümelerinin nonlimit elemanı olduğundan Teorem 1.1.20-(c) den dolayı $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \varnothing$, $Y_6^\alpha \cap \varphi(T_6) \neq \varnothing$ ve $Y_7^\alpha \cap \varphi(T_7) \neq \varnothing$ elde edilir. Bununla birlikte (3.3.2) den $Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1)$ ve $Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2)$ olduğundan $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \varnothing$ ve $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \varnothing$ sağlanır.

$(\Leftarrow)$**:** φ tam α-izomorfizması olsun. O zaman

$$\varphi(T_3) = \varphi(T_2) \cup \varphi(T_1) \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$$

olarak bulunur. O halde $D(\alpha) = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$ her $T_k \in D(\alpha)$ için

$$\bigcup_{T' \in \ddot{D}(\alpha)_{T_k}} Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T_k)$$

özelliği sağlanır. Dolayısıyla Teorem 1.1.20 nin (a) şıkkı sağlanmış olur.

Üstelik $Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1)$ ve $Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2)$ olduğundan $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \varnothing$ ve $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \varnothing$ bulunur. Dolayısıyla her $T \in \ddot{D}(\alpha)_T$ nonlimit elemanı için $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ olur. Dolayısıyla Teorem 1.1.20 nin (b) şıkkı sağlanmış olur.

Bunun yanında $\varphi(T_1) \subseteq \varphi(T_3) \subseteq \varphi(T_5)$, $\varphi(T_3) \subseteq \varphi(T_5)$ ve $\varphi(T_4) \subseteq \varphi(T_5)$ olduğundan $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_3) \neq \varnothing$, $Y_1^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \varnothing$ ve $Y_4^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \varnothing$ olur. Böylece

$$B(T_3)=\left\{Z\in \ddot{D}(\alpha)_{T_3} \mid Y_Z^{\alpha}\cap\varphi(T_3)\neq\varnothing\right\}=\{T_1,T_2\}$$

ve

$$B(T_5)=\left\{Z\in \ddot{D}(\alpha)_{T_3} \mid Y_Z^{\alpha}\cap\varphi(T_3)\neq\varnothing\right\}=\{T_1,T_2,T_3,T_4\}$$

elde edilir. Buradan

$$\cup B(T_3)=T_1\cup T_2=T_3 \text{ ve } \cup B(T_5)=T_3\cup T_4=T_5$$

olarak bulunur. Dolayısıyla T_3, T_5 sırasıyla $\ddot{D}(\alpha)_{T_3}$, $\ddot{D}(\alpha)_{T_5}$ kümelerinin limit elemanı olduğundan Teorem 1.1.20 nin (d) şıkkı sağlanır. O halde α, $B_X(D)$ nin regüler elemanı olur. Yani $\alpha\in R_{\varphi}(Q,D')$ elde edilir.■

Sonuç 3.3.3 $Q=\{T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6,T_7,T_8\}$ D nin XI-alt yarılatisi ve Q nun elemanları

$$\begin{aligned}
&T_1\subset T_3\subset T_5\subset T_6\subset T_8,\ T_1\subset T_3\subset T_5\subset T_7\subset T_8,\\
&T_2\subset T_4\subset T_5\subset T_7\subset T_8,\ T_2\subset T_4\subset T_5\subset T_6\subset T_8\\
&T_2\setminus T_1\neq\varnothing,\ T_1\setminus T_2\neq\varnothing,\ T_4\setminus T_3\neq\varnothing,\\
&T_3\setminus T_4\neq\varnothing,\ T_6\setminus T_7\neq\varnothing,\ T_7\setminus T_6\neq\varnothing,\\
&T_2\cup T_1=T_3,\ T_4\cup T_3=T_5,\ T_6\cup T_7=T_8
\end{aligned}$$

koşullarını sağlasın. Üstelik bir $\alpha\in B_X(Q)$ ikili bağıntısı için $V(Q,\alpha)=Q$ ve α nın quasinormal gösterimi $\alpha=\bigcup_{i=0}^{6}\left(Y_i^{\alpha}\times T_i\right)$ biçiminde olsun. Bu durumda α nın sağ birim olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\begin{aligned}
&Y_1^{\alpha}\supseteq T_1,\ Y_2^{\alpha}\supseteq T_2,\ Y_2^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\supseteq T_4,\\
&Y_1^{\alpha}\cup Y_2^{\alpha}\cup Y_3^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\cup Y_5^{\alpha}\cup Y_6^{\alpha}\supseteq T_6,\\
&Y_1^{\alpha}\cup Y_2^{\alpha}\cup Y_3^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\cup Y_5^{\alpha}\cup Y_7^{\alpha}\supseteq T_7,\\
&Y_4^{\alpha}\cap T_4\neq\varnothing,\ Y_6^{\alpha}\cap T_6\neq\varnothing,\ Y_7^{\alpha}\cap T_7\neq\varnothing
\end{aligned}$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 3.3.2 de φ tam α-izomorfizması $V(D,\alpha)$ nın birim dönüşümü olarak alındığında Teorem 1.1.31 den dolayı $\alpha\in B_X(Q)$ elemanı idempotent olur. Ayrıca φ tam

α -izomorfizmasının birim dönüşüm olması durumunda her $T \in Q$ için $\varphi(T)\alpha = T\alpha = T$ olduğundan $V(Q,\alpha) = Q$ olarak elde edilir. Teorem 1.1.13 den $\alpha \in B_X(Q)$ sağ birim olur.■

Teorem 3.1.4 verilen biçimde quasinormal gösterimi olan ikili bağıntılar

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$$

koşulları altında da $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarıdır. Şimdi bu biçimde quasinormal gösterime sahip olmayan $B_X(D)$ nin idempotent elemanlarını belirleyelim.

Teorem 3.3.4 $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen biçimlerde quasinormal gösterimlerden birine sahip olması ve yanlarında verilen koşulları sağlamasıdır.

a) $T,\ T' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ koşullarını sağlar.

b) $T,\ T',\ Z \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

c) $T,\ T',\ Z,\ Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

d) $T \in \{Z_2, Z_1\}$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z_8\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_8^\alpha \supseteq Z$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

e) $T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subseteq Z_3$ $T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$ olmak üzere α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$

biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

f) α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_8^\alpha \times Z_8\right) \cup \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_8^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

g) $Z,\ Z',\ T \in D$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z' \subset T$, $Z \cup Z' \cup T = Z_3$, $Z \setminus Z' \neq \varnothing$ ve $Z' \setminus Z \neq \varnothing$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$ ve $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

h) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z'' \in \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $Z \cup Z' \cup T = Z_3$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_{Z''}^\alpha \times Z''\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_{Z''}^\alpha \cap Z'' \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

i) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}, Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z'' \in \{Z_2, Z_1\}$ ve $Z \cup Z' \cup T = Z_3$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_{Z''}^\alpha \times Z''\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha \supseteq Z''$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha \cap Z'' \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

j) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z', T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$ ve $T \cap Z = \varnothing$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlasın.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı idempotent olsun. Bu durumda $B_X(D)$ kümesinin tanımından $\alpha = \bigcup_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$ olacak şekilde $f: X \to D$ dönüşümü vardır. Dolayısıyla her $x \in X$ için $f(x) \in \{ Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \}$ olur. O halde D nin bir D' alt yarılatisi için

$$\alpha = \bigcup_{T\in D'}(Y_T^\alpha \times T)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$V(D,\alpha) = D' = V(D',\alpha)$$

bulunur. Teorem 1.1.14 den $V(D,\alpha)$ nın D nin XI-alt yarılatisi olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla D', D nin XI-alt yarılatisi olur. Yani D', $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ koşulları altında D nin Lemma 3.3.1 de verilen XI-alt yarılatislerini tarar. O halde α idempotent elemanını (a)-(j) da verilen quasinormal gösterimlerden birine sahiptir. Şimdi de α nın yanlarında verilen koşulları sağladığını gösterelim.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (a) daki gibi olsun ve T, $T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cap T' = \varnothing$ olmak üzere $Q_{12} = \{T, T', T \cup T'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{12}$ olur. Lemma 3.3.1 den dolayı Q_{12}, D nin XI-alt yarılatisidir. Ayrıca $V(Q_{12},\alpha) = Q_{12} = V(D,\alpha)$ olduğu da açıktır. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{12})$ bulunur. O halde Sonuç 1.1.57 den α nın $B_X(Q_{12})$ nin sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul α nın $Y_T^\alpha \supseteq T$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{12})$ nin sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α hem $B_X(Q_{12})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (b) de ki gibi ve T, T', $Z \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $T \cup T' \subset Z$ ve $T \cap T' = \varnothing$ olmak üzere $Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $\alpha = \bigcup_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$ olacak şekilde $f: X \to D$ dönüşümü vardır. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{13}$ olarak bulunur.

Dolayısıyla $\alpha \in B_X\left(Q_{13}\right)$ olur. Lemma 3.3.1 den dolayı Q_{13}, D nin XI-alt yarılatisi ve $V\left(Q_{13},\alpha\right)=Q_{13}=V\left(D,\alpha\right)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.57 den α ikili bağıntısının $B_X\left(Q_{13}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X\left(Q_{13}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X\left(Q_{13}\right)$ nin hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (c) deki gibi ve $T,\ T',\ Z,\ Z' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ ve $T \cap T' = \varnothing$ olmak üzere $Q_{14}=\left\{T,T',T\cup T',Z,Z'\right\}$ olsun. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f\left(x\right) \in Q_{14}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X\left(Q_{14}\right)$ olur. Lemma 3.3.1 den dolayı Q_{14}, D nin XI-alt yarılatisi ve $V\left(Q_{14},\alpha\right)=Q_{14}=V\left(D,\alpha\right)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.57 den dolayı α nın $B_X\left(Q_{14}\right)$ ün sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X\left(Q_{14}\right)$ ün sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X\left(Q_{14}\right)$ ün hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (d) deki gibi ve $T \in \left\{Z_2, Z_1\right\}$ olmak üzere $Q_{15}=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,T,\breve{D}\right\}$ olsun. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f\left(x\right) \in Q_{15}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X\left(Q_{15}\right)$ olur. Lemma 3.3.1 den dolayı Q_{15} D nin XI-alt yarılatisi ve $V\left(Q_{15},\alpha\right)=Q_{15}=V\left(D,\alpha\right)$ olduğu açıktır. Sonuç 1.1.57 den α nın $B_X\left(Q_{15}\right)$ ün sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_8^\alpha \supseteq Z$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X\left(Q_{15}\right)$ ün sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X\left(Q_{15}\right)$ in hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (e) deki gibi ve $T \cap T' = \varnothing$, $T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subseteq Z_3$ olmak üzere $Q_{16} = \{T, T', T \cup T', Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{16}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{16})$ olur. Lemma 3.3.1 den Q_{16} nın D nin XI-alt yarılatisi ve $V(Q_{16}, \alpha) = Q_{16} = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.71 den α ikili bağıntısının $B_X(Q_{16})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α ikili bağıntısı $B_X(Q_{16})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{16})$ nın hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (f) deki gibi ve $Q_{17} = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{17}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{17})$ olur. Lemma 3.3.1 den Q_{17} D nin XI-alt yarılatisi ve $V(Q_{17}, \alpha) = Q_{17} = V(D, \alpha)$ olduğu açıktır. O halde Sonuç 3.2.3 den α ikili bağıntısının $B_X(Q_{17})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_8^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α ikili bağıntısı $B_X(Q_{17})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{17})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (g) deki gibi ve $Q_{18} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{18}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{18})$ olur. Lemma 3.3.1 den Q_{18}, D nin

XI -alt yarılatisi ve $V\left(Q_{18},\alpha\right)=Q_{18}=V\left(D,\alpha\right)$ olduğu da açıktır. Sonuç 1.1.65 den α nın $B_X\left(Q_{18}\right)$ in sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$ ve $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X\left(Q_{18}\right)$ in sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X\left(Q_{18}\right)$ nin hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (h) deki gibi ve $Q_{19}=\left\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z''\right\}$ olsun. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f:X\to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha=\bigcup\limits_{x\in X}\left(\left\{x\right\}\times f\left(x\right)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x\in X$ için $f\left(x\right)\in Q_{19}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha\in B_X\left(Q_{19}\right)$ olur. Lemma 3.3.1 den dolayı Q_{19}, D nin XI -alt yarılatisi ve $V\left(Q_{19},\alpha\right)=Q_{19}=V\left(D,\alpha\right)$ olduğu da açıktır. Sonuç 1.1.65 den α nın $B_X\left(Q_{19}\right)$ nin sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_{Z''}^\alpha \cap Z'' \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X\left(Q_{19}\right)$ nin sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X\left(Q_{19}\right)$ nin hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanıdır.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (i) deki gibi ve $Q_{20}=\left\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z'',\breve{D}\right\}$ olsun. Lemma 3.3.1 den dolayı Q_{20}, D nin XI -alt yarılatisi olarak bulunur. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f:X\to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha=\bigcup\limits_{x\in X}\left(\left\{x\right\}\times f\left(x\right)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x\in X$ için $f\left(x\right)\in Q_{20}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha\in B_X\left(Q_{20}\right)$ ve $V\left(Q_{20},\alpha\right)=Q_{20}=V\left(D,\alpha\right)$ olduğu da açıktır. Sonuç 1.1.65 den α ikili bağıntısının $B_X\left(Q_{20}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha \supseteq Z''$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha \cap Z'' \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X\left(Q_{20}\right)$ nin sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X\left(Q_{20}\right)$ nin hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (j) deki gibi ve $Q_{21} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{21}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{21})$ olur. Lemma 3.3.1 den dolayı Q_{21}, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(Q_{21}, \alpha) = Q_{21} = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{21})$ olur. Sonuç 3.3.3 den α nın $B_X(Q_{21})$ in sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z \cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z \cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{21})$ in sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{21})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.■

Lemma 3.3.5 X sonlu ve D nin XI -alt yarılatisi olan $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ nun elemanları

$$\begin{aligned}
&T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8,\ T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_7 \subset T_8,\\
&T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset T_7 \subset T_8,\ T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8\\
&T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_4 \setminus T_3 \neq \varnothing,\\
&T_3 \setminus T_4 \neq \varnothing,\ T_6 \setminus T_7 \neq \varnothing,\ T_7 \setminus T_6 \neq \varnothing,\\
&T_2 \cup T_1 = T_3,\ T_4 \cup T_3 = T_5,\ T_6 \cup T_7 = T_8.
\end{aligned}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3, (\overline{T}_6 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_5, \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7, \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6, \mathrm{X} \setminus \overline{T}_8\}$$

kümesi X in parçalanışıdır.

İspat: Q, XI -alt yarılatis olduğundan Teorem 2.12 den dolayı $T_4 \cap T_1 = P_8 \cup P_2 = \varnothing$ olur. Bu durumda $P_8 = P_2 = \varnothing$ olur. O halde (2.12) deki formal eşitliklerden $P_1 = T_2$, $P_3 = T_4 \setminus T_3$, $P_4 = T_1$, $P_5 = (T_7 \cap T_6) \setminus T_5$, $P_6 = T_7 \setminus T_6$, $P_7 = T_6 \setminus T_7$ olarak elde edilir. Ayrıca $C(Q) = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$, Q nun karakteristik kümeler ailesi olduğundan P_i ler ikişer ikişer ayrık ve $\bigcup_{i=0}^{6} P_i = T_0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\left\{\overline{T}_1,\overline{T}_2,\overline{T}_4\setminus\overline{T}_3,\left(\overline{T}_6\cap\overline{T}_7\right)\setminus\overline{T}_5,\overline{T}_6\setminus\overline{T}_7,\overline{T}_7\setminus\overline{T}_6,X\setminus\overline{T}_8\right\}$$

kümesi X in parçalanışı olur.■

Lemma 3.3.6 X sonlu ve D nin XI -alt yarılatisi olan $Q=\{T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6,T_7,T_8\}$ nun elemanları

$$\begin{aligned}
&T_1\subset T_3\subset T_5\subset T_6\subset T_8,\ T_1\subset T_3\subset T_5\subset T_7\subset T_8,\\
&T_2\subset T_4\subset T_5\subset T_7\subset T_8,\ T_2\subset T_4\subset T_5\subset T_6\subset T_8\\
&T_2\setminus T_1\neq\varnothing,\ T_1\setminus T_2\neq\varnothing,\ T_4\setminus T_3\neq\varnothing,\\
&T_3\setminus T_4\neq\varnothing,\ T_6\setminus T_7\neq\varnothing,\ T_7\setminus T_6\neq\varnothing,\\
&T_2\cup T_1=T_3,\ T_4\cup T_3=T_5,\ T_6\cup T_7=T_8
\end{aligned}$$

koşullarını sağlasın. Ayrıca $f:X\to D$ dönüşümünün $\overline{T}_1,\ \overline{T}_2,\ \overline{T}_4\setminus\overline{T}_3,\ \left(\overline{T}_6\cap\overline{T}_7\right)\setminus\overline{T}_5,\ \overline{T}_6\setminus\overline{T}_7,$ $\overline{T}_7\setminus\overline{T}_6$ ve $X\setminus\overline{T}_8$ kümeleri üzerine kısıtlanışı aşağıdaki gibi olsun.

$$\begin{aligned}
&f_1:\overline{T}_1\to\{T_1\},\\
&f_2:\overline{T}_2\to\{T_2\},\\
&f_3:\overline{T}_4\setminus\overline{T}_3\to\{T_2,T_4\}\ \text{ve}\ \exists a\in\overline{T}_4\setminus\overline{T}_3\ \text{için}\, f_3(a)=T_4,\\
&f_4:\left(\overline{T}_6\cap\overline{T}_7\right)\setminus\overline{T}_5\to\{T_1,T_2,T_3,T_4,T_5\}\ ,\\
&f_5:\overline{T}_6\setminus\overline{T}_7\to\{T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6\}\ \text{ve}\ \exists b\in\overline{T}_6\setminus\overline{T}_7\ \text{için}\, f_5(b)=T_6,\\
&f_6:\overline{T}_7\setminus\overline{T}_6\to\{T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_7\}\ \text{ve}\ \exists c\in\overline{T}_7\setminus\overline{T}_6\ \text{için}\, f_6(c)=T_7,\\
&f_7:X\setminus\overline{T}_8\to Q.
\end{aligned}$$

O zaman $f=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7)$ ayrık dönüşümlerin sıralı sistemi olup bu şekildeki ayrık dönüşümlerin sıralı sistemlerinin kümesi F olmak üzere $\left|R_\varphi(Q,D')\right|=|\mathrm{F}|$ dir.

İspat: $\alpha\in R_\varphi(Q,D')$ olsun. Bu durumda $\alpha\in B_X(D)$ regüler, $V(D,\alpha)=Q$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.3.2 den dolayı Q dan D nin $D'=\{\varphi(T_1),\varphi(T_2),\varphi(T_3),\varphi(T_4),\varphi(T_5),\varphi(T_6),\varphi(T_7),\varphi(T_8)\}$ alt yarılatisine bir φ tam α - izomorfizması

$$\begin{aligned}
&Y_1^\alpha\supseteq\varphi(T_1),\ Y_2^\alpha\supseteq\varphi(T_2),\ Y_2^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq\varphi(T_4),\\
&Y_1^\alpha\cup Y_2^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_6^\alpha\supseteq\varphi(T_6),\\
&Y_1^\alpha\cup Y_2^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_7^\alpha\supseteq\varphi(T_7),\\
&Y_4^\alpha\cap\varphi(T_4)\neq\varnothing,\ Y_6^\alpha\cap\varphi(T_6)\neq\varnothing,\ Y_7^\alpha\cap\varphi(T_7)\neq\varnothing
\end{aligned}$$

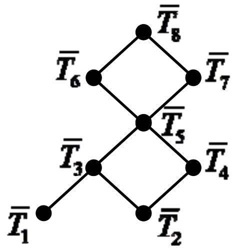
koşullarını sağlar. Ayrıca $i \in \{1,2,...,8\}$ için $\varphi(T_i)$ ler $\overline{T}_i$ ile gösterilinirse

$D' = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3, \overline{T}_4, \overline{T}_5, \overline{T}_6, \overline{T}_7, \overline{T}_8\}$ olur ve α regüler elemanı

$$Y_1^\alpha \supseteq \overline{T}_1,\ Y_2^\alpha \supseteq \overline{T}_2,\ Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \overline{T}_4,$$
$$Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq \overline{T}_6,$$
$$Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha \supseteq \overline{T}_7,$$
$$Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4 \neq \varnothing,\ Y_6^\alpha \cap \overline{T}_6 \neq \varnothing,\ Y_7^\alpha \cap \overline{T}_7 \neq \varnothing$$

koşullarını sağlar.

Q ve D' tam α-izomorf olduğundan XI-alt yarılatisinin diyagramı Şekil 14 deki gibidir.



Şekil 14. Elemanları (2.11) koşullarını sağlayan Q yarılatisine tam α-izomorf olan D' yarılatisinin diyagramı.

Ayrıca tam α-izomorfizm altında ayrık kümelerin görüntüsü ayrık ve $D' \subseteq D$ olduğundan $\{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3, (\overline{T}_6 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_5, \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7, \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6, X \setminus \overline{T}_8\}$ kümesi de X in parçalanışıdır. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan α ikili bağıntısı bir $f_\alpha : X \to D$ dönüşümü ile tanımlıdır. f_α dönüşümünün $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3$, $(\overline{T}_6 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_5$, $\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7$, $\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6$ ve $X \setminus \overline{T}_8$ kümeleri üzerine kısıtlanışı sırasıyla $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}$ ve $f_{7\alpha}$ olsun. Şimdi Y_i^α kümelerinden faydalanarak $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}$ ve $f_{7\alpha}$ dönüşümlerinin özelliklerini bulalım.

$t \in \overline{T}_1$ olsun. $\overline{T}_1 \subseteq Y_1^\alpha$ olduğundan $t \in Y_1^\alpha \Rightarrow t\alpha = T_1 \Rightarrow \forall t \in \overline{T}_1$ için $f_{1\alpha}(t) = T_1$ olur.

$t \in \overline{T}_2$ olsun. $\overline{T}_2 \subseteq Y_2^\alpha$ olduğundan $t \in Y_2^\alpha$ olur. O halde $t\alpha = T_2$ dır. Buradan $\forall t \in \overline{T}_2$ için $f_{2\alpha}(t) = T_2$ olur.

$t \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3$ olsun. O zaman $\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3 \subseteq \overline{T}_4 \subseteq Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha$ olduğundan $\forall t \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3$ için $f_{3\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_2, T_4\}$ olur. Ayrıca $Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4 \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t_1 \in Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4$ vardır.

Buradan $t_1\alpha = T_4$ ve $t_1 \in \overline{T}_4$ dir. $t_1 \in \overline{T}_3$ olduğunu varsayalım. $\overline{T}_3 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha$ olduğundan $t_1\alpha \in \{T_1, T_2\}$ olur. Bu da $T_4 \notin \{T_1, T_2\}$ olduğundan çelişkidir. O halde $t_1 \notin \overline{T}_3$ dir. Yani $Y_4^\alpha \cap \overline{T}_4 \subseteq \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3$ olur. O halde en az bir için $t_1 \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3$ $f_{3\alpha}(t_1) = t_1\alpha = T_4$ olur.

$t \in (\overline{T}_6 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_5$ olsun. O zaman $(\overline{T}_6 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_5 \subseteq \overline{T}_6 \cap \overline{T}_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha$ olduğundan $\forall t \in (\overline{T}_6 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_5$ için $f_{4\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$ olur.

$t \in \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7$ olsun. O zaman $\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7 \subseteq \overline{T}_6 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha$ olduğundan $\forall t \in \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7$ için $f_{5\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ olur. Bununla birlikte $Y_6^\alpha \cap \overline{T}_6 \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t_2 \in Y_6^\alpha \cap \overline{T}_6$ vardır. O halde $t_2\alpha = T_6$ ve $t_2 \in \overline{T}_6$. $t_2 \in \overline{T}_7$ olduğunu kabul edelim. $\overline{T}_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha$ olduğundan $t_2\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$ olur. Bu ise $T_6 \notin \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$ olduğundan çelişkidir. O halde $t_2 \notin \overline{T}_7$ dir. Yani $Y_6^\alpha \cap \overline{T}_6 \subseteq \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7$ olur. O halde en az bir $t_2 \in \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7$ $f_{5\alpha}(t_2) = t_2\alpha = T_6$ olur.

$t \in \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6$ olsun. O zaman $\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6 \subseteq \overline{T}_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha$ olduğundan $\forall t \in \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6$ için $f_{6\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\}$ olur. Bunun yanında $Y_7^\alpha \cap \overline{T}_7 \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t_3 \in Y_7^\alpha \cap \overline{T}_7$ vardır. O halde $t_3\alpha = T_7$ ve $t_2 \in \overline{T}_7$. $t_3 \in \overline{T}_6$ olduğunu varsayalım. $\overline{T}_6 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha$ olduğundan $t_2\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ olur. Bu da $T_7 \notin \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ olduğundan çelişkidir. O halde $t_3 \notin \overline{T}_6$ dir. Yani $Y_7^\alpha \cap \overline{T}_7 \subseteq \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6$ olup en az bir $t_3 \in \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6$ için $f_{6\alpha}(t_3) = t_3\alpha = T_7$ olur.

$t \in X \setminus \overline{T}_8$ olsun. O zaman $X \setminus \overline{T}_8 \subseteq X = Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_8^\alpha$ olduğundan $\forall t \in X \setminus \overline{T}_8$ için $f_{7\alpha}(t) = t\alpha \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ olur.

O halde $f_\alpha = (f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}) \in \mathbf{F}$ dir. Böylece $R_\varphi(Q, D')$ kümesinin her α elemanına karşılık bir $f_\alpha = (f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha})$ ayrık dönüşümlerin sıralı sisteminin var olduğu görülür.

Şimdi $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \in \mathbf{F}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{F}$ kümesinin tanımından, $f : X \to D$ dönüşümünün $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3$, $(\overline{T}_6 \cap \overline{T}_7) \setminus \overline{T}_5$, $\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7$, $\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6$, $X \setminus \overline{T}_8$ kümeleri üzerine kısıtlanışları

$$
\begin{aligned}
&f_1 : \overline{T}_1 \to \{T_1\}, \\
&f_2 : \overline{T}_2 \to \{T_2\}, \\
&f_3 : \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3 \to \{T_2, T_4\} \text{ ve } \exists a \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3 \text{ için } f_3(a) = T_4, \\
&f_4 : \left(\overline{T}_6 \cap \overline{T}_7\right) \setminus \overline{T}_5 \to \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}, \\
&f_5 : \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7 \to \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\} \text{ ve } \exists b \in \overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7 \text{ için } f_5(b) = T_6, \\
&f_6 : \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6 \to \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\} \text{ ve } \exists c \in \overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6 \text{ için } f_6(c) = T_7, \\
&f_7 : X \setminus \overline{T}_8 \to Q.
\end{aligned}
$$

özelliklerini sağlar. Bu dönüşümlerden faydalanarak

$$\beta = \bigcup_{x \in X} \left(\{x\} \times f(x)\right)$$

ikili bağıntısını tanımlayalım. β ikili bağıntısı f dönüşümü ile tanımlandığından $\beta \in B_X(D)$ olur. Ayrıca β nın tanımından dolayı da $f(x) = x\beta$ olur. $i \in \{1, 2, ..., 8\}$ için Y_i^β kümelerinin tanımından

$$\beta = \bigcup_{k=1}^{8} \left(Y_k^\beta \times T_k\right)$$

biçiminde yazılabilir. Öte yandan φ, tam α-izomorfizm olduğundan $D'(\alpha) = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3, \overline{T}_4, \overline{T}_5, \overline{T}_6, \overline{T}_7\}$ kümesi de D' nün üreteci olur. Ayrıca $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}_4$, $\overline{T}_6$, $\overline{T}_7$ kümeleri sırasıyla $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_1}$, $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_2}$, $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_3}$, $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_6}$ ve $\ddot{D}'(\alpha)_{\overline{T}_7}$ kümelerinin nonlimit elemanıdır. O halde nonlimit elemanların sağladığı özellikleri bulalım.

$$t \in \overline{T}_1 \Rightarrow f(t) = f_1(t) = t\beta = T_1 \Rightarrow t \in Y_1^\beta \Rightarrow \overline{T}_1 \subseteq Y_1^\beta$$

$$t \in \overline{T}_2 \Rightarrow f(t) = f_2(t) = t\beta = T_2 \Rightarrow t \in Y_2^\beta \Rightarrow \overline{T}_2 \subseteq Y_2^\beta,$$

$$t \in \overline{T}_4 = \left(\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3\right) \cup \overline{T}_2 \Rightarrow f(t) = t\beta \in \{T_2, T_4\} \Rightarrow t \in Y_2^\beta \cup Y_4^\beta \Rightarrow \overline{T}_4 \subseteq Y_2^\beta \cup Y_4^\beta,$$

$$
\begin{aligned}
t \in \overline{T}_6 = \left(\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7\right) \cup \left(\left(\overline{T}_6 \cap \overline{T}_7\right) \setminus \overline{T}_5\right) \cup \overline{T}_5 &\Rightarrow f(t) = t\beta \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\} \\
&\Rightarrow t \in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \\
&\Rightarrow \overline{T}_6 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t \in \overline{T}_7 = \left(\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6\right) \cup \left(\left(\overline{T}_6 \cap \overline{T}_7\right) \setminus \overline{T}_5\right) \cup \overline{T}_5 &\Rightarrow f(t) = t\beta \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7\} \\
&\Rightarrow t \in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha \\
&\Rightarrow \overline{T}_7 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_7^\alpha
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca en az bir $a \in \overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3$ için $f_3(a) = T_4$ olduğundan $a \in Y_4^\beta \cap \overline{T}_4$ dir. Buradan $Y_4^\beta \cap \overline{T}_4 \neq \varnothing$ dir. Benzer olarak f_5 ve f_6 dönüşümlerinin özellikleri düşünüldüğünde $Y_6^\beta \cap \overline{T}_6 \neq \varnothing$ ve $Y_7^\beta \cap \overline{T}_7 \neq \varnothing$ elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
&Y_1^\beta \supseteq \overline{T}_1,\ Y_2^\beta \supseteq \overline{T}_2,\ Y_2^\beta \cup Y_4^\beta \supseteq \overline{T}_4,\\
&Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta \cup Y_5^\beta \cup Y_6^\beta \supseteq \overline{T}_6,\\
&Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \cup Y_4^\beta \cup Y_5^\beta \cup Y_7^\beta \supseteq \overline{T}_7,\\
&Y_4^\beta \cap \overline{T}_4 \neq \varnothing,\ Y_6^\beta \cap \overline{T}_6 \neq \varnothing,\ Y_7^\beta \cap \overline{T}_7 \neq \varnothing
\end{aligned}$$

bulunur. $V(D,\beta) = \{Y\beta \mid Y \in D\}$, $\overline{T}_i\beta = \bigcup_{x \in \overline{T}_i} x\beta$, $D' \subseteq D$ ve f dönüşümünün özellikleri dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
&\overline{T}_1\beta = T_1 \Rightarrow T_1 \in V(D,\beta),\\
&\overline{T}_2\beta = T_2 \Rightarrow T_2 \in V(D,\beta),\\
&\overline{T}_3\beta = \left(\overline{T}_1 \cup \overline{T}_2\right)\beta = \overline{T}_1\beta \cup \overline{T}_2\beta = T_1 \cup T_2 = T_3 \Rightarrow T_3 \in V(D,\beta),\\
&\overline{T}_4\beta = \left(\left(\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3\right) \cup \overline{T}_2\right)\beta = \left(\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3\right)\beta \cup \overline{T}_2\beta = T_2 \cup T_4 = T_4 \Rightarrow T_4 \in V(D,\beta),\\
&\overline{T}_5\beta = \left(\overline{T}_3 \cup \overline{T}_4\right)\beta = \overline{T}_3\beta \cup \overline{T}_4\beta = T_3 \cup T_4 = T_5 \Rightarrow T_5 \in V(D,\beta),\\
&\overline{T}_6\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6 = T_6 \Rightarrow T_6 \in V(D,\beta),\\
&\overline{T}_7\beta = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_7 = T_7 \Rightarrow T_7 \in V(D,\beta),\\
&\overline{T}_8\beta = \left(\overline{T}_6 \cup \overline{T}_7\right)\beta = \overline{T}_6\beta \cup \overline{T}_7\beta = T_6 \cup T_7 = T_8 \Rightarrow T_8 \in V(D,\beta)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $Q \subseteq V(D,\beta)$ olur. Öte yandan

$$\begin{aligned}
Z \in V(D,\beta) &\Rightarrow Z = Y\beta,\ \exists Y \in D\\
&\Rightarrow Z = Y\beta = \bigcup_{y \in Y} y\beta = \bigcup_{y \in Y} f(y) \in Q
\end{aligned}$$

olduğundan $V(D,\beta) \subseteq Q$ bulunur. Sonuç olarak $V(D,\beta) = Q$ elde edilir.

Ayrıca her $T \in V(D,\beta)$ için $\varphi(T)\beta = \overline{T}\beta = T$ olduğundan φ tam β-izomorfizmasıdır. Teorem 3.3.2 den $\beta \in R_\varphi(Q,D')$ elde edilir. Yani her bir ayrık dönüşümlerin sıralı sistemine karşılık gelen $R_\varphi(Q,D')$ kümesinde bir regüler eleman vardır.

Şimdi $\alpha,\beta \in R_\varphi(Q,D')$ ve $\alpha \neq \beta$ olsun. Bu durumda α ya karşılık $f_\alpha(t) = t\alpha$ olacak şekilde $f_\alpha = \left(f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}, f_{7\alpha}\right)$ sıralı sistemi ve β ya karşılık $f_\beta(t) = t\beta$ olacak şekilde $f_\beta = \left(f_{1\beta}, f_{2\beta}, f_{3\beta}, f_{4\beta}, f_{5\beta}, f_{6\beta}, f_{7\beta}\right)$ sıralı sistemi vardır. $f_\alpha = f_\beta$

olsa her $t \in X$ için $f_\alpha(t) = f_\beta(t)$ olur. Bu ise her $t \in X$ için $t\alpha = t\beta$ olmasını gerektirir. Buradan $\alpha = \beta$ elde edilir. Bu da kabulümüz ile çelişir. O halde $f_\alpha \neq f_\beta$ dır.

Sonuç olarak $R_\varphi(Q, D')$ ile $\mathbb{F}$ arasında bire-bir eşleme vardır. Dolayısıyla $|R_\varphi(Q, D')| = |\mathbb{F}|$ olur.■

Teorem 3.3.7 X sonlu ve D nin XI -alt yarılatisi olan $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ nun elemanları

$$
\begin{aligned}
&T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8,\ T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_7 \subset T_8,\\
&T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset T_7 \subset T_8,\ T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8\\
&T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_4 \setminus T_3 \neq \varnothing,\\
&T_3 \setminus T_4 \neq \varnothing,\ T_6 \setminus T_7 \neq \varnothing,\ T_7 \setminus T_6 \neq \varnothing,\\
&T_2 \cup T_1 = T_3,\ T_4 \cup T_3 = T_5,\ T_6 \cup T_7 = T_8
\end{aligned}
$$

koşullarını sağlasın. Eğer Q ve $D' = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3, \overline{T}_4, \overline{T}_5, \overline{T}_6, \overline{T}_7, \overline{T}_8\}$ kümeleri tam α -izomorf ise $\Omega(Q) = m_0$ olmak üzere

$$
|R(D')| = m_0 \cdot 2 \cdot \left(2^{|\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3|} - 1\right) \cdot 5^{|(\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \setminus \overline{T}_5|} \cdot \left(6^{|\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6|} - 5^{|\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6|}\right) \cdot \left(6^{|\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7|} - 5^{|\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \overline{T}_8|}
$$

olur.

İspat: Lemma 3.3.6 dan, $R_\varphi(Q, D')$ nün eleman sayısı, $\mathbb{F}$ kümesinde ki birbirinden farklı sıralı sistemlerin sayısına eşittir. Teorem 1.1.10 dan faydalanarak birbirinden farklı yazılabilecek $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ ve f_7 fonksiyonlarının sayısı sırayla

$$
1,\ 1,\ \left(2^{|\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3|} - 1\right),\ 5^{|(\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \setminus \overline{T}_5|},\ \left(6^{|\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6|} - 5^{|\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6|}\right),\ \left(6^{|\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7|} - 5^{|\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7|}\right),\ 8^{|X \setminus \overline{T}_8|}
$$

olarak bulunur. O halde

$$
|R_\varphi(Q, D')| = \left(2^{|\overline{T}_4 \setminus \overline{T}_3|} - 1\right) \cdot 5^{|(\overline{T}_7 \cap \overline{T}_6) \setminus \overline{T}_5|} \cdot \left(6^{|\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6|} - 5^{|\overline{T}_7 \setminus \overline{T}_6|}\right) \cdot \left(6^{|\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7|} - 5^{|\overline{T}_6 \setminus \overline{T}_7|}\right) \cdot 8^{|X \setminus \overline{T}_8|}
$$

olaral elde edilir.

Ayrıca Q nun otomorfizmleri,

$$
id_Q = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 & T_8 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 & T_8 \end{pmatrix} \text{ ve } h = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 & T_8 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_7 & T_6 & T_8 \end{pmatrix}
$$

olup iki tanedir. Teorem 1.1.29 dan dolayı

$$\left|R\left(D'\right)\right| = m_0 \cdot 2 \cdot \left(2^{\left|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_3\right|} - 1\right) \cdot 5^{\left|\left(\bar{T}_7 \cap \bar{T}_6\right) \setminus \bar{T}_5\right|} \cdot \left(6^{\left|\bar{T}_7 \setminus \bar{T}_6\right|} - 5^{\left|\bar{T}_7 \setminus \bar{T}_6\right|}\right) \cdot \left(6^{\left|\bar{T}_6 \setminus \bar{T}_7\right|} - 5^{\left|\bar{T}_6 \setminus \bar{T}_7\right|}\right) \cdot 8^{\left|X \setminus \bar{T}_8\right|}$$

olarak elde edilir.■

Sonuç 3.3.8 X sonlu ve D nin XI -alt yarılatisi olan $Q = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$ nun elemanları

$$\begin{aligned} & T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8,\ T_1 \subset T_3 \subset T_5 \subset T_7 \subset T_8, \\ & T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset T_7 \subset T_8,\ T_2 \subset T_4 \subset T_5 \subset T_6 \subset T_8 \\ & T_2 \setminus T_1 \neq \varnothing,\ T_1 \setminus T_2 \neq \varnothing,\ T_4 \setminus T_3 \neq \varnothing, \\ & T_3 \setminus T_4 \neq \varnothing,\ T_6 \setminus T_7 \neq \varnothing,\ T_7 \setminus T_6 \neq \varnothing, \\ & T_2 \cup T_1 = T_3,\ T_4 \cup T_3 = T_5,\ T_6 \cup T_7 = T_8 \end{aligned}$$

koşullarını sağlasın. O zaman $B_X(Q)$ nun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(2^{\left|T_4 \setminus T_3\right|} - 1\right) \cdot 5^{\left|\left(T_7 \cap T_6\right) \setminus T_5\right|} \cdot \left(6^{\left|T_7 \setminus T_6\right|} - 5^{\left|T_7 \setminus T_6\right|}\right) \cdot \left(6^{\left|T_6 \setminus T_7\right|} - 5^{\left|T_6 \setminus T_7\right|}\right) \cdot 8^{\left|X \setminus T_8\right|}$$

olur.

İspat: Teorem 1.1.32 den dolayı $E_X^{(r)}(Q) = R_{id_Q}(Q, Q)$ dur. $D' = Q$ olarak alınırsa $\left|R_{id_Q}(Q, Q)\right| = \left|R_\varphi(Q, Q)\right|$ olur. O halde Teorem 3.3.7 den dolayı

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(2^{\left|T_4 \setminus T_3\right|} - 1\right) \cdot 5^{\left|\left(T_7 \cap T_6\right) \setminus T_5\right|} \cdot \left(6^{\left|T_7 \setminus T_6\right|} - 5^{\left|T_7 \setminus T_6\right|}\right) \cdot \left(6^{\left|T_6 \setminus T_7\right|} - 5^{\left|T_6 \setminus T_7\right|}\right) \cdot 8^{\left|X \setminus T_8\right|}$$

olarak bulunur.■

Şimdi X sonlu bir küme ve

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 = \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$$

olsun. Bu durumda $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarınının sayısını bulalım.

Lemma 3.3.9 X sonlu ise

$$\left|I^*\left(Q_{12}\right)\right| = 3^{\left|X \setminus Z_3\right|} + 3^{\left|X \setminus Z_5\right|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan dolayı $T,\ T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere $Q_{12} = \{T, T', T \cup T'\}$ XI -alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{12})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{12}\right)\right| = 3^{\left|X \setminus \left(T \cup T'\right)\right|}$$

olur. Bu durumda

$$Q_{12}\vartheta_{XI} = \{\{Z_8, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_5\}\} \text{ ve } \left|I^*(Q_{12})\right| = \sum_{D' \in Q_{12}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}(D')\right|$$

olduğundan

$$\left|I^*(Q_{12})\right| = 3^{|X \setminus Z_3|} + 3^{|X \setminus Z_5|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.3.10 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_{13})\right| = &\left(4^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \\ &\left(4^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \\ &\left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_3|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ &\left(4^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan faydalanarak $T,\ T',\ Z \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z$ olmak üzere $Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{13})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{13})\right| = \left(4^{|Z \setminus (T \cup T')|} - 3^{|Z \setminus (T \cup T')|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z|}$$

olarak bulunur. Üstelik

$$\begin{aligned}Q_{13}\vartheta_{XI} = \{&\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}, \\ &\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}\}\end{aligned}$$

ve $\left|I^*(Q_{13})\right| = \sum_{D' \in Q_{13}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_{13})\right| = &\left(4^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \\ &\left(4^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \\ &\left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_3|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ &\left(4^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.3.11 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{14}\right)\right| &= \left(4^{|Z_1\setminus Z_5|}-3^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\\ &\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot\\ &5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_2\setminus Z_5|}-3^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\\ &\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|}+\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan dolayı $T,\ T',\ Z,\ Z'\in D$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ ve $T\cup T'\subset Z\subset Z'$ olmak üzere $Q_{14}=\{T,T',T\cup T',Z,Z'\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{14}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{14}\right)\right|=\left(4^{|Z\setminus(T\cup T')|}-3^{|Z\setminus(T\cup T')|}\right)\cdot\left(5^{|Z'\setminus Z|}-4^{|Z'\setminus Z|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z'|}$$

olur. Üstelik

$$\begin{aligned}Q_{14}\vartheta_{XI}=\Big\{&\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\},\\ &\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\}\Big\}\end{aligned}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{14}\right)\right|=\sum\limits_{D'\in Q_{14}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{14}\right)\right| &= \left(4^{|Z_1\setminus Z_5|}-3^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\\ &\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot\\ &5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_2\setminus Z_5|}-3^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\\ &\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|}+\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.3.12 X sonlu ise

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{15}\right)\right| &= \left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan dolayı $Q_{15}=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,T,\breve{D}\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{15}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{15}\right)\right|=\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|T\setminus Z_3\right|}-4^{\left|T\setminus Z_3\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus T\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus T\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Q_{15}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{15}\right)\right|=\sum_{D'\in Q_{15}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğu kullanılarak

$$\left|I^*\left(Q_{15}\right)\right|=\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-4^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.3.13 X sonlu ise

$$\left|I^*\left(Q_{16}\right)\right|=3^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$3^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.71 den dolayı $T,\ T'\in\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_4\right\}$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ ve $T\cup T'\subseteq Z_3$ olmak üzere $Q_{16}=\left\{T,T',T\cup T',Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{16}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{16}\right)\right|=3^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus(T\cup T')\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur. Üstelik

$$Q_{16}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{16}\right)\right|=\sum_{D'\in Q_{16}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\left|I^*\left(Q_{16}\right)\right|=3^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$3^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.3.14 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{17}\right)\right| = 4^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: Sonuç 3.2.8 den dolayı $Q_{17}=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{17}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{17}\right)\right| = 4^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak bulunur. Buradan

$$Q_{17}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{17}\right)\right|=\sum\limits_{D'\in Q_{17}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğu kullanılarak

$$\left|I^*\left(Q_{17}\right)\right| = 4^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.3.15 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{18}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 5^{\left|X\setminus Z_3\right|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.67 den dolayı $Z,\ Z',\ T\in D$, $Z'\subset T$, $Z\cup Z'\cup T=Z_3$, $Z\setminus Z'\neq\varnothing$, $Z'\setminus Z\neq\varnothing$ ve $Z\cap T=\varnothing$ olmak üzere $Q_{18}=\left\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{18}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{18}\right)\right|=\left(2^{\left|T\setminus(Z\cup Z')\right|}-1\right)\cdot 5^{\left|X\setminus Z_3\right|}$$

olarak bulunur. Üstelik

$$Q_{18}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{18}\right)\right|=\sum\limits_{D'\in Q_{18}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\left|I^*\left(Q_{18}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 5^{\left|X\setminus Z_3\right|}$$

elde edilir.■

Lemma 3.3.16 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{19}\right)\right|=\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.67 den dolayı $Z,\,Z',\,T,\,Z''\in D$, $Z'\subset T$, $Z\cup Z'\cup T=Z_3$, $Z\setminus Z'\neq\varnothing$, $Z'\setminus Z\neq\varnothing$, $Z_3\subset Z''$ ve $Z\cap T=\varnothing$ olmak üzere $Q_{19}=\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z''\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{19}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{19}\right)\right|=\left(2^{|T\setminus(Z\cup Z')|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z''\setminus Z_3|}-5^{|Z''\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z''|}$$

olarak bulunur. Üstelik

$$Q_{19}\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{19}\right)\right|=\sum\limits_{D'\in Q_{19}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\left|I^*\left(Q_{19}\right)\right|=\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.3.17 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{20}\right)\right|=\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.67 den $Q_{20}=\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z'',\breve{D}\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{20}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{20}\right)\right|=\left(2^{|T\setminus(Z\cup Z')|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z''\setminus Z_3|}-5^{|Z''\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z''|}-6^{|\breve{D}\setminus Z''|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur. Buradan

$$Q_{20}\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{20}\right)\right| = \sum_{D'\in Q_{20}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğu kullanılarak

$$\left|I^*\left(Q_{20}\right)\right| = \left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-6^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-6^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.3.18 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I\left(Q_{21}\right)\right| = \left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: Sonuç 3.3.8 den dolayı $Z,\, Z'\in\left\{Z_8, Z_7\right\}$, $Z\neq Z'$, $T\in\left\{Z_6, Z_4\right\}$, $Z'\subset T$ ve $Z\cap T=\varnothing$ olmak üzere $Q_{21}=\left\{Z, Z', Z\cup Z', T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$, XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{21}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{21}\right)\right| = \left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur. Bu durumda

$$Q_{21}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{21}\right)\right| = \sum_{D'\in Q_{21}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\left|I\left(Q_{21}\right)\right| = \left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

elde edilir.■

Teorem 3.3.19 X sonlu bir küme ve $Z_8\cap Z_7=\varnothing$, $Z_8\cap Z_4=\varnothing$ ve $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$ olsun. Bu durumda $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanlarının sayısı

$$\left|I_D\right| = \sum_{i=1}^{21}\left|I^*\left(Q_i\right)\right|$$

olur.

İspat: Teorem 1.1.34-(c) den dolayı $\left|I_D\right| = \sum_{i=1}^{21}\left|I^*\left(Q_i\right)\right|$ olur.■

3.4. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ Koşulları Altında İdempotent Elemanlar

Bu bölümde birleşimlerin tam X-yarılatisi D ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X(D)$ nin

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$$

koşulları altında idempotent elemanlarının özellikleri ve X kümesinin sonlu olması durumunda idempotent elemanlarının sayısı belirlenecektir.

Lemma 3.1.1. de verilen D nin tam X -alt yarılatislerinin hepsi bütün koşullar altında XI -alt yarılatisler olduğundan

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$$

koşulları altında bunlar dışında kalan D nin tam XI -alt yarılatislerini bulalım.

Lemma 3.4.1 $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ olsun. Bu durumda aşağıda verilen D nin tam X -alt yarılatisleri XI -alt yarılatislerdir.

1) $\{Z_7, Z_6, Z_3\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5\}$ (Diyagram 12, Şekil 7);

2) $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}$ (Diyagram 13, Şekil 7);

3) $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\}$(Diyagram 14, Şekil 7);

4) $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$ (Diyagram 15, Şekil 7);

5) $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (Diyagram 16, Şekil 7);

6) $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (Diyagram 17, Şekil 7);

7) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\}$ (Diyagram 18, Şekil 7);

8) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}$ (Diyagram 19, Şekil 7);

9) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$ (Diyagram 20, Şekil 7);

10) $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (Diyagram 21, Şekil 7)

İspat: Lemma 2.8 den D nin tam X-alt yarılatislerinden 1 den 5 e kadar verilenler XI-alt yarılatislerdir. Sonuç 2.10 dan dolayı $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, D nin XI-alt yarılatisidir. Lemma 2.11 den dolayı D nin tam X-alt yarılatislerinden 7 den 9 a kadar verilenler XI-alt yarılatis olurlar. Teorem 2.12 den dolayı 12 de verilen D nin tam X-alt yarılatisi XI-alt yarılatis olur.■

Teorem 3.1.4 verilen biçimde quasinormal gösterime sahip olan ikili bağıntılar

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$$

koşulları altında da $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarıdır. Şimdi bu biçimde quasinormal gösterime sahip olmayan $B_X(D)$ nin idempotent elemanlarını belirleyelim.

Teorem 3.4.2 $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıda belirtilen quasinormal gösterimlerden birine sahip olması ve yanlarında verilen koşulları sağlamasıdır.

a) $T,\ T' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ koşullarını sağlar.

b) $T,\ T',\ Z \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z$ olmak üzere $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\alpha \times Z)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

c) $T,\ T',\ Z,\ Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ olmak üzere $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

d) $T \in \{Z_2, Z_1\}$ olmak üzere $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z_8) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z_7) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_5^\alpha \times Z_3) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_8^\alpha \supseteq Z$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

e) $T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subseteq Z_3$

$T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$ olmak üzere α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi

$\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$

biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$,

$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

f) α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_8^\alpha \times Z_8\right) \cup \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right)$

$\cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_8^\alpha \supseteq Z_8$,

$Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$,

$Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$

koşullarını sağlar.

g) $Z,\ Z',\ T \in D$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z' \subset T$, $Z \cup Z' \cup T = Z_3$, $Z \setminus Z' \neq \varnothing$ ve $Z' \setminus Z \neq \varnothing$

olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right)$

biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$ ve $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$

koşullarını sağlar.

h) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z'' \in \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve

$Z \cup Z' \cup T = Z_3$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right)$

$\cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_{Z''}^\alpha \times Z''\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \supseteq Z$,

$Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_{Z''}^\alpha \cap Z'' \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

i) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z'' \in \{Z_2, Z_1\}$ ve

$Z \cup Z' \cup T = Z_3$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup$

$\left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_{Z''}^\alpha \times Z''\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı

$Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha \supseteq Z''$,

$Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha \cap Z'' \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

j) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$ ve $T \cap Z = \varnothing$ olmak üzere

$\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right)$

$\cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$,

$Y_{Z'}^{\alpha} \cup Y_{T}^{\alpha} \supseteq T$, $Y_{Z}^{\alpha} \cup Y_{Z'}^{\alpha} \cup Y_{Z \cup Z'}^{\alpha} \cup Y_{T}^{\alpha} \cup Y_{3}^{\alpha} \cup Y_{2}^{\alpha} \supseteq Z_2$,

$Y_{Z}^{\alpha} \cup Y_{Z'}^{\alpha} \cup Y_{Z \cup Z'}^{\alpha} \cup Y_{T}^{\alpha} \cup Y_{3}^{\alpha} \cup Y_{1}^{\alpha} \supseteq Z_1$, $Y_{T}^{\alpha} \cap T \neq \varnothing$, $Y_{2}^{\alpha} \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve

$Y_{1}^{\alpha} \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı idempotent olsun. Bu durumda $B_X(D)$ kümesinin tanımından $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ olacak şekilde $f : X \to D$ dönüşümü vardır. Dolayısıyla her $x \in X$ için $f(x) \in \{ Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \}$ olur. O halde D nin bir D' alt yarılatisi için

$$\alpha = \bigcup_{T \in D'} \left(Y_{T}^{\alpha} \times T \right)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$V(D, \alpha) = D' = V(D', \alpha)$$

olur. Teorem 1.1.14 den $V(D, \alpha)$ nın D nin XI -alt yarılatisi olduğunundan D', D nin XI -alt yarılatisi olur. Yani D', $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ koşulları altında D nin Lemma 3.4.1 de verilen XI -alt yarılatislerini tarar. O halde α idempotent elemanını (a)-(j) da verilen quasinormal gösterimlerden birine sahiptir. Şimdi de α nın yanlarında verilen koşulları sağladığını gösterelim.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (a) daki gibi olsun ve T, $T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cap T' = \varnothing$ olmak üzere $Q_{12} = \{T, T', T \cup T'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{12}$ ve Lemma 3.4.1 den dolayı Q_{12}, D nin XI -alt yarılatisi olur. Ayrıca $V(Q_{12}, \alpha) = Q_{12} = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{12})$ olur. O halde Sonuç 1.1.57 den α nın $B_X(Q_{12})$ nin sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul α nın $Y_{T}^{\alpha} \supseteq T$ ve $Y_{T'}^{\alpha} \supseteq T'$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{12})$ nin sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α hem $B_X(Q_{12})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (b) de ki gibi ve T, T', $Z \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $T \cup T' \subset Z$ ve $T \cap T' = \varnothing$ olmak üzere $Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$

olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $\alpha = \bigcup_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$ olacak şekilde $f: X \to D$ dönüşümü vardır. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{13}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{13})$ ve Lemma 3.4.1 den dolayı Q_{13}, D nin XI-alt yarılatisi olur. Ayrıca $V(Q_{13},\alpha) = Q_{13} = V(D,\alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.57 den α ikili bağıntısının $B_X(Q_{13})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{13})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{13})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (c) deki gibi ve $T,\ T',\ Z,\ Z' \in D$, $T\setminus T' \neq \varnothing$, $T'\setminus T \neq \varnothing$, $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ ve $T \cap T' = \varnothing$ olmak üzere $Q_{14} = \{T, T', T\cup T', Z, Z'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{14}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{14})$ ve Lemma 3.4.1 den dolayı Q_{14}, D nin XI-alt yarılatisi olur. Ayrıca $V(Q_{14},\alpha) = Q_{14} = V(D,\alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.57 den dolayı α nın $B_X(Q_{14})$ ün sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{14})$ ün sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{14})$ ün hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (d) deki gibi ve $T \in \{Z_2, Z_1\}$ olmak üzere $Q_{15} = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, T, \breve{D}\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{15}$ ve $\alpha \in B_X(Q_{15})$ olur. Lemma 3.4.1 den dolayı Q_{15} D nin XI-alt yarılatisi ve $V(Q_{15},\alpha) = Q_{15} = V(D,\alpha)$ olduğu açıktır. Sonuç 1.1.57 den α nın $B_X(Q_{15})$ ün sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_8^\alpha \supseteq Z$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve

$Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α , $B_X\left(Q_{15}\right)$ ün sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α , hem $B_X\left(Q_{15}\right)$ in hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (e) deki gibi ve $T \cap T' = \varnothing$, $T,\ T' \in \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\right\}$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subseteq Z_3$ olmak üzere $Q_{16} = \left\{T, T', T \cup T', Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ olsun. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup\limits_{x \in X}\left(\{x\} \times f\left(x\right)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f\left(x\right) \in Q_{16}$ ve $\alpha \in B_X\left(Q_{16}\right)$ olur. Lemma 3.4.1 den Q_{16} nın D nin XI -alt yarılatisi olduğu ve $V\left(Q_{16}, \alpha\right) = Q_{16} = V\left(D, \alpha\right)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.71 den α ikili bağıntısının $B_X\left(Q_{16}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α ikili bağıntısı $B_X\left(Q_{16}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α , hem $B_X\left(Q_{16}\right)$ nın hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (f) deki gibi ve $Q_{17} = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ olsun. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup\limits_{x \in X}\left(\{x\} \times f\left(x\right)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f\left(x\right) \in Q_{17}$ ve $\alpha \in B_X\left(Q_{17}\right)$ olur. Lemma 3.4.1 den Q_{17} D nin XI -alt yarılatisi ve $V\left(Q_{17}, \alpha\right) = Q_{17} = V\left(D, \alpha\right)$ olduğu açıktır. O halde Sonuç 1.1.65 den α ikili bağıntısının $B_X\left(Q_{17}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_8^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α ikili bağıntısı $B_X\left(Q_{17}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α , hem $B_X\left(Q_{17}\right)$ nin hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (g) deki gibi ve $Q_{18} = \left\{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3\right\}$ olsun. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x\in X$ için $f(x)\in Q_{18}$ ve $\alpha\in B_X(Q_{18})$ olur. Lemma 3.4.1 den Q_{18}, D nin XI-alt yarılatisi ve $V(Q_{18},\alpha)=Q_{18}=V(D,\alpha)$ olduğu da açıktır. Sonuç 1.1.65 den α nın $B_X(Q_{18})$ in sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha\supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T$ ve $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{18})$ in sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{18})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha\in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (h) deki gibi ve $Q_{19}=\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z''\}$ olsun. $\alpha\in B_X(D)$ olduğundan $f:X\to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha=\bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x\in X$ için $f(x)\in Q_{19}$ ve $\alpha\in B_X(Q_{19})$ olur. Lemma 3.4.1 den dolayı Q_{19}, D nin XI-alt yarılatisi ve $V(Q_{19},\alpha)=Q_{19}=V(D,\alpha)$ olduğu açıktır. Sonuç 1.1.65 den α nın $B_X(Q_{19})$ nin sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha\supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$ ve $Y_{Z''}^\alpha\cap Z''\neq\varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{19})$ nin sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{19})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanıdır.

$\alpha\in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (i) deki gibi ve $Q_{20}=\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z'',\breve{D}\}$ olsun. Lemma 3.4.1 den dolayı Q_{20}, D nin XI-alt yarılatisi olarak bulunur. $\alpha\in B_X(D)$ olduğundan $f:X\to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha=\bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x\in X$ için $f(x)\in Q_{20}$ olarak bulunur. Buradan $\alpha\in B_X(Q_{20})$ ve $V(Q_{20},\alpha)=Q_{20}=V(D,\alpha)$ olduğu açıktır. Sonuç 1.1.65 den α ikili bağıntısının $B_X(Q_{20})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha\supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_{Z''}^\alpha\supseteq Z''$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha\cap Z''\neq\varnothing$ ve $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{20})$ nin sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{20})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (j) deki gibi ve $Q_{21} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f: X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{21}$ ve $\alpha \in B_X(Q_{21})$ olur. Lemma 3.4.1 den dolayı Q_{21}, D nin XI -alt yarılatisi olur. Ayrıca $V(Q_{21}, \alpha) = Q_{21} = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{21})$ olur. Sonuç 3.3.3 den α nın $B_X(Q_{21})$ in sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z \cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z \cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{21})$ in sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{21})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.■

Şimdi X sonlu bir küme iken $B_X(D)$ yarıgrubunun

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$$

koşulları altında idempotent elemanlarının sayısını bulalım.

Lemma 3.4.3 X sonlu ise

$$\left|I^*(Q_{12})\right| = 3^{|X \setminus Z_3|} + 3^{|X \setminus Z_5|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan dolayı T, $T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere $Q_{12} = \{T, T', T \cup T'\}$ XI -alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{12})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{12})\right| = 3^{|X \setminus (T \cup T')|}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$Q_{12}\vartheta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_5\}\}$$

ve

$$\left|I^*(Q_{12})\right| = \sum_{D' \in Q_{12}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}(D')\right|$$

olduğundan

$$\left|I^*\left(Q_{12}\right)\right| = 3^{|X \setminus Z_3|} + 3^{|X \setminus Z_5|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.4.4 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{13}\right)\right| = \left(4^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_3|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan $T,\ T',\ Z \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z$ olmak üzere $Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{13}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{13}\right)\right| = \left(4^{|Z \setminus (T \cup T')|} - 3^{|Z \setminus (T \cup T')|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z|}$$

olarak bulunur. Üstelik

$$Q_{13}\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}\right\}$$

ve

$$\left|I^*\left(Q_{13}\right)\right| = \sum_{D' \in Q_{13}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$$

olduğundan

$$\left|I^*\left(Q_{13}\right)\right| = \left(4^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_3|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.4.5 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{14}\right)\right| = \left(4^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} +$$

$$\left(4^{|Z_2\setminus Z_5|}-3^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot$$
$$\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan dolayı $T, T', Z, Z' \in D$, $T\setminus T' \neq \varnothing$, $T'\setminus T \neq \varnothing$ ve $T\cup T' \subset Z \subset Z'$ olmak üzere $Q_{14}=\{T,T',T\cup T',Z,Z'\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{14})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{14})\right|=\left(4^{|Z\setminus(T\cup T')|}-3^{|Z\setminus(T\cup T')|}\right)\cdot\left(5^{|Z'\setminus Z|}-4^{|Z'\setminus Z|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z'|}$$

olarak bulunur. Burada

$$Q_{14}\vartheta_{XI}=\{\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\},$$
$$\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\}\}$$

ve $\left|I^*(Q_{14})\right|=\sum_{D'\in Q_{14}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$\left|I^*(Q_{14})\right|=\left(4^{|Z_1\setminus Z_5|}-3^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot$$
$$\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(4^{|Z_2\setminus Z_5|}-3^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot$$
$$\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.4.6 X sonlu ise

$$\left|I^*(Q_{15})\right|=\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan dolayı $Q_{15}=\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,T,\breve{D}\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{15})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{15}\right)\right| = \left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|T\setminus Z_3|} - 4^{|T\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus T|} - 5^{|\breve{D}\setminus T|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$Q_{15}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{15}\right)\right| = \sum_{D'\in Q_{15}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\left|I^*\left(Q_{15}\right)\right| = \left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|} - 4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|} - 4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|} - 5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.4.7 X sonlu ise

$$\left|I^*\left(Q_{16}\right)\right| = 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|} - 3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|} - 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|} - 3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|} - 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.71 den dolayı $T,\ T' \in \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\right\}$, $T\setminus T' \neq \varnothing$, $T'\setminus T \neq \varnothing$ ve $T\cup T' \subseteq Z_3$ olmak üzere $Q_{16} = \left\{T, T', T\cup T', Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{16}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{16}\right)\right| = 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus(T\cup T')|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|} - 3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|} - 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur. Burada

$$Q_{16}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{16}\right)\right| = \sum_{D'\in Q_{16}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\left|I^*\left(Q_{16}\right)\right| = 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|} - 3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|} - 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|} - 3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|} - 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.4.8 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{17}\right)\right| = 4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|} - 4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|} - 4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 3.2.8 den dolayı $Q_{17} = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{17}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{17}\right)\right| = 4^{\left|(Z_2 \cap Z_1)\setminus Z_3\right|} \cdot \left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_2\setminus Z_1|} - 4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right) \cdot \left(5^{|Z_1\setminus Z_2|} - 4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Q_{17}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{17}\right)\right| = \sum_{D' \in Q_{17}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olması kullanılarak

$$\left|I^*\left(Q_{17}\right)\right| = 4^{\left|(Z_2 \cap Z_1)\setminus Z_3\right|} \cdot \left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_2\setminus Z_1|} - 4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right) \cdot \left(5^{|Z_1\setminus Z_2|} - 4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.4.9 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{18}\right)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 5^{|X\setminus Z_3|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.67 den dolayı $Z,\ Z',\ T \in D$, $Z' \subset T$, $Z \cup Z' \cup T = Z_3$, $Z \setminus Z' \neq \varnothing$, $Z' \setminus Z \neq \varnothing$ ve $Z \cap T = \varnothing$ olmak üzere $Q_{18} = \left\{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{18}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{18}\right)\right| = \left(2^{|T\setminus(Z\cup Z')|} - 1\right) \cdot 5^{|X\setminus Z_3|}$$

olarak bulunur.

$$Q_{18}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\right\}\right\}$$

ve

$$\left|I^*\left(Q_{18}\right)\right| = \sum_{D' \in Q_{18}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$$

olduğundan

$$\left|I^*\left(Q_{18}\right)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 5^{|X\setminus Z_3|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.4.10 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{19}\right)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.67 den dolayı $Z,\ Z',\ T,\ Z''\in D$, $Z'\subset T$, $Z\cup Z'\cup T=Z_3$, $Z\setminus Z'\neq\varnothing$, $Z'\setminus Z\neq\varnothing$, $Z_3\subset Z''$ ve $Z\cap T=\varnothing$ olmak üzere $Q_{19}=\left\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z''\right\}$ XI -alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{19}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{19}\right)\right| = \left(2^{|T\setminus(Z\cup Z')|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z''\setminus Z_3|}-5^{|Z''\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z''|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Q_{19}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\}\right\}$$

ve

$$\left|I^*\left(Q_{19}\right)\right| = \sum_{D'\in Q_{19}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$$

olması kullanılarak

$$\left|I^*\left(Q_{19}\right)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.4.11 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{20}\right)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.67 den dolayı $Q_{20}=\left\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z'',\breve{D}\right\}$ XI -alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{20}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{20}\right)\right| = \left(2^{|T\setminus(Z\cup Z')|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z''\setminus Z_3|}-5^{|Z''\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z''|}-6^{|\breve{D}\setminus Z''|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Q_{20}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{20}\right)\right|=\sum\limits_{D'\in Q_{20}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olması kullanılarak

$$\left|I^*\left(Q_{20}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(6^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-5^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\right)\cdot\left(7^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-6^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(6^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}-5^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}\right)\cdot\left(7^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-6^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.4.12 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{21}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 5^{\left|\left(Z_2\cap Z_1\right)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(6^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: Sonuç 3.3.8 den dolayı $Z,\ Z'\in\left\{Z_8,Z_7\right\}$, $Z\neq Z'$, $T\in\left\{Z_6,Z_4\right\}$, $Z'\subset T$ ve $Z\cap T=\varnothing$ olmak üzere $Q_{21}=\left\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{21}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{21}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 5^{\left|\left(Z_2\cap Z_1\right)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(6^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak bulunur. Üstelik

$$Q_{21}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{21}\right)\right|=\sum\limits_{D'\in Q_{21}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olması kullanılarak

$$\left|I^*\left(Q_{21}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 5^{\left|\left(Z_2\cap Z_1\right)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(6^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak bulunur.■

Teorem 3.4.13 X sonlu ve $Z_8\cap Z_7=\varnothing$, $Z_8\cap Z_4\neq\varnothing$ ve $Z_7\cap Z_6=\varnothing$ olsun. Bu durumda $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanlarının sayısı

$$\left|I_D\right|=\sum_{i=1}^{21}\left|I^*\left(Q_i\right)\right|$$

olur.

İspat: Teorem 1.1.34-(c) den dolayı $\left|I_D\right|=\sum\limits_{i=1}^{21}\left|I^*\left(Q_i\right)\right|$ olur.■

3.5 $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ Koşulları Altında İdempotent Elemanlar

Bu bölümde birleşimlerin tam X -yarılatisi D ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X(D)$ nin,

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 = \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$$

koşulları altında idempotent elemanlarının özellikleri ve X kümesinin sonlu olması durumunda idempotent elemanlarının sayısı belirlenecektir.

Lemma 3.1.1. de verilen D nin tam X -alt yarılatislerinin hepsi bütün koşullar altında XI -alt yarılatisler olduğundan bunlar dışında kalan

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 = \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$$

koşulları altında D nin tam X -alt yarılatislerini bulalım.

Lemma 3.5.1 $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ olsun. Bu durumda aşağıda verilen D nin tam X -alt yarılatisleri XI -alt yarılatislerdir.

1) $\{Z_7, Z_6, Z_3\}$, $\{Z_8, Z_4, Z_3\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5\}$ (Diyagram 12, Şekil 7);

2) $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}$ (Diyagram 13, Şekil 7);

3) $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\}$ (Diyagram 14, Şekil 7);

4) $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$ (Diyagram 15, Şekil 7);

5) $\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (Diyagram 16, Şekil 7);

6) $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ (Diyagram 17, Şekil 7);

7) $\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3\}$, $\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\}$ (Diyagram 18, Şekil 7);

8) $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\},\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1\},$

$\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2\},\ \{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\ \{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,\breve{D}\}$

(Diyagram 19, Şekil 7);

9) $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\ \{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ \{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},$

$\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$ (Diyagram 20, Şekil 7);

10) $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ \{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ (Diyagram 21, Şekil 7)

İspat: Lemma 2.8 den D nin tam X -alt yarılatislerinden 1 den 5 e kadar verilenler XI -alt yarılatislerdir. Sonuç 2.10 dan dolayı $\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, D nin XI -alt yarılatisidir. Lemma 2.11 den dolayı D nin tam X -alt yarılatislerinden 7 den 9 a kadar verilenler XI -alt yarılatis olurlar. Teorem 2.12 den dolayı 12 de verilen D nin tam X -alt yarılatisi XI -alt yarılatis olur.■

Teorem 3.1.4 verilen şekilde quasinormal gösterimi olan ikili bağıntılar

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 = \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$$

koşulları altında da $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarıdır. O halde $B_X(D)$ nin bu biçimde gösterimi olmayan idempotent elemanlarını belirleyelim.

Teorem 3.5.2 $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıda belirtilen quasinormal gösterimlerden birine sahip olması ve yanlarında verilen koşulları sağlamasıdır.

a) $T,\ T' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ koşullarını sağlar.

b) $T,\ T',\ Z \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z$ olmak üzere $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\alpha \times Z)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

c) $T,\ T',\ Z,\ Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ olmak üzere $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$

biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

d) $T \in \{Z_2, Z_1\}$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z_8\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_8^\alpha \supseteq Z$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

e) $T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subseteq Z_3$ $T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$ olmak üzere α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

f) α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_8^\alpha \times Z_8\right) \cup \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_8^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

g) $Z,\ Z',\ T \in D$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z' \subset T$, $Z \cup Z' \cup T = Z_3$, $Z \setminus Z' \neq \varnothing$ ve $Z' \setminus Z \neq \varnothing$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$ ve $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

h) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z'' \in \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ ve $Z \cup Z' \cup T = Z_3$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_{Z''}^\alpha \times Z''\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_{Z''}^\alpha \cap Z'' \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

i) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$,$Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z'' \in \{Z_2, Z_1\}$ ve $Z \cup Z' \cup T = Z_3$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup$

$\left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_{Z''}^\alpha \times Z''\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı

$Y_Z^\alpha \supseteq Z,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z',\ Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha \supseteq Z''$,

$Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha \cap Z'' \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

j) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$ ve $T \cap Z = \varnothing$ olmak üzere

$\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right)$

$\cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve α ikili bağıntısı $Y_Z^\alpha \supseteq Z,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$,

$Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$,

$Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve

$Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlasın.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı idempotent olsun. Bu durumda $B_X(D)$ kümesinin tanımından $\alpha = \bigcup_{x\in X} \left(\{x\} \times f(x)\right)$ olacak şekilde $f : X \to D$ dönüşümü vardır. Dolayısıyla her $x \in X$ için $f(x) \in \left\{ Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\}$ olur. O halde D nin bir D' alt yarılatisi için

$$\alpha = \bigcup_{T\in D'} \left(Y_T^\alpha \times T\right)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan $V(D,\alpha) = D' = V(D',\alpha)$ olur. Teorem 1.1.14 den $V(D,\alpha)$ nın D nin XI-alt yarılatisi olduğundan D', D nin XI-alt yarılatisi olur. Yani D', $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ koşulları altında D nin Lemma 3.5.1 de verilen XI-alt yarılatislerini tarar. O halde α idempotent elemanını (a)-(j) de verilen quasinormal gösterimlerden birine sahiptir. Şimdi de α nın yanlarında verilen koşulları sağladığını gösterelim.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (a) daki gibi olsun ve $T,\ T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cap T' = \varnothing$ olmak üzere $Q_{12} = \{T, T', T \cup T'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x\in X} \left(\{x\} \times f(x)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{12}$ ve Lemma 3.5.1 den dolayı Q_{12}, D nin XI-alt yarılatisi olur. Ayrıca $V(Q_{12},\alpha) = Q_{12} = V(D,\alpha)$ olduğu da açıktır. Dolayısıyla

$\alpha \in B_X(Q_{12})$ olur. O halde Sonuç 1.1.57 den α nın $B_X(Q_{12})$ nin sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul α nın $Y_T^\alpha \supseteq T$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{12})$ nin sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α hem $B_X(Q_{12})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (b) de ki gibi ve $T,\ T',\ Z \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $T \cup T' \subset Z$ ve $T \cap T' = \varnothing$ olmak üzere $Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $\alpha = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times f(x))$ olacak şekilde $f : X \to D$ dönüşümü vardır. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{13}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{13})$ olur. Lemma 3.5.1 den Q_{13} kümesinin D nin XI -alt yarılatisi ve $V(Q_{13}, \alpha) = Q_{13} = V(D, \alpha)$ olduğu açıktır. O halde Sonuç 1.57 den α ikili bağıntısının $B_X(Q_{13})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{13})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{13})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (c) deki gibi ve $T,\ T',\ Z,\ Z' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$, $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ ve $T \cap T' = \varnothing$ olmak üzere $Q_{14} = \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{14}$ ve $\alpha \in B_X(Q_{14})$ olur. Lemma 3.5.1 den dolayı Q_{14}, D nin XI -alt yarılatisi olur. Ayrıca $V(Q_{14}, \alpha) = Q_{14} = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.57 den dolayı α nın $B_X(Q_{14})$ ün sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{14})$ ün sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{14})$ ün hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (d) deki gibi ve $T \in \{Z_2, Z_1\}$ olmak üzere $Q_{15} = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, T, \breve{D}\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} \left(\{x\} \times f(x) \right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{15}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{15})$ olur. Lemma 3.5.1 den dolayı Q_{15} kümesinin D nin XI -alt yarılatisi ve $V(Q_{15}, \alpha) = Q_{15} = V(D, \alpha)$ olduğu açıktır. Sonuç 1.1.57 den α nın $B_X(Q_{15})$ ün sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_8^\alpha \supseteq Z$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{15})$ ün sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{15})$ in hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (e) deki gibi ve $T \cap T' = \varnothing$, $T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subseteq Z_3$ olmak üzere $Q_{16} = \{T, T', T \cup T', Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} \left(\{x\} \times f(x) \right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{16}$ ve $\alpha \in B_X(Q_{16})$ olur. Lemma 3.5.1 den Q_{16} nın D nin XI -alt yarılatisi olduğu elde edilir. Ayrıca $V(Q_{16}, \alpha) = Q_{16} = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. O halde Sonuç 1.1.71 den α ikili bağıntısının $B_X(Q_{16})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α ikili bağıntısı $B_X(Q_{16})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{16})$ nın hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (f) deki gibi ve $Q_{17} = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} \left(\{x\} \times f(x) \right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{17}$ ve $\alpha \in B_X(Q_{17})$ olur. Lemma 3.5.1 den Q_{17} D nin XI -alt yarılatisi olarak bulunur. Ayrıca $V(Q_{17}, \alpha) = Q_{17} = V(D, \alpha)$ olduğu açıktır. O halde Sonuç 3.2.3 den α ikili bağıntısının $B_X(Q_{17})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_8^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_8^\alpha \cup Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α ikili bağıntısı $B_X\left(Q_{17}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X\left(Q_{17}\right)$ nin hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (g) deki gibi ve $Q_{18} = \left\{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3\right\}$ olsun. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X}\left(\{x\} \times f\left(x\right)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f\left(x\right) \in Q_{18}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X\left(Q_{18}\right)$ olur. Lemma 3.5.1 den Q_{18} kümesinin D nin XI-alt yarılatisi ve $V\left(Q_{18}, \alpha\right) = Q_{18} = V\left(D, \alpha\right)$ olduğu açıktır. Sonuç 1.1.65 den α nın $B_X\left(Q_{18}\right)$ in sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$ ve $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X\left(Q_{18}\right)$ in sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X\left(Q_{18}\right)$ nin hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (h) deki gibi ve $Q_{19} = \left\{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z''\right\}$ olsun. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X}\left(\{x\} \times f\left(x\right)\right)$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f\left(x\right) \in Q_{19}$ ve $\alpha \in B_X\left(Q_{19}\right)$ olur. Lemma 3.5.1 den dolayı Q_{19}, D nin XI-alt yarılatisi olur. Ayrıca $V\left(Q_{19}, \alpha\right) = Q_{19} = V\left(D, \alpha\right)$ olduğu da açıktır. Sonuç 1.1.65 den α nın $B_X\left(Q_{19}\right)$ nin sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$ ve $Y_{Z''}^\alpha \cap Z'' \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X\left(Q_{19}\right)$ nin sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X\left(Q_{19}\right)$ nin hem de $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanıdır.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (i) deki gibi ve $Q_{20} = \left\{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z'', \breve{D}\right\}$ olsun. Lemma 3.5.1 den dolayı Q_{20}, D nin XI-alt yarılatisi olarak bulunur. $\alpha \in B_X\left(D\right)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere

$\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{20}$ ve $\alpha \in B_X(Q_{20})$ olur. Ayrıca $V(Q_{20}, \alpha) = Q_{20} = V(D, \alpha)$ olduğu da açıktır. Sonuç 1.1.65 den α ikili bağıntısının $B_X(Q_{20})$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z \cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha \supseteq Z''$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha \cap Z'' \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{20})$ nin sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{20})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (j) deki gibi ve $Q_{21} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $f : X \to D$ bir dönüşüm olmak üzere $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ biçimindedir. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_{21}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{21})$ olur. Lemma 3.5.1 den dolayı Q_{21}, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(Q_{21}, \alpha) = Q_{21} = V(D, \alpha)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\alpha \in B_X(Q_{21})$ olur. Sonuç 3.3.3 den α nın $B_X(Q_{21})$ in sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul $Y_Z^\alpha \supseteq Z$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z \cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z \cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır. Üstelik α, $B_X(Q_{21})$ in sağ birim elemanı ise Teorem 1.1.13 den α, hem $B_X(Q_{21})$ nin hem de $B_X(D)$ nin idempotent elemanı olur.■

X sonlu bir küme olsun.

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 = \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$$

koşulları altında $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısını bulalım.

Lemma 3.5.3 X sonlu ise

$$\left| I^*(Q_{12}) \right| = 2 \cdot 3^{|X \setminus Z_3|} + 3^{|X \setminus Z_5|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan dolayı $T,\ T' \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere $Q_{12} = \{T, T', T \cup T'\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{12})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{12})\right| = 3^{|X \setminus (T \cup T')|}$$

olarak bulunur. Üstelik

$$Q_{12}\vartheta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_3\}, \{Z_8, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_5\}\}$$

ve $\left|I^*(Q_{12})\right| = \sum_{D' \in Q_{12}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olması kullanılarak

$$\left|I^*(Q_{12})\right| = 2 \cdot 3^{|X \setminus Z_3|} + 3^{|X \setminus Z_5|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.5.4 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_{13})\right| = {} & 2 \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + 2 \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \\ & \left(4^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_1|} + \left(4^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_2|} + \\ & \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_3|} + 2 \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan faydalanarak $T,\ T',\ Z \in D$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z$ olmak üzere $Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{13})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{13})\right| = \left(4^{|Z \setminus (T \cup T')|} - 3^{|Z \setminus (T \cup T')|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z|}$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned}Q_{13}\vartheta_{XI} = \{ & \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2\}, \\ & \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \\ & \{Z_8, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}\}\end{aligned}$$

$\left|I^*(Q_{13})\right| = \sum_{D' \in Q_{13}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{13}\right)\right| = {} & 2\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+2\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+\\ & \left(4^{|Z_1\setminus Z_5|}-3^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\left(4^{|Z_2\setminus Z_5|}-3^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_2|}+\\ & \left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_3|}+2\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_5|}\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.5.5 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{14}\right)\right| = {} & \left(4^{|Z_1\setminus Z_5|}-3^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+2\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\\ & \left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+2\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ & \left(4^{|Z_2\setminus Z_5|}-3^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\\ & \left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|}+\\ & \left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan dolayı $T,\ T',\ Z,\ Z'\in D$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ ve $T\cup T'\subset Z\subset Z'$ olmak üzere $Q_{14}=\{T,T',T\cup T',Z,Z'\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{14}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{14}\right)\right|=\left(4^{|Z\setminus(T\cup T')|}-3^{|Z\setminus(T\cup T')|}\right)\cdot\left(5^{|Z'\setminus Z|}-4^{|Z'\setminus Z|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z'|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}Q_{14}\vartheta_{XI} = \Big\{ & \{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\\ & \{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\},\\ & \{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\}\Big\}\end{aligned}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{14}\right)\right|=\sum_{D'\in Q_{14}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olması kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{14}\right)\right| = &\left(4^{|Z_1\setminus Z_5|}-3^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+2\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\\ &\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+2\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(4^{|Z_2\setminus Z_5|}-3^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\\ &\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_1|}+\\ &\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_2|}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.5.6 X sonlu ise

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{15}\right)\right| = &\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.59 dan dolayı $Q_{15}=\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,T,\breve{D}\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{15}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{15}\right)\right|=\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|T\setminus Z_3|}-4^{|T\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus T|}-5^{|\breve{D}\setminus T|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Q_{15}\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{15}\right)\right|=\sum\limits_{D'\in Q_{15}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{15}\right)\right| = &\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.5.7 X sonlu ise

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{16}\right)\right| = &2\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.71 den dolayı $T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subseteq Z_3$ olmak üzere $Q_{16} = \{T, T', T \cup T', Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{16})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{16})\right| = 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus (T \cup T')|} \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak bulunur. Üstelik

$$Q_{16}\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\right\}$$

ol ve $\left|I^*(Q_{16})\right| = \sum_{D' \in Q_{16}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}(D')\right|$ olması kullanılarak

$$\left|I^*(Q_{16})\right| = 2 \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|} + 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_5|} \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

elde edilir.■

Lemma 3.5.8 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*(Q_{17})\right| = 4^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 4^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(5^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 4^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: Sonuç 3.2.8 den dolayı $Q_{17} = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X(Q_{17})$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(Q_{17})\right| = 4^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 4^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(5^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 4^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Q_{17}\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\right\}$$

ve

$$\left|I^*(Q_{17})\right| = \sum_{D' \in Q_{17}\vartheta_{XI}} \left|E_X^{(r)}(D')\right|$$

olduğundan

$$\left|I^*(Q_{17})\right| = 4^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 4^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(5^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 4^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 3.5.9 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I^*\left(Q_{18}\right)\right| = \left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_3|} + \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_3|}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.67 den dolayı $Z,\ Z',\ T\in D$, $Z'\subset T$, $Z\cup Z'\cup T=Z_3$, $Z\setminus Z'\neq\varnothing$, $Z'\setminus Z\neq\varnothing$ ve $Z\cap T=\varnothing$ olmak üzere $Q_{18}=\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{18}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{18}\right)\right| = \left(2^{|T\setminus(Z\cup Z')|}-1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_3|}$$

olarak bulunur. Burada $Q_{18}\vartheta_{XI}=\{\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3\},\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3\}\}$ ve

$$\left|I^*\left(Q_{18}\right)\right| = \sum_{D'\in Q_{18}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$$

olması kullanılarak $\left|I^*\left(Q_{18}\right)\right| = \left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_3|} + \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|X\setminus Z_3|}$ olarak bulunur.■

Lemma 3.5.10 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{19}\right)\right| = &\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_2|} + \\ &\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_2|} + \\ &\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.67 den $Z,\ Z',\ T,\ Z''\in D$, $Z'\subset T$, $Z\cup Z'\cup T=Z_3$, $Z\setminus Z'\neq\varnothing$, $Z'\setminus Z\neq\varnothing$, $Z_3\subset Z''$ ve $Z\cap T=\varnothing$ olmak üzere $Q_{19}=\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z''\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{19}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{19}\right)\right| = \left(2^{|T\setminus(Z\cup Z')|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z''\setminus Z_3|}-5^{|Z''\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z''|}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}Q_{19}\vartheta_{XI}=\{&\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\},\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1\},\\ &\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,\breve{D}\}\}\end{aligned}$$

ve

$$\left|I^*\left(Q_{19}\right)\right| = \sum_{D'\in Q_{19}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{19}\right)\right| = &\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_2|}+\\ &\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus Z_2|}+\\ &\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.5.11 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{20}\right)\right| = &\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.1.67 den faydalanarak $Q_{20}=\left\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z'',\breve{D}\right\}$ XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{20}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{20}\right)\right|=\left(2^{|T\setminus(Z\cup Z')|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z''\setminus Z_3|}-5^{|Z''\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z''|}-6^{|\breve{D}\setminus Z''|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}Q_{20}\vartheta_{XI} = &\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\right.\\ &\left.\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\right\}\end{aligned}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{20}\right)\right|=\sum\limits_{D'\in Q_{20}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_{20}\right)\right| = &\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olarak bulunur.■

Lemma 3.5.12 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|I\left(Q_{21}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 5^{\left|\left(Z_2\cap Z_1\right)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(6^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+$$
$$\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 5^{\left|\left(Z_2\cap Z_1\right)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(6^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: Sonuç 3.3.8 den dolayı $Z,\ Z'\in\{Z_8,Z_7\}$, $Z\neq Z'$, $T\in\{Z_6,Z_4\}$, $Z'\subset T$ ve $Z\cap T=\varnothing$ olmak üzere $Q_{21}=\left\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, XI-alt yarılatisi ile tanımlanan $B_X\left(Q_{21}\right)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}\left(Q_{21}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 5^{\left|\left(Z_2\cap Z_1\right)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(6^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}$$

olarak bulunur. Üstelik

$$Q_{21}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

ve $\left|I^*\left(Q_{21}\right)\right|=\sum\limits_{D'\in Q_{21}\vartheta_{XI}}\left|E_X^{(r)}\left(D'\right)\right|$ olduğundan

$$\left|I\left(Q_{21}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 5^{\left|\left(Z_2\cap Z_1\right)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(6^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+$$
$$\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 5^{\left|\left(Z_2\cap Z_1\right)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(6^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}$$

olarak elde edilir.■

Teorem 3.5.13 X sonlu ve $Z_8\cap Z_7=\varnothing,\ Z_8\cap Z_4=\varnothing$ ve $Z_7\cap Z_6=\varnothing$ olsun. Bu durumda $B_X\left(D\right)$ nin idempotent elemanlarının sayısı

$$\left|I_D\right|=\sum_{i=1}^{21}\left|I^*\left(Q_i\right)\right|$$

olur.

İspat: Teorem 1.1.34-(c) den dolayı $\left|I_D\right|=\sum\limits_{i=1}^{21}\left|I^*\left(Q_i\right)\right|$ olur.■

BÖLÜM 4

İKİLİ BAĞINTILARIN TAM YARIGRUPLARININ REGÜLER ELEMANLARI

Birleşimlerin tam X-yarılatisi D ye tam izomorf olan X-yarılatislerin sınıfı $\Sigma_2(X,9)$ olduğundan bu sınınftan alınan herhangi bir tam X-yarılatis ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubunun regüler elemanlarının yapısını $B_X(D)$ nin regüler elemanları yardımıyla karakterize edebiliriz. Dolayısıyla $\Sigma_2(X,9)$ sınıfının X-yarılatisleri ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgruplarının regüler elemanlarının özelliklerini belirlemek için $B_X(D)$ nin regüler elemanlarının özelliklerini belirlemek yeterlidir.

Bu bölümde Teorem 1.1.20 den faydalanarak $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanlarının yapısını ve X sonlu iken regüler elemanlarının sayısı için formül araştırılacaktır.

2. Bölümde D nin XI-alt yarılatislerinin

1. $Z_8 \cap Z_7 \neq \varnothing$

2. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$

3. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$

4. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$

5. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$

koşulları altında farklı oldukları gösterildi. $B_X(D)$ nin regüler elemanlarının sayısı D nin XI-alt yarılatisleri kullanılarak bulunduğundan koşullar değiştikçe regüler elemanların sayısı da değişecektir. Bu yüzden bu bölümde $B_X(D)$ yarıgrubunun regüler elemanların sayısını yukarıda verilen koşullar altında ayrı ayrı inceleyeceğiz.

4.1. $Z_8 \cap Z_7 \neq \varnothing$ Koşulu Altında Regüler Elemanlar

Bu bölümde birleşimlerin tam X -yarılatisi D ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X\left(D\right)$ nin,

$$Z_8 \cap Z_7 \neq \varnothing$$

koşulu altında regüler elemanlarınının özellikleri ve X kümesinin sonlu olması durumunda regüler elemanlarının sayısı belirlenecektir.

Teorem 4.1.1 $Z_8 \cap Z_7 \neq \varnothing$ olsun. Aşağıda verilen biçimlerde quasinormal gösterimlerden birine sahip olan $\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının regüler olması için gerek ve yeter koşul $V\left(D,\alpha\right)$ tam X -yarılatisinden D nin bir tam X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizmasının verilen koşulları sağlamasıdır.

1) α nın quasinormal gösterimi $\alpha = X \times T,\ T \in D$ biçimindedir.

2) $T,\ T' \in D$ ve $T \subset T'$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ biçiminde olsun. O zaman φ, tam α -izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi\left(T\right)$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi\left(T'\right) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

3) $T,\ T',\ T'' \in D$ ve $T \subset T' \subset T''$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$ biçiminde olsun. O zaman φ, tam α -izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi\left(T\right)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi\left(T'\right)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi\left(T'\right) \neq \varnothing$ ve $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi\left(T''\right) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

4) $Z,\ Z',\ T,\ T' \in D$ ve $Z \subset Z' \subset T \subset T'$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ biçiminde olsun. O zaman φ, tam α -izomorfizması $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi\left(Z\right)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi\left(Z'\right)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi\left(T\right)$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi\left(Z'\right) \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap \varphi\left(T\right) \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi\left(T'\right) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

5) $Z,\ Z',\ T,\ T' \in D$ ve $Z \subset Z' \subset T \subset T' \subset \breve{D}$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde olsun. O zaman φ, tam α -izomorfizması $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi\left(Z\right)$,

$Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$,

$Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$

koşullarını sağlar.

6) $Z, Z', T, T' \in D, Z \subset T, Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$ biçiminde olsun. O zaman φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

7) $Z, Z', T, T' \in D$, $Z \subset T, Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z'$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi

$\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ biçiminde olsun. O zaman φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

8) $Z, Z', T, T' \in D$, $Z \subset T, Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing, T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z' \subset \breve{D}$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi

$\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$

biçiminde olsun. O zaman φ, tam α-izomorfizması

$Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$,

$Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$

koşullarını sağlar.

9) $Z, Z', T, T' \in D$, $Z \subset Z' \subset T$, $Z \subset Z' \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi

$\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$ biçiminde olsun. O zaman φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$,

$Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$,

$Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

10) $T, T' \in D$ ve $T \subset T' \subset Z_3$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi

$\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$

biçiminde olsun. O zaman φ, tam α-izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$,

$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$,

$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$,

$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$,

$Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

11) $Z,\ T,\ T' \in D$, $Z \subset T$, $Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' = Z_3$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi

$\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup$

$(Y_0^\alpha \times \breve{D})$ biçiminde olsun. O zaman φ, tam α-izomorfizması

$Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$,

$Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$,

$Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$

koşullarını sağlar.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı regüler olsun. Bu durumda $B_X(D)$ kümesinin tanımından $\alpha = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ olacak şekilde $f : X \to D$ dönüşümü vardır. Buradan her $x \in X$ için $f(x) \in \{ Z_8,\ Z_7,\ Z_6,\ Z_5,\ Z_4,\ Z_3,\ Z_2,\ Z_1,\ \breve{D} \}$ olur. Ayrıca her $T \in D$ için Y_T^α kümelerinin tanımından dolayı

$$\alpha = \bigcup_{T \in D'} (Y_T^\alpha \times T)$$

olacak biçimde D nin bir D' tam X-alt yarılatisi vardır. Buradan

$$V(D,\alpha) = D' = V(D',\alpha)$$

elde edilir. Üstelik Teorem 1.1.17 den $V(D,\alpha)$, D nin XI-alt yarılatisidir. O halde yukarıdaki eşitlikten D', D nin XI-alt yarılatisi olur. Yani D', $Z_8 \cap Z_7 \neq \varnothing$ koşulu altında D nin Lemma 3.1.1 de verilen XI-alt yarılatislerini tarar. O halde α regüler elemanının quasinormal gösterim (1)-(11) de verilen quasinormal gösterimlerden biri gibidir. Şimdi φ, tam α-izomorfizmasının verilen koşulları sağladığını gösterelim.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısınının quasinormal gösterimi (1) deki gibi ve $Q_1 = \{T\}$ olsun. Lemma 3.1.1 den dolayı Q_1, D nin XI -alt yarılatisidir. Ayrıca $V(Q_1,\alpha) = Q_1 = V(D,\alpha)$ olur. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan $\alpha = \bigcup_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$ olacak şekilde $f: X \to D$ dönüşümü vardır. α nın quasinormal gösteriminden her $x \in X$ için $f(x) \in Q_1$ olarak bulunur. Bu şekildeki f dönüşümü tek olduğundan $B_X(Q_1)$ in sadece tek elemanı vardır. $B_X(Q_1)$ kümesi bileşke işlemine kapalı olduğundan $\alpha \in B_X(Q_1)$ ikili bağıntısı hem sağ birim hem idempotent hem de regüler elemandır. Ayrıca $B_X(Q_1) \subset B_X(D)$ olduğundan α, $B_X(D)$ yarıgrubunda regüler elemanıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısınının quasinormal gösterimi (2) deki gibi yani T, $T' \in D$ ve $T \subset T'$ olmak üzere $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ biçiminde olsun. $Q_2 = \{T, T'\}$ dersek Lemma 3.1.1 den dolayı Q_2, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_2$ olur. Teorem 1.1.52 den α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerekli ve yeterli koşul $V(D,\alpha)$ X-yarılatisinden D nin bir X-alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α-izomorfizmasının $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (3) deki gibi yani T, T', $T'' \in D$ ve $T \subset T' \subset T''$ olmak üzere $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ biçiminde olsun. $Q_3 = \{T, T', T''\}$ dersek Lemma 3.1.1 den dolayı Q_3, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_3$ olur. Teorem 1.1.52 den α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır ancak ve ancak $V(D,\alpha)$ X-yarılatisinden D nin bir X-alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α-izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ ve $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (4) deki gibi yani Z, Z', T, $T' \in D$ ve $Z \subset Z' \subset T \subset T'$ olmak üzere $\alpha = (Y_T^\alpha \times Z) \cup (Y_{T'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ biçiminde olsun. $Q_4 = \{Z, Z', T, T'\}$ dersek Lemma 3.1.1 den dolayı Q_4, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_4$ olur. Teorem 1.1.52 den α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X-yarılatisinden D nin bir X-alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α-izomorfizmasının $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (5) deki gibi yani $Z,\, Z',\, T,\, T' \in D$ ve $Z \subset Z' \subset T \subset T' \subset \breve{D}$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde olsun. $Q_5 = \left\{Z, Z', T, T', \breve{D}\right\}$ dersek Lemma 3.1.1 den dolayı Q_5, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_5$ olur. Teorem 1.1.52 den α, $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır ancak ve ancak $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (6) daki gibi yani $Z,\, Z',\, T,\, T' \in D, Z \subset T, Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere

$$\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right)$$

biçiminde olsun. $Q_6 = \{Z, T, T', T \cup T'\}$ dersek Lemma 3.1.1 den dolayı Q_6, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_6$ olduğu açıktır. Teorem 1.1.60 dan α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α-izomorfizmasının $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (7) deki gibi yani $Z,\, Z',\, T,\, T' \in D$, $Z \subset T, Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z'$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right)$ biçiminde olsun. $Q_7 = \{Z, T, T', T \cup T', Z'\}$ dersek Lemma 3.1.1 den dolayı Q_7, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_7$ olduğu açıktır. Teorem 1.1.60 dan α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α-izomorfizmasının $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (8) deki gibi yani $Z,\ Z',\ T,\ T' \in D$, $Z \subset T$, $Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing, T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z' \subset \breve{D}$ olmak üzere $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ biçiminde olsun. $Q_8 = \{Z, T, T', T \cup T'\}$ dersek Lemma 3.1.1 den dolayı Q_8, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_8$ olduğu açıktır. Teorem 1.1.60 dan α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α-izomorfizmasının $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (9) daki gibi yani $Z,\ Z',\ T,\ T' \in D$, $Z \subset Z' \subset T$, $Z \subset Z' \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$ biçiminde olsun. $Q_9 = \{Z, Z', T, T', T \cup T'\}$ dersek Lemma 3.1.1 den dolayı Q_9, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_9$ olduğu açıktır. Teorem 1.1.60 dan α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α-izomorfizmasının $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (10) daki gibi yani $T,\ T' \in D$ ve $T \subset T' \subset Z_3$ olmak üzere $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1)$ $\cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ biçiminde olsun. $Q_{10} = \{T, T', Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ dersek Lemma 3.1.1 den dolayı Q_{10}, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_{10}$ olduğu açıktır. Teorem 1.1.60 dan α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α-izomorfizmasının

$$Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T),\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T'),\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3),$$

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2),\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1),$$

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3),\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2),$$

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1),\ Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing,\ Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing,$$

$$Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing \text{ ve } Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$$

koşullarını sağlamasıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (11) deki gibi yani $Z,\ T,\ T' \in D$, $Z \subset T$, $Z \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' = Z_3$ olmak üzere

$$\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$$

biçiminde olsun. $Q_{11} = \{Z, T, T', Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ dersek Lemma 3.1.1 den dolayı Q_{11}, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_{11}$ olduğu açıktır. Teorem 3.1.2 den α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizmasının

$$Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z),\ Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T),\ Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T'),$$

$$Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2),\ Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1),$$

$$Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing,\ Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing \text{ ve } Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$$

koşullarını sağlamasıdır.■

Lemma 4.1.2 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*(Q_1)\right| = 9$$

olur.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının quasinormal gösterimi $\alpha = X \times T,\ T \in D$ biçiminde olsun. Bu durumda

$$Q_1\vartheta_{XI} = \{\{Z_8\},\{Z_7\},\{Z_6\},\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}\}$$

olduğundan

$$\left|R^*(Q_1)\right| = \sum_{Q' \in Q_1\vartheta_{XI}} \left|R(Q')\right| = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{9} = 9$$

olarak bulunur.■

Bir $\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.1.1-(2) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $Q_2 = \{T, T'\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} Q_2\vartheta_{XI} = \{&\{Z_3,Z_1\},\{Z_3,Z_2\},\{Z_4,Z_1\},\{Z_4,Z_2\},\{Z_4,Z_3\},\{Z_5,Z_1\},\{Z_5,Z_2\},\\ &\{Z_5,Z_3\},\{Z_6,Z_1\},\{Z_6,Z_2\},\{Z_6,Z_3\},\{Z_7,Z_1\},\{Z_7,Z_2\},\{Z_7,Z_3\},\\ &\{Z_7,Z_4\},\{Z_7,Z_5\},\{Z_8,Z_1\},\{Z_8,Z_2\},\{Z_8,Z_3\},\{Z_8,Z_5\},\{Z_8,Z_6\},\\ &\{Z_1,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_6,\breve{D}\},\{Z_7,\breve{D}\},\{Z_8,\breve{D}\}\} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $|\Omega(Q_2)| = 29$ bulunur. Ayrıca Q_2 nin tam otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $|\Phi(Q_2)| = 1$ olur. Öte yandan

$$D_1' = \{Z_8,\breve{D}\},\ D_2' = \{Z_7,\breve{D}\},\ D_3' = \{Z_5,\breve{D}\},\ D_4' = \{Z_3,Z_1\},\ D_5' = \{Z_3,Z_2\},$$

$$D_6' = \{Z_5,Z_1\},\ D_7' = \{Z_5,Z_2\},\ D_8' = \{Z_5,Z_3\},\ D_9' = \{Z_6,Z_1\},\ D_{10}' = \{Z_6,Z_2\},$$

$$D_{11}' = \{Z_6,Z_3\},\ D_{12}' = \{Z_8,Z_1\},\ D_{13}' = \{Z_8,Z_2\},\ D_{14}' = \{Z_8,Z_3\},\ D_{15}' = \{Z_8,Z_5\},$$

$$D_{16}' = \{Z_8,Z_6\},\ D_{17}' = \{Z_6,\breve{D}\},\ D_{18}' = \{Z_1,\breve{D}\},\ D_{19}' = \{Z_2,\breve{D}\},\ D_{20}' = \{Z_3,\breve{D}\},$$

$$D_{21}' = \{Z_4,Z_1\},\ D_{22}' = \{Z_4,Z_2\},\ D_{23}' = \{Z_4,Z_3\},\ D_{24}' = \{Z_7,Z_1\},\ D_{25}' = \{Z_7,Z_2\},$$

$$D_{26}' = \{Z_7,Z_3\}, D_{27}' = \{Z_7,Z_4\},\ D_{28}' = \{Z_7,Z_5\},\ D_{29}' = \{Z_4,\breve{D}\}$$

olarak gösterirsek

$$R^*(Q_2) = \bigcup_{i=1}^{29} R(D_i')$$

olur.

Lemma 4.1.3 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*(Q_2)\right| = 29\cdot\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|} + 29\cdot\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|} - 29\cdot\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: $Z_8 \subseteq Z,\ Z' \in D$ ve $Z \subset Z'$ olmak üzere $D' = \{Z, Z'\} \in Q_2\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Teorem 4.1.1-(2) den α regüler elemanının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ biçimindedir ve Q_2 ile D' tam α-izomorf olduklarından $Y_T^\alpha \supseteq Z$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ koşulları sağlanır. Öte yandan $Z_8 \subseteq Z$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ her zaman sağlanır. O halde $D_1' = \{Z_8, \breve{D}\}$ dersek

$D_1' \in Q_2\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D_1')$ ve $R(D') \subseteq R(D_1')$ olur. Sonuç olarak $i = 1,2,...,20$ için $R(D_i') \subseteq R(D_1')$ olur.

Benzer olarak $Z_7 \subseteq Z,\ Z' \in D,\ Z \subset Z'$ olmak üzere $D' = \{Z, Z'\} \in Q_2\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Teorem 4.1.1-(2) den α regüler elemanının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ biçimindedir ve Q_2 ile D' tam α-izomorf olduklarından $Y_T^\alpha \supseteq Z$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ koşulları sağlanır. Öte yandan $Z_7 \subseteq Z$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ her zaman sağlanır. O halde $D_2' = \{Z_7, \breve{D}\}$ dersek $D_2' \in Q_2\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D_2')$ olur. Böylece $R(D') \subseteq R(D_2')$ elde edilir. Sonuç olarak $i = 21,...,29$ için $R(D_i') \subseteq R(D_2')$ bulunur. O halde

$$R^*(Q_2) = R(D_1') \cup R(D_2')$$

olur. Buradan $|R^*(Q_2)| = |R(D_1')| + |R(D_2')| - |R(D_1') \cap R(D_2')|$ elde edilir.

Şimdi $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') &\Leftrightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \text{ ve } Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \alpha \in R(D_3')\end{aligned}$$

gerektirmesinden $R(D_1') \cap R(D_2') = R(D_3')$ olur. $R(D_3')$ yukarıdaki eşitlikte $R(D_1') \cap R(D_2')$ yerine yazılırsa

$$|R(Q_2)| = |R(D_1')| + |R(D_2')| - |R(D_3')|$$

elde edilir. Teorem 1.1.54 den

$$|R(D_1')| = 29 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_8|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|},$$

$$|R(D_2')| = 29 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|},$$

$$|R(D_3')| = 29 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak bulunur. Böylece

$$|R^*(Q_2)| = 29 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_8|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + 29 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} - 29 \cdot \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olur.■

Bir $\alpha \in B_X\left(D\right)$ regüler elemanının Teorem 4.1.1-(3) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V\left(D,\alpha\right)=Q_3=\left\{T,T',T''\right\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}Q_3\vartheta_{XI}=\{&\{Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_4,Z_3,Z_2\},\{Z_5,Z_3,Z_1\},\{Z_5,Z_3,Z_2\},\{Z_6,Z_3,Z_1\},\{Z_6,Z_3,Z_2\},\\ &\{Z_7,Z_3,Z_1\},\{Z_7,Z_3,Z_2\},\{Z_7,Z_4,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_2\},\{Z_7,Z_4,Z_3\},\{Z_7,Z_5,Z_1\},\\ &\{Z_7,Z_5,Z_2\},\{Z_7,Z_5,Z_3\},\{Z_8,Z_3,Z_1\},\{Z_8,Z_3,Z_2\},\{Z_8,Z_5,Z_1\},\{Z_8,Z_5,Z_2\},\\ &\{Z_8,Z_5,Z_3\},\{Z_8,Z_6,Z_1\},\{Z_8,Z_6,Z_2\},\{Z_8,Z_6,Z_3\},\{Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_3,Z_2,\breve{D}\},\\ &\{Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_4,Z_3,\breve{D}\},\{Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,\breve{D}\},\\ &\{Z_6,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_2,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,\breve{D}\},\{Z_7,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,\breve{D}\},\\ &\{Z_7,Z_4,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,\breve{D}\},\{Z_8,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_3,\breve{D}\},\{Z_8,Z_5,\breve{D}\},\\ &\{Z_8,Z_6,\breve{D}\}\}\end{aligned}$$

olur. O halde $\left|\Omega\left(Q_3\right)\right|=43$ dir. Ayrıca Q_3 ün tam otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $\left|\Phi\left(Q_3\right)\right|=1$ olur. Öte yandan

$$D_1'=\{Z_8,Z_6,\breve{D}\},\ D_2'=\{Z_8,Z_5,\breve{D}\},\ D_3'=\{Z_8,Z_3,\breve{D}\},\ D_4'=\{Z_8,Z_2,\breve{D}\},$$

$$D_5'=\{Z_8,Z_1,\breve{D}\},\ D_6'=\{Z_7,Z_5,\breve{D}\},\ D_7'=\{Z_7,Z_4,\breve{D}\},\ D_8'=\{Z_7,Z_3,\breve{D}\},$$

$$D_9'=\{Z_7,Z_2,\breve{D}\},\ D_{10}'=\{Z_7,Z_1,\breve{D}\},\ D_{11}'=\{Z_4,Z_3,Z_1\},\ D_{12}'=\{Z_4,Z_3,Z_2\},$$

$$D_{13}'=\{Z_5,Z_3,Z_1\},\ D_{14}'=\{Z_5,Z_3,Z_2\},\ D_{15}'=\{Z_6,Z_3,Z_1\},\ D_{16}'=\{Z_6,Z_3,Z_2\},$$

$$D_{17}'=\{Z_7,Z_3,Z_1\},\ D_{18}'=\{Z_7,Z_3,Z_2\},\ D_{19}'=\{Z_7,Z_4,Z_1\},\ D_{20}'=\{Z_7,Z_4,Z_2\},$$

$$D_{21}'=\{Z_7,Z_4,Z_3\},\ D_{22}'=\{Z_7,Z_5,Z_1\},\ D_{23}'=\{Z_7,Z_5,Z_2\},\ D_{24}'=\{Z_7,Z_5,Z_3\},$$

$$D_{25}'=\{Z_8,Z_3,Z_1\},\ D_{26}'=\{Z_8,Z_3,Z_2\},\ D_{27}'=\{Z_8,Z_5,Z_1\},\ D_{28}'=\{Z_8,Z_5,Z_2\},$$

$$D_{29}'=\{Z_8,Z_5,Z_3\},\ D_{30}'=\{Z_8,Z_6,Z_1\},\ D_{31}'=\{Z_8,Z_6,Z_2\},\ D_{32}'=\{Z_8,Z_6,Z_3\},$$

$$D_{33}'=\{Z_3,Z_1,\breve{D}\},\ D_{34}'=\{Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ D_{35}'=\{Z_4,Z_1,\breve{D}\},\ D_{36}'=\{Z_4,Z_2,\breve{D}\},$$

$$D_{37}'=\{Z_4,Z_3,\breve{D}\},\ D_{38}'=\{Z_5,Z_1,\breve{D}\},\ D_{39}'=\{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\ D_{40}'=\{Z_5,Z_3,\breve{D}\},$$

$$D_{41}'=\{Z_6,Z_1,\breve{D}\},\ D_{42}'=\{Z_6,Z_2,\breve{D}\},\ D_{43}'=\{Z_6,Z_3,\breve{D}\}$$

olarak gösterilir ise

$$R^*\left(Q_3\right)=\bigcup_{i=1}^{43}R\left(D_i'\right)$$

olur.

Lemma 4.1.4 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_3)\right| = &\left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \left|R(D_4')\right| + \left|R(D_5')\right| + \left|R(D_6')\right| + \\ &\left|R(D_7')\right| + \left|R(D_8')\right| + \left|R(D_9')\right| + \left|R(D_{10}')\right| + \left|R(D_3') \cap R(D_9')\right| + \\ &2 \cdot \left|R(D_5') \cap R(D_8')\right| - \left|R(D_1') \cap R(D_3')\right| - \left|R(D_2') \cap R(D_3')\right| - \\ &\left|R(D_3') \cap R(D_4')\right| - \left|R(D_3') \cap R(D_5')\right| - \left|R(D_3') \cap R(D_8')\right| - \\ &\left|R(D_3') \cap R(D_{10}')\right| - \left|R(D_4') \cap R(D_9')\right| - \left|R(D_5') \cap R(D_{10}')\right| - \\ &\left|R(D_6') \cap R(D_8')\right| - \left|R(D_7') \cap R(D_8')\right| - \left|R(D_8') \cap R(D_9')\right| - \left|R(D_8') \cap R(D_{10}')\right|\end{aligned}$$

olur.

İspat: $Z_8 \subseteq Z$ ve $Z \subset Z' \subset Z''$ olmak üzere $D' = \{Z, Z', Z''\} \in Q_3\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Teorem 4.1.1-(3) den α regüler elemanının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ biçiminde olur ve α regüler elemanı için $Y_T^\alpha \supseteq Z$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{T'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ ve $Y_{T''}^\alpha \cap Z'' \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_8 \subseteq Z$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{T'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ her zaman sağlanır. $D'' = \{Z_8, Z', \breve{D}\}$ dersek, o zaman $D'' = \{Z_8, Z', \breve{D}\} \in Q_3\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D'')$ olur. Böylece $R(D') \subseteq R(D'')$ olarak elde edilir. Ayrıca $D''' = \{Z_6, Z', Z_1\} \in Q_3\vartheta_{XI}$ veya $D''' = \{Z_6, Z', Z_2\} \in Q_3\vartheta_{XI}$ XI -alt yarılatisleri için de benzer adımlar uygulandığında $R(D''') \subseteq R(D'')$ olduğu görülür.

Benzer olarak $Z_7 \subseteq Z$ ve $Z \subset Z' \subset Z''$ olmak üzere $D' = \{Z, Z', Z''\} \in Q_3\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_3 ile D' tam α-izomorf olduklarından Teorem 4.1.1-(3) den α regüler elemanının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ biçiminde olur ve α regüler elemanı için $Y_T^\alpha \supseteq Z$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{T'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ ve $Y_{T''}^\alpha \cap Z'' \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_7 \subseteq Z$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z'$, $Y_{T'}^\alpha \cap Z' \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ her zaman sağlanır. O halde $D' = \{Z_7, Z', \breve{D}\}$ dersek, o zaman $D' = \{Z_7, Z', \breve{D}\} \in Q_3\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D'')$ olur. Böylece $R(D') \subseteq R(D'')$ olur. Ayrıca $D''' = \{Z_7, Z', Z_1\} \in Q_3\vartheta_{XI}$ veya $D''' = \{Z_7, Z', Z_2\} \in Q_3\vartheta_{XI}$ XI -alt yarılatisleri için de benzer adımlar uygulandığında $R(D''') \subseteq R(D'')$ olduğu görülür. O halde

$$R(D'_{12}) \subseteq R(D'_3),\ R(D'_{14}) \subseteq R(D'_3),\ R(D'_{16}) \subseteq R(D'_3),\ R(D'_{25}) \subseteq R(D'_3),$$

$$R(D'_{26}) \subseteq R(D'_3),\ R(D'_{40}) \subseteq R(D'_3),\ R(D'_{43}) \subseteq R(D'_3),\ R(D'_{15}) \subseteq R(D'_3),$$

$$R(D'_{30}) \subseteq R(D'_1),\ R(D'_{31}) \subseteq R(D'_1),\ R(D'_{32}) \subseteq R(D'_1),\ R(D'_{27}) \subseteq R(D'_2),$$

$$R(D'_{28}) \subseteq R(D'_2),\ R(D'_{29}) \subseteq R(D'_2),\ R(D'_{34}) \subseteq R(D'_4),\ R(D'_{39}) \subseteq R(D'_4),$$

$$R(D'_{42}) \subseteq R(D'_4),\ R(D'_{38}) \subseteq R(D'_5),\ R(D'_{41}) \subseteq R(D'_5),\ R(D'_{36}) \subseteq R(D'_9),$$

$$R(D'_{34}) \subseteq R(D'_4),\ R(D'_{22}) \subseteq R(D'_6),\ R(D'_{20}) \subseteq R(D'_7),\ R(D'_{21}) \subseteq R(D'_7),$$

$$R(D'_{11}) \subseteq R(D'_8),\ R(D'_{13}) \subseteq R(D'_8),\ R(D'_{17}) \subseteq R(D'_8),\ R(D'_{18}) \subseteq R(D'_8),$$

$$R(D'_{37}) \subseteq R(D'_8),\ R(D'_{39}) \subseteq R(D'_9),\ R(D'_{33}) \subseteq R(D'_{10})$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak

$$R^*(Q_3) = \bigcup_{i=1}^{10} R(D'_i)$$

olur. Şimdi bu birleşimde yer alan kümelerden arakesitleri boş küme olanları ve birbirine eşit olanları belirleyelim.

$R(D'_1) \cap R(D'_6) \neq \varnothing$ olsun. O halde bir $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_6)$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned} \alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_6) \Rightarrow\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing, \\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \\ \Rightarrow\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Y_{T'}^\alpha \neq \varnothing \end{aligned}$$

olur. Bu da α nın quasinormal gösteriminde ki Y_T^α kümelerinin ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D'_1) \cap R(D'_6) = \varnothing$ olur. Benzer olarak

$$R(D'_2) \cap R(D'_6) = \varnothing,\ R(D'_2) \cap R(D'_7) = \varnothing,\ R(D'_2) \cap R(D'_8) = \varnothing,$$

$$R(D'_2) \cap R(D'_9) = \varnothing,\ R(D'_2) \cap R(D'_{10}) = \varnothing,\ R(D'_3) \cap R(D'_6) = \varnothing,$$

$$R(D'_4) \cap R(D'_5) = \varnothing,\ R(D'_4) \cap R(D'_6) = \varnothing,\ R(D'_4) \cap R(D'_{10}) = \varnothing,$$

$$R(D'_5) \cap R(D'_6) = \varnothing,\ R(D'_5) \cap R(D'_9) = \varnothing,\ R(D'_9) \cap R(D'_{10}) = \varnothing$$

oldukları görülür. $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha\in R(D_1')\cap R(D_2')\Leftrightarrow\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing \text{ ve}\\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing\\ \Leftrightarrow\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\\ & Y_{T'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing\\ \Leftrightarrow\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,\\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,\\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing\\ \Leftrightarrow\ & \alpha\in R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_3')\end{aligned}$$

olur. Bu gerektirmeden $R(D_1')\cap R(D_2')=R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_3')$ elde edilir. Benzer olarak

$R(D_1')\cap R(D_2')=R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_3')$,

$R(D_1')\cap R(D_4')=R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_4')$,

$R(D_1')\cap R(D_5')=R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_5')$,

$R(D_1')\cap R(D_7')=R(D_1')\cap R(D_7')\cap R(D_8')$,

$R(D_1')\cap R(D_8')=R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_8')$,

$$\begin{aligned}R(D_1')\cap R(D_9') &= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_9')=R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_8')\\ &= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_9')=R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_8')\cap R(D_9')\\ &= R(D_1')\cap R(D_4')\cap R(D_8')=R(D_1')\cap R(D_4')\cap R(D_9')\\ &= R(D_1')\cap R(D_4')\cap R(D_8')\cap R(D_9')=R(D_1')\cap R(D_8')\cap R(D_9')\\ &= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_8')\cap R(D_9'),\end{aligned}$$

$R(D_2')\cap R(D_4')=R(D_2')\cap R(D_3')\cap R(D_4')$,

$R(D_2')\cap R(D_5')=R(D_2')\cap R(D_3')\cap R(D_5')$,

$R(D_3')\cap R(D_7')=R(D_3')\cap R(D_7')\cap R(D_8')$,

$R(D_3')\cap R(D_9')=R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_9')=R(D_3')\cap R(D_8')\cap R(D_9')$,

$$\begin{aligned}R(D_4')\cap R(D_7') &= R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_7')=R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\\ &= R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_7')\cap R(D_9')=R(D_3')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_9')\\ &= R(D_3')\cap R(D_7')\cap R(D_9')=R(D_4')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\\ &= R(D_4')\cap R(D_7')\cap R(D_9')=R(D_4')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_9')\\ &= R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_9'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(D_4')\cap R(D_8') &= R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_8')\\ &= R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_8')\cap R(D_9')\\ &= R(D_4')\cap R(D_8')\cap R(D_9'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(D_5')\cap R(D_7') &= R(D_3')\cap R(D_5')\cap R(D_7') = R(D_3')\cap R(D_5')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\\ &= R(D_3')\cap R(D_5')\cap R(D_7')\cap R(D_{10}') = R(D_3')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}')\\ &= R(D_3')\cap R(D_7')\cap R(D_{10}') = R(D_5')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\\ &= R(D_5')\cap R(D_7')\cap R(D_{10}') = R(D_5')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}')\\ &= R(D_3')\cap R(D_5')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(D_5')\cap R(D_8') &= R(D_3')\cap R(D_5')\cap R(D_8') = R(D_3')\cap R(D_5')\cap R(D_{10}')\\ &= R(D_3')\cap R(D_5')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}') = R(D_3')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}'),\\ &= R(D_5')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}'),\end{aligned}$$

$$R(D_6')\cap R(D_7') = R(D_6')\cap R(D_7')\cap R(D_8'),$$

$$R(D_6')\cap R(D_9') = R(D_6')\cap R(D_8')\cap R(D_9'),$$

$$R(D_6')\cap R(D_{10}') = R(D_6')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}'),$$

$$R(D_7')\cap R(D_9') = R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_9')$$

$$R(D_7')\cap R(D_{10}') = R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}'),$$

$$R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_4') = R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_3')\cap R(D_4'),$$

$$R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_5') = R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_3')\cap R(D_5'),$$

$$R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_7') = R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_7')\cap R(D_8'),$$

$$\begin{aligned}R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_7') &= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_7')\cap R(D_9')\\ &= R(D_1')\cap R(D_4')\cap R(D_7')\\ &= R(D_1')\cap R(D_4')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\\ &= R(D_1')\cap R(D_4')\cap R(D_7')\cap R(D_9')\\ &= R(D_1')\cap R(D_7')\cap R(D_9')\\ &= R(D_1')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_9')\\ &= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\\ &= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_7')\cap R(D_9')\\ &= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_9')\\ &= R(D_1')\cap R(D_4')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_9')\\ &= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_9'),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_5')\cap R(D_7') &= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_7')\cap R(D_{10}')\\
&= R(D_1')\cap R(D_5')\cap R(D_7')\\
&= R(D_1')\cap R(D_5')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\\
&= R(D_1')\cap R(D_5')\cap R(D_7')\cap R(D_{10}')\\
&= R(D_1')\cap R(D_7')\cap R(D_{10}')\\
&= R(D_1')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}')\\
&= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_5')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\\
&= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_5')\cap R(D_7')\cap R(D_{10}')\\
&= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}')\\
&= R(D_1')\cap R(D_5')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}')\\
&= R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_5')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}'),
\end{aligned}
$$

$$R(D_6')\cap R(D_7')\cap R(D_9') = R(D_6')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_9'),$$

$$R(D_6')\cap R(D_7')\cap R(D_{10}') = R(D_6')\cap R(D_7')\cap R(D_8')\cap R(D_{10}')$$

oldukları görülür. O halde

$$
\begin{aligned}
\left|R^*(Q_3)\right| = {}& \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \left|R(D_4')\right| + \left|R(D_5')\right| + \left|R(D_6')\right| +\\
& \left|R(D_7')\right| + \left|R(D_8')\right| + \left|R(D_9')\right| + \left|R(D_{10}')\right| + \left|R(D_3')\cap R(D_9')\right| +\\
& 2\cdot\left|R(D_5')\cap R(D_8')\right| - \left|R(D_1')\cap R(D_3')\right| - \left|R(D_2')\cap R(D_3')\right| -\\
& \left|R(D_3')\cap R(D_4')\right| - \left|R(D_3')\cap R(D_5')\right| - \left|R(D_3')\cap R(D_8')\right| -\\
& \left|R(D_3')\cap R(D_{10}')\right| - \left|R(D_4')\cap R(D_9')\right| - \left|R(D_5')\cap R(D_{10}')\right| -\\
& \left|R(D_6')\cap R(D_8')\right| - \left|R(D_7')\cap R(D_8')\right| - \left|R(D_8')\cap R(D_9')\right| - \left|R(D_8')\cap R(D_{10}')\right|
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.■

Lemma 4.1.5 $D' = \{Y, Y', \breve{D}\}$, $D'' = \{Y_1, Y_1', \breve{D}\}$, $D' \neq D''$ ve $Y_1' \supseteq Y'$ olmak üzere $D', D'' \in \{D_1', D_2', ..., D_{10}'\}$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $T, T', T'' \in D$ ve $T \subset T' \subset T''$ olmak üzere $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ biçiminde olsun. O zaman $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ ancak ve ancak

$$Y_T^\alpha \supseteq Y \cup Y_1,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 4.1.1-(3) den

$$\alpha \in R(D') \cap R(D'') \Leftrightarrow \alpha \in R(D') \text{ ve } \alpha \in R(D'')$$

$$\Leftrightarrow Y_T^\alpha \supseteq Y,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y',\ Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \text{ ve}$$

$$Y_T^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_{T'}^\alpha \cap Y_1' \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$

$$\Leftrightarrow Y_T^\alpha \supseteq Y \cup Y_1,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$

olarak bulunur.■

Lemma 4.1.6 $D' \neq D''$ ve $Y_1' \supseteq Y'$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', \breve{D}\}$, $D'' = \{Y_1, Y_1', \breve{D}\}$ $\in \{D_1', D_2', ..., D_{10}'\}$ ve X sonlu olsun. Bu taktirde

$$\left|R(D') \cap R(D'')\right| = 43 \cdot 2^{\left|(Y_1' \setminus (Y' \cup Y \cup Y_1))\right|} \cdot \left(2^{\left|Y' \setminus (Y \cup Y_1)\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Y_1'\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Y_1'\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: $Y_1' \supseteq Y'$ olmak üzere $D' \neq D''$, $D' = \{Y, Y', \breve{D}\}$, $D'' = \{Y_1, Y_1', \breve{D}\} \in \{D_1', D_2', ..., D_{10}'\}$ ve $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ olsun. $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan α ikili bağıntısı bir $f_\alpha : X \to D$, $f_\alpha(t) = t\alpha$ dönüşümü ile belirlidir. $\{Y \cup Y_1,\ Y_1' \setminus (Y \cup Y_1),\ \breve{D} \setminus Y_1',\ X \setminus \breve{D}\}$ kümesinin X in parçalanışı olduğu açıktır. f_α dönüşümünün $Y \cup Y_1$, $Y_1' \setminus (Y \cup Y_1)$, $\breve{D} \setminus Y_1'$ ve $X \setminus \breve{D}$ kümelerine kısıtlanışı sırasıyla $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$ ve $f_{3\alpha}$ olsun. Şimdi Lemma 4.1.5 kullanılarak $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$ ve $f_{3\alpha}$. dönüşümlerinin özelliklerini belirleyelim.

1. $t \in Y \cup Y_1$ olsun. $Y \cup Y_1 \subseteq Y_T^\alpha$ olduğundan $t \in Y_T^\alpha$ ve $t\alpha = T$ elde edilir. O halde $f_{0\alpha}(t) = T$ her $t \in Y \cup Y_1$ olur.

2. $t \in Y_1' \setminus (Y \cup Y_1)$ olsun. $t \in Y_1' \setminus (Y \cup Y_1) \subseteq Y_1' \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$ olup $t \in Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$ dır. Y_T^α ve $Y_{T'}^\alpha$ kümelerinin tanımından her $t \in Y_1' \setminus (Y \cup Y_1)$ için $f_{1\alpha}(t) \in \{T, T'\}$ olur. Ayrıca $Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t' \in Y'$ için $t'\alpha = T'$ olur. $t' \in Y \cup Y_1$ olduğunu kabul edelim. $t' \in Y \cup Y_1 \subseteq Y_T^\alpha$ olduğundan $t'\alpha = T$ olur. Bu da $T \neq T'$ olduğundan $t'\alpha = T'$ olması ile çelişir. O halde en az bir $t' \in Y' \setminus (Y \cup Y_1)$ için $f_{1\alpha}(t') = T'$ olur.

3. $t \in \breve{D} \setminus Y_1'$ olsun. Bu durumda $\breve{D} \setminus Y_1' \subseteq \breve{D} \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha = X$ olduğundan $t \in Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha$ ve $t\alpha \in \{T, T', T''\}$ olur. O halde her $t \in \breve{D} \setminus Y_1'$ için

$f_{3\alpha}(t)\in\{T,T',T''\}$ olarak bulunur. Ayrıca $Y_0^{\alpha}\cap T''\neq\varnothing$ olduğundan en az bir $t''\in T''$ için $t''\alpha=T''$ olur. $t''\in Y_1'$ olsun. $t''\in Y_1'\subseteq Y_T^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}$ olduğundan $t''\alpha\in\{T,T'\}$ olur. Bu ise $t''\alpha=T''$ olması ile çelişir. O halde en az bir $t''\in\breve{D}\setminus Y_1'$ için $f_{3\alpha}(t'')=T''$ olur.

4. $t\in X\setminus\breve{D}$ olsun. $t\in X\setminus\breve{D}\subseteq X=Y_T^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\cup Y_{T''}^{\alpha}$ olduğundan $t\alpha\in\{T,T',T''\}$ olur. O halde her $t\in X\setminus\breve{D}$ için $f_{4\alpha}(t)\in\{T,T',T''\}$ olur.

O halde keyfi bir $\alpha\in R(D')\cap R(D'')$ regüler elemanına karşılık yukarıdaki özellikleri sağlayan $(f_{0\alpha},f_{1\alpha},f_{2\alpha},f_{3\alpha})$ biçiminde bir sıralı sistem vardır. Şimdi aşağıdaki dönüşümleri tanımlayalım.

$f_0:Y\cup Y_1\to\{T\}$,

$f_1:Y_1'\setminus(Y\cup Y_1)\to\{T,T'\}$ ve en az bir $t'\in Y'\setminus(Y\cup Y_1)$ için $f_1(t')=T'$,

$f_2:\breve{D}\setminus Y_1'\to\{T,T',T''\}$ ve en az bir $t''\in\breve{D}\setminus Y_1'$ için $f_2(t'')=T''$,

$f_3:X\setminus\breve{D}\to\{T,T',T''\}$

olsun. Bu dönüşümler yardımıyla f dönüşümünü

$$f(t)=\begin{cases} f_0(t), & t\in Y\cup Y_1,\\ f_1(t), & t\in Y_1'\setminus(Y\cup Y_1),\\ f_2(t), & t\in\breve{D}\setminus Y_1',\\ f_3(t), & t\in X\setminus\breve{D}.\end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $\{Y\cup Y_1,\ Y_1'\setminus(Y\cup Y_1),\ \breve{D}\setminus Y_1',\ X\setminus\breve{D}\}$ kümesi X in parçalanışı olduğundan $f:X\to D$ tanımlı olur.

$$\beta=\bigcup_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$$

olsun. O halde $Y_T^{\beta}=\{t\mid t\beta=T\}$, $Y_{T'}^{\beta}=\{t\mid t\beta=T'\}$ ve $Y_{T''}^{\beta}=\{t\mid t\beta=T''\}$ olduğundan β ikili bağıntısı

$$\beta=(Y_T^{\beta}\times T)\cup(Y_{T'}^{\beta}\times T')\cup(Y_{T''}^{\beta}\times\breve{D})$$

biçiminde yazılabilir.

$x\in Y\cup Y_1$ olsun. Bu durumda f dönüşümünün tanımından $x\beta=T$ olur. O halde $x\in Y_T^{\beta}$ bulunur. Yani $Y_T^{\beta}\supseteq Y\cup Y_1$ bulunur. Benzer olarak f dönüşümünün ve $Y_{T'}^{\beta}$

kümesinin tanımından $Y_T^\beta \cup Y_{T'}^\beta \supseteq Y_1'$ olduğu elde edilir. Ayrıca en az bir $t' \in Y' \setminus (Y \cup Y_1)$ için $f_1(t') = T'$ olduğundan $Y_{T'}^\beta \cap Y' \neq \varnothing$ elde edilir. En az bir $t'' \in \breve{D} \setminus Y_1'$ için $f_2(t'') = \breve{D}$ olduğundan $Y_0^\beta \cap \breve{D} \neq \varnothing$ olarak bulunur. O halde Lemma 4.1.5 den $\beta \in R(D') \cap R(D'')$ olur.

Şimdi $\alpha, \beta \in R(D') \cap R(D'')$ ve $\alpha \neq \beta$ olsun. Bu durumda α ya karşılık $f_\alpha(t) = t\alpha$ olacak şekilde $f_\alpha = (f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ sıralı sistemi ve β ya karşılık $f_\beta(t) = t\beta$ olacak şekilde $f_\beta = (f_{0\beta}, f_{1\beta}, f_{2\beta}, f_{3\beta})$ sıralı sistemi vardır. $f_\alpha = f_\beta$ olsun. O zaman her $t \in X$ için $f_\alpha(t) = f_\beta(t)$ olur. Bu da her $t \in X$ için $t\alpha = t\beta$ olmasını gerektirir. Buradan $\alpha = \beta$ elde edilir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $f_\alpha \neq f_\beta$ dır.

Sonuç olarak $R(D') \cap R(D'')$ ile $f_\alpha = (f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ biçimindeki ayrık dönüşümlerin sıralı sistemlerinin kümesi arasında bire-bir bir eşleme vardır. Şimdi bu f_α ların sayısını bulalım. Teorem 1.1.10 dan $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}$ dönüşümlerinin sayısı sırasıyla

$$1,\ 2^{\left|(Y_1' \setminus (Y \cup Y_1)) \setminus (Y' \setminus (Y \cup Y_1))\right|} \cdot \left(2^{\left|Y' \setminus (Y \cup Y_1)\right|} - 1\right),\ 3^{\left|\breve{D} \setminus Y_1'\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Y_1'\right|},\ 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olarak bulunur.

Bu sayıların $T \subset T' \subset T''$ $(T, T', T'' \in D)$ olmak üzere $Q_3 = \{T, T', T''\}$ XI-alt yarı latisinin seçilişinden bağımsız olduğu görülür. Dolayısıyla D nin Q_3 e tam izomorf olan 43 tane XI-alt yarı latisi olduğundan her biri için yazılabilecek birbirinden farklı f_α ların sayısı

$$2^{\left|(Y_1' \setminus (Y' \cup Y \cup Y_1))\right|} \cdot \left(2^{\left|Y' \setminus (Y \cup Y_1)\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Y_1'\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Y_1'\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olur. Buradan

$$\left|R(D') \cap R(D'')\right| = 43 \cdot 2^{\left|(Y_1' \setminus (Y' \cup Y \cup Y_1))\right|} \cdot \left(2^{\left|Y' \setminus (Y \cup Y_1)\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Y_1'\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Y_1'\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 4.1.7 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R(D_1') \cap R(D_3')\right| = 43 \cdot 2^{\left|Z_3 \setminus Z_6\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_6 \setminus Z_8\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_3\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_3\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

$$\left|R(D_2') \cap R(D_3')\right| = 43 \cdot 2^{\left|Z_3 \setminus Z_5\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_5 \setminus Z_8\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_3\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_3\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

$$\left|R(D_3') \cap R(D_4')\right| = 43 \cdot 2^{\left|Z_2 \setminus Z_3\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_8\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right| = 43\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_8'\right)\right| = 43\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_9'\right)\right| = 43\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_{10}'\right)\right| = 43\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_9'\right)\right| = 43\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_2|}\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_5'\right)\cap R\left(D_8'\right)\right| = 43\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_5'\right)\cap R\left(D_{10}'\right)\right| = 43\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_6'\right)\cap R\left(D_8'\right)\right| = 43\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_7'\right)\cap R\left(D_8'\right)\right| = 43\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_8'\right)\cap R\left(D_9'\right)\right| = 43\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_8'\right)\cap R\left(D_{10}'\right)\right| = 43\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: $D_1'=\left\{Z_8,Z_6,\breve{D}\right\}$, $D_2'=\left\{Z_8,Z_5,\breve{D}\right\}$, $D_3'=\left\{Z_8,Z_3,\breve{D}\right\}$, $D_4'=\left\{Z_8,Z_2,\breve{D}\right\}$, $D_5'=\left\{Z_8,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_6'=\left\{Z_7,Z_5,\breve{D}\right\}$, $D_7'=\left\{Z_7,Z_4,\breve{D}\right\}$, $D_8'=\left\{Z_7,Z_3,\breve{D}\right\}$, $D_9'=\left\{Z_7,Z_2,\breve{D}\right\}$, $D_{10}'=\left\{Z_7,Z_1,\breve{D}\right\}$

XI - alt yarılatisleri için Lemma 4.1.6 uygulandığında istenen elde edilir.■

Teorem 4.1.8 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R\left(Q_3\right)\right| = {} & 43\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_6\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_6\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+43\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ & 43\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+43\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ & 43\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+43\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ & 43\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+43\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ & 43\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+43\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\end{aligned}$$

$$43\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+2\cdot 43\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)$$

$$\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-43\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-$$

$$43\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-43\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)$$

$$\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-43\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-$$

$$43\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-43\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)$$

$$\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-43\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-$$

$$43\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-43\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)$$

$$\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-43\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)$$

$$\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-43\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-$$

$$43\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Lemma 4.1.4, Teorem 1.1.54 ve Lemma 4.1.7 den istenen elde edilir.■

$\alpha\in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.1.1-(4) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda

$$V(D,\alpha)=Q_4=\{Z,Z',T,T'\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}Q_4\vartheta_{XI}=\{&\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\},\\&\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_1\},\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2\},\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_1\},\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2\},\\&\{Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\\&\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\\&\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\\&\{Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_8,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\\&\{Z_8,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_8,Z_6,Z_1,\breve{D}\},\\&\{Z_8,Z_6,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_6,Z_3,\breve{D}\}\}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $|\Omega(Q_4)|=30$ olur.

Ayrıca Q_4 ün tam otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $\left|\Phi\left(Q_4\right)\right|=1$ olur. Öte yandan

$$D'_1=\left\{Z_8,Z_6,Z_3,\breve{D}\right\},\ D'_2=\left\{Z_8,Z_6,Z_2,\breve{D}\right\},\ D'_3=\left\{Z_8,Z_6,Z_1,\breve{D}\right\},$$

$$D'_4=\left\{Z_8,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\},\ D'_5=\left\{Z_8,Z_5,Z_2,\breve{D}\right\},\ D'_6=\left\{Z_8,Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},$$

$$D'_7=\left\{Z_8,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\ D'_8=\left\{Z_8,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\ D'_9=\left\{Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\},$$

$$D'_{10}=\left\{Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\right\},\ D'_{11}=\left\{Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},\ D'_{12}=\left\{Z_7,Z_4,Z_3,\breve{D}\right\},$$

$$D'_{13}=\left\{Z_7,Z_4,Z_2,\breve{D}\right\},\ D'_{14}=\left\{Z_7,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\ D'_{15}=\left\{Z_7,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},$$

$$D'_{16}=\left\{Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\ D'_{17}=\left\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1\right\},\ D'_{18}=\left\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2\right\},$$

$$D'_{19}=\left\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\right\},\ D'_{20}=\left\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\right\},\ D'_{21}=\left\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_1\right\},$$

$$D'_{22}=\left\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2\right\},\ D'_{23}=\left\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_1\right\},\ D'_{24}=\left\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2\right\},$$

$$D'_{25}=\left\{Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\ D'_{26}=\left\{Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\ D'_{27}=\left\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},$$

$$D'_{28}=\left\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\ D'_{29}=\left\{Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\ D'_{30}=\left\{Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}$$

olarak gösterirsek,

$$R^*\left(Q_4\right)=\bigcup_{i=1}^{30}R\left(D'_i\right)$$

olur.

Lemma 4.1.9 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_4\right)\right|=\sum_{i=1}^{16}\left|R\left(D'_i\right)\right|&-\left|R\left(D'_1\right)\cap R\left(D'_2\right)\right|-\left|R\left(D'_1\right)\cap R\left(D'_3\right)\right|-\left|R\left(D'_2\right)\cap R\left(D'_7\right)\right|\\&-\left|R\left(D'_3\right)\cap R\left(D'_8\right)\right|-\left|R\left(D'_4\right)\cap R\left(D'_5\right)\right|-\left|R\left(D'_4\right)\cap R\left(D'_6\right)\right|\\&-\left|R\left(D'_5\right)\cap R\left(D'_7\right)\right|-\left|R\left(D'_6\right)\cap R\left(D'_8\right)\right|-\left|R\left(D'_7\right)\cap R\left(D'_{15}\right)\right|\\&-\left|R\left(D'_8\right)\cap R\left(D'_{16}\right)\right|-\left|R\left(D'_9\right)\cap R\left(D'_{10}\right)\right|-\left|R\left(D'_9\right)\cap R\left(D'_{11}\right)\right|\\&-\left|R\left(D'_{10}\right)\cap R\left(D'_{15}\right)\right|-\left|R\left(D'_{11}\right)\cap R\left(D'_{16}\right)\right|-\left|R\left(D'_{12}\right)\cap R\left(D'_{13}\right)\right|\\&-\left|R\left(D'_{12}\right)\cap R\left(D'_{14}\right)\right|-\left|R\left(D'_{13}\right)\cap R\left(D'_{15}\right)\right|-\left|R\left(D'_{14}\right)\cap R\left(D'_{16}\right)\right|\end{aligned}$$

olur.

İspat: $Z_8\subseteq Y_1$ ve $Y_1\subset Y_2\subset Y_3\subset Y_4$ olmak üzere $D'=\left\{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4\right\}\in Q_4\vartheta_{XI}$ ve $\alpha\in R\left(D'\right)$ olsun. Teorem 4.1.1-(4) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi

$\alpha = \left(Y_T^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ biçiminde olur ve Q_4 ile D' tam α-izomorf olduklarından $Y_Z^\alpha \supseteq Y_1$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_2$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_3$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap Y_3 \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap Y_4 \neq \varnothing$ koşulları sağlanır. Öte yandan $Z_8 \subseteq Y_1$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan

$$Y_Z^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_3,$$
$$Y_{Z'}^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y_3 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$

her zaman sağlanır. O halde $D'' = \left\{Z_8, Y_2, Y_3, \breve{D}\right\} \in Q_4\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R\left(D''\right)$ olur. Dolayısıyla $R\left(D'\right) \subseteq R\left(D''\right)$ elde edilir. Benzer olarak $T \in \left\{Z_6, Z_5\right\}$ ve $T' \in \left\{Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ olmak üzere $D''' = \left\{T, Y_2, Y_3, T'\right\} \in Q_4\vartheta_{XI}$ için de $R\left(D'''\right) \subseteq R\left(D''\right)$ olduğu görülür.

$Z_7 \subseteq Y_1$ ve $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset Y_4$ olmak üzere $D' = \left\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\right\} \in Q_4\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R\left(D'\right)$ olsun. Teorem 4.1.1-(4) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ biçiminde olur ve Q_4 ile D' tam α-izomorf olduklarından $Y_Z^\alpha \supseteq Y_1$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_2$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_3$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap Y_3 \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap Y_4 \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_7 \subseteq Y_1$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan

$$Y_Z^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_3,$$
$$Y_{Z'}^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y_3 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$

her zaman sağlanır. O halde $D'' = \left\{Z_7, Y_2, Y_3, \breve{D}\right\} \in Q_4\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R\left(D''\right)$ olur. Buradan $R\left(D'\right) \subseteq R\left(D''\right)$ bulunur.

Ayrıca $T \in \left\{Z_4, Z_5\right\}$ ve $T' \in \left\{Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ olmak üzere $D''' = \left\{T, Y_2, Y_3, T'\right\} \in Q_4\vartheta_{XI}$ için de $R\left(D'''\right) \subseteq R\left(D''\right)$ olur. O halde

$$R\left(D'_{17}\right) \subseteq R\left(D'_{12}\right),\ R\left(D'_{18}\right) \subseteq R\left(D'_{12}\right),\ R\left(D'_{19}\right) \subseteq R\left(D'_{9}\right),\ R\left(D'_{20}\right) \subseteq R\left(D'_{9}\right),$$
$$R\left(D'_{21}\right) \subseteq R\left(D'_{4}\right),\ R\left(D'_{22}\right) \subseteq R\left(D'_{4}\right),\ R\left(D'_{23}\right) \subseteq R\left(D'_{1}\right),\ R\left(D'_{24}\right) \subseteq R\left(D'_{1}\right),$$
$$R\left(D'_{25}\right) \subseteq R\left(D'_{8}\right),\ R\left(D'_{26}\right) \subseteq R\left(D'_{7}\right)\ R\left(D'_{27}\right) \subseteq R\left(D'_{8}\right),\ R\left(D'_{28}\right) \subseteq R\left(D'_{7}\right),$$
$$R\left(D'_{29}\right) \subseteq R\left(D'_{8}\right),\ R\left(D'_{30}\right) \subseteq R\left(D'_{7}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$R^{*}(Q_4)=\bigcup_{i=1}^{16}R(D_i')$$

olarak bulunur. Şimdi bu birleşimde yer alan kümelerin arakesitlerini inceleyelim.

$R(D_1')\cap R(D_4')\neq\varnothing$ olduğunu kabul edelim. O halde $\alpha\in R(D_1')\cap R(D_4')$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha\in R(D_1')\cap R(D_4')\Rightarrow\ & Y_T^{\alpha}\supseteq Z_8,\ Y_T^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\supseteq Z_6,\ Y_T^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\cup Y_Z^{\alpha}\supseteq Z_3,\ Y_{T'}^{\alpha}\cap Z_6\neq\varnothing,\\ & Y_Z^{\alpha}\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^{\alpha}\cap\breve{D}\neq\varnothing,\\ & Y_T^{\alpha}\supseteq Z_8,\ Y_T^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\supseteq Z_5,\ Y_T^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\cup Y_Z^{\alpha}\supseteq Z_3,\ Y_{T'}^{\alpha}\cap Z_5\neq\varnothing,\\ & Y_Z^{\alpha}\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^{\alpha}\cap\breve{D}\neq\varnothing\\ \Rightarrow\ & Y_T^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\supseteq Z_6\cup Z_5=Z_3,\ \left(Y_T^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\right)\cap Y_Z^{\alpha}\supseteq Z_3\cap Y_Z^{\alpha}\neq\varnothing\end{aligned}$$

olur. Bu da α ikili bağıntısının quasinormal gösteriminde yer alan Y_T^{α} ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1')\cap R(D_4')=\varnothing$ dir. Benzer olarak

$R(D_1')\cap R(D_5')=\varnothing$, $R(D_1')\cap R(D_6')=\varnothing$, $R(D_1')\cap R(D_7')=\varnothing$,

$R(D_1')\cap R(D_8')=\varnothing$, $R(D_1')\cap R(D_9')=\varnothing$,

$R(D_1')\cap R(D_{10}')=\varnothing$, $R(D_1')\cap R(D_{11}')=\varnothing$, $R(D_1')\cap R(D_{12}')=\varnothing$,

$R(D_1')\cap R(D_{13}')=\varnothing$, $R(D_1')\cap R(D_{14}')=\varnothing$, $R(D_1')\cap R(D_{15}')=\varnothing$,

$R(D_1')\cap R(D_{16}')=\varnothing$, $R(D_2')\cap R(D_3')=\varnothing$, $R(D_2')\cap R(D_4')=\varnothing$,

$R(D_2')\cap R(D_6')=\varnothing$, $R(D_2')\cap R(D_8')=\varnothing$, $R(D_2')\cap R(D_9')=\varnothing$,

$R(D_2')\cap R(D_{10}')=\varnothing$, $R(D_2')\cap R(D_{11}')=\varnothing$, $R(D_2')\cap R(D_{12}')=\varnothing$,

$R(D_2')\cap R(D_{14}')=\varnothing$, $R(D_2')\cap R(D_{16}')=\varnothing$, $R(D_3')\cap R(D_4')=\varnothing$,

$R(D_3')\cap R(D_5')=\varnothing$, $R(D_3')\cap R(D_7')=\varnothing$, $R(D_3')\cap R(D_9')=\varnothing$,,

$R(D_3')\cap R(D_{11}')=\varnothing$, $R(D_3')\cap R(D_{12}')=\varnothing$, $R(D_3')\cap R(D_{13}')=\varnothing$,

$R(D_3')\cap R(D_{15}')=\varnothing$, $R(D_4')\cap R(D_7')=\varnothing$, $R(D_4')\cap R(D_8')=\varnothing$,

$R(D_4')\cap R(D_9')=\varnothing$, $R(D_4')\cap R(D_{10}')=\varnothing$, $R(D_4')\cap R(D_{11}')=\varnothing$,

$R(D_4')\cap R(D_{12}')=\varnothing$, $R(D_4')\cap R(D_{13}')=\varnothing$, $R(D_4')\cap R(D_{14}')=\varnothing$,

$R(D_4')\cap R(D_{15}')=\varnothing$, $R(D_4')\cap R(D_{16}')=\varnothing$, $R(D_5')\cap R(D_6')=\varnothing$,

$R(D_5')\cap R(D_8')=\varnothing$, $R(D_5')\cap R(D_9')=\varnothing$, $R(D_5')\cap R(D_{10}')=\varnothing$,

$R(D'_5)\cap R(D'_{11})=\varnothing,\ R(D'_5)\cap R(D'_{12})=\varnothing,\ R(D'_5)\cap R(D'_{13})=\varnothing,$

$R(D'_5)\cap R(D'_{14})=\varnothing,\ R(D'_5)\cap R(D'_{15})=\varnothing,\ R(D'_6)\cap R(D'_7)=\varnothing,$

$R(D'_6)\cap R(D'_9)=\varnothing,\ R(D'_6)\cap R(D'_{10})=\varnothing,\ R(D'_6)\cap R(D'_{11})=\varnothing,$

$R(D'_6)\cap R(D'_{12})=\varnothing,\ R(D'_6)\cap R(D'_{13})=\varnothing,\ R(D'_6)\cap R(D'_{14})=\varnothing,$

$R(D'_6)\cap R(D'_{15})=\varnothing,\ R(D'_6)\cap R(D'_{16})=\varnothing,\ R(D'_7)\cap R(D'_8)=\varnothing,$

$R(D'_7)\cap R(D'_9)=\varnothing,\ R(D'_7)\cap R(D'_{10})=\varnothing,\ R(D'_7)\cap R(D'_{11})=\varnothing,$

$R(D'_7)\cap R(D'_{12})=\varnothing,\ R(D'_7)\cap R(D'_{14})=\varnothing,\ R(D'_7)\cap R(D'_{16})=\varnothing,$

$R(D'_8)\cap R(D'_9)=\varnothing,\ R(D'_8)\cap R(D'_{10})=\varnothing,\ R(D'_8)\cap R(D'_{11})=\varnothing,$

$R(D'_8)\cap R(D'_{12})=\varnothing,\ R(D'_8)\cap R(D'_{13})=\varnothing,\ R(D'_8)\cap R(D'_{15})=\varnothing,$

$R(D'_9)\cap R(D'_{12})=\varnothing,\ R(D'_9)\cap R(D'_{13})=\varnothing,\ R(D'_9)\cap R(D'_{14})=\varnothing,$

$R(D'_9)\cap R(D'_{15})=\varnothing,\ R(D'_9)\cap R(D'_{16})=\varnothing,\ R(D'_{10})\cap R(D'_{11})=\varnothing,$

$R(D'_{10})\cap R(D'_{12})=\varnothing,\ R(D'_{10})\cap R(D'_{14})=\varnothing,\ R(D'_{10})\cap R(D'_{16})=\varnothing,$

$R(D'_{11})\cap R(D'_{12})=\varnothing,\ R(D'_{11})\cap R(D'_{13})=\varnothing,\ R(D'_{11})\cap R(D'_{15})=\varnothing,$

$R(D'_{12})\cap R(D'_{15})=\varnothing,\ R(D'_{11})\cap R(D'_{12})=\varnothing,\ R(D'_{11})\cap R(D'_{13})=\varnothing$

$R(D'_{11})\cap R(D'_{15})=\varnothing,\ R(D'_{12})\cap R(D'_{15})=\varnothing,\ R(D'_{12})\cap R(D'_{16})=\varnothing,$

$R(D'_{13})\cap R(D'_{14})=\varnothing,\ R(D'_{13})\cap R(D'_{16})=\varnothing,\ R(D'_{14})\cap R(D'_{15})=\varnothing,$

$R(D'_{15})\cap R(D'_{16})=\varnothing$

oldukları görülür.

Şimdi birleşimde yer alan kümelerden birbirine eşit olanları belirleyelim.

$$\begin{aligned}
\alpha\in R(D'_2)\cap R(D'_5)\Leftrightarrow\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Z_2,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\\
& Y_Z^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,\\
& Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Z_2,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\\
& Y_Z^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing\\
\Leftrightarrow\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Z_2,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\\
& Y_{T'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_Z^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2,\\
& Y_{T'}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,\\
& Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2,\\
& Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing,\ Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,\\
& Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2\\
& Y_{T'}^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing\\
\Leftrightarrow\ & \alpha \in R(D_2') \cap R(D_5') \cap R(D_7')
\end{aligned}$$

olur. Bu gerektirmeden $R(D_2') \cap R(D_5') = R(D_2') \cap R(D_5') \cap R(D_7')$ bulunur. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
& R(D_2') \cap R(D_5') = R(D_2') \cap R(D_5') \cap R(D_7'),\\
& R(D_2') \cap R(D_{13}') = R(D_2') \cap R(D_7') \cap R(D_{13}')\\
&\qquad = R(D_2') \cap R(D_{13}') \cap R(D_{15}')\\
&\qquad = R(D_2') \cap R(D_7') \cap R(D_{13}') \cap R(D_{15}'),\\
& R(D_2') \cap R(D_{15}') = R(D_2') \cap R(D_7') \cap R(D_{15}'),\\
& R(D_3') \cap R(D_6') = R(D_3') \cap R(D_6') \cap R(D_8'),\\
& R(D_3') \cap R(D_{14}') = R(D_3') \cap R(D_8') \cap R(D_{14}')\\
&\qquad = R(D_3') \cap R(D_{14}') \cap R(D_{16}')\\
&\qquad = R(D_3') \cap R(D_8') \cap R(D_{14}') \cap R(D_{16}'),\\
& R(D_3') \cap R(D_{16}') = R(D_3') \cap R(D_8') \cap R(D_{16}'),\\
& R(D_7') \cap R(D_{13}') = R(D_7') \cap R(D_{13}') \cap R(D_{15}'),\\
& R(D_8') \cap R(D_{14}') \cap R(D_{16}') = R(D_8') \cap R(D_{14}'),\\
& R(D_{10}') \cap R(D_{13}') = R(D_{10}') \cap R(D_{13}') \cap R(D_{15}'),\\
& R(D_{11}') \cap R(D_{14}') = R(D_{11}') \cap R(D_{14}') \cap R(D_{16}')
\end{aligned}$$

oldukları görülür. O halde

$$\begin{aligned}
\left|R^*(Q_4)\right| = \sum_{i=1}^{16} \left|R(D_i')\right| &- \left|R(D_1') \cap R(D_2')\right| - \left|R(D_1') \cap R(D_3')\right| - \left|R(D_2') \cap R(D_7')\right|\\
&- \left|R(D_3') \cap R(D_8')\right| - \left|R(D_4') \cap R(D_5')\right| - \left|R(D_4') \cap R(D_6')\right|\\
&- \left|R(D_5') \cap R(D_7')\right| - \left|R(D_6') \cap R(D_8')\right| - \left|R(D_7') \cap R(D_{15}')\right|
\end{aligned}$$

$$-\left|R\left(D_8'\right)\cap R\left(D_{16}'\right)\right|-\left|R\left(D_9'\right)\cap R\left(D_{10}'\right)\right|-\left|R\left(D_9'\right)\cap R\left(D_{11}'\right)\right|$$
$$-\left|R\left(D_{10}'\right)\cap R\left(D_{15}'\right)\right|-\left|R\left(D_{11}'\right)\cap R\left(D_{16}'\right)\right|-\left|R\left(D_{12}'\right)\cap R\left(D_{13}'\right)\right|$$
$$-\left|R\left(D_{12}'\right)\cap R\left(D_{14}'\right)\right|-\left|R\left(D_{13}'\right)\cap R\left(D_{15}'\right)\right|-\left|R\left(D_{14}'\right)\cap R\left(D_{16}'\right)\right|$$

olur.■

Teorem 4.1.10 $Y_1'\supseteq Y'$ ve $Y_1''\supseteq Y''$ olmak üzere $D'=\left\{Y,Y',Y'',\breve{D}\right\}$, $D''=\left\{Y_1,Y_1',Y_1'',\breve{D}\right\}$ $\in\left\{D_1',D_2',...,D_{16}'\right\}$ ve $D'\neq D''$ olsun. Bir $\alpha\in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $T,T',Z\in D$ ve $T\subset T'\subset Z\subset\breve{D}$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ biçiminde olsun. O zaman $\alpha\in R\left(D'\right)\cap R\left(D''\right)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$Y_T^\alpha\supseteq Y\cup Y_1,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Y_1'',$$
$$Y_{T'}^\alpha\cap Y'\neq\varnothing,\ Y_Z^\alpha\cap Y''\neq\varnothing \text{ ve } Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 4.1.1-(4) den

$$\alpha\in R\left(D'\right)\cap R\left(D''\right)\Leftrightarrow\alpha\in R\left(D'\right) \text{ ve } \alpha\in R\left(D''\right)$$
$$\Leftrightarrow Y_T^\alpha\supseteq Y,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Y',\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Y'',\ Y_{T'}^\alpha\cap Y'\neq\varnothing,$$
$$Y_Z^\alpha\cap Y''\neq\varnothing,\ Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,$$
$$Y_T^\alpha\supseteq Y_1,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Y_1'',\ Y_{T'}^\alpha\cap Y_1'\neq\varnothing,$$
$$Y_Z^\alpha\cap Y_1''\neq\varnothing,\ Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$$

olarak bulunur. $Y_1'\supseteq Y'$ ve $Y_1''\supseteq Y''$ olduğundan $Y_T^\alpha\supseteq Y\cup Y_1,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Y_1'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Y_1'',\ Y_{T'}^\alpha\cap Y'\neq\varnothing$, $Y_Z^\alpha\cap Y''\neq\varnothing$ ve $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$ elde edilir.■

Teorem 4.1.11 $D'\neq D''$, $Y_1'\supseteq Y'$ ve $Y_1''\supseteq Y''$ olmak üzere $D'=\left\{Y,Y',Y'',\breve{D}\right\}$ ve $D''=\left\{Y_1,Y_1',Y_1'',\breve{D}\right\}\in\left\{D_1',D_2',...,D_{16}'\right\}$ ve X sonlu olsun. O halde

$$\left|R\left(D'\right)\cap R\left(D''\right)\right|=30\cdot 2^{\left|\left(Y_1'\setminus\left(Y'\cup Y_1\right)\right)\right|}\cdot\left(2^{\left|Y'\setminus\left(Y\cup Y_1\right)\right|}-1\right)\cdot 3^{\left|\left(Y_1''\setminus\left(Y''\cup Y_1'\right)\right)\right|}\cdot\left(3^{\left|Y''\setminus Y_1'\right|}-2^{\left|Y''\setminus Y_1'\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Y_1''\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Y_1''\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: $Y_1'\supseteq Y'$ ve $Y_1''\supseteq Y''$ olmak üzere $D'=\left\{Y,Y',Y'',\breve{D}\right\}$ ve $D''=\left\{Y_1,Y_1',Y_1'',\breve{D}\right\}$ $\in\left\{D_1',D_2',...,D_{16}'\right\}$, $D'\neq D''$ ve $\alpha\in R\left(D'\right)\cap R\left(D''\right)$ olsun. $\alpha\in B_X\left(D\right)$ olduğundan α ikili bağıntısı $f_\alpha:X\to D$, $f_\alpha\left(t\right)=t\alpha$ dönüşümü ile belirlidir.

Ayrıca $\{Y \cup Y_1,\ Y_1' \backslash (Y \cup Y_1),\ Y_1'' \backslash Y_1',\ \breve{D} \backslash Y_1'',\ X \backslash \breve{D}\}$ kümesinin X in parçalanışı olduğu açıktır. f_α dönüşümünün $Y \cup Y_1$, $Y_1' \backslash (Y \cup Y_1)$, $Y_1'' \backslash Y_1'$, $\breve{D} \backslash Y''$ ve $X \backslash \breve{D}$ kümelerine kısıtlanışı sırasıyla $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ ve $f_{4\alpha}$ olsun. Şimdi Teorem 4.1.10 dan yararlanarak $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$, $f_{4\alpha}$. dönüşümlerinin özelliklerini belirleyebiliriz.

1. $t \in Y \cup Y_1$ olsun. $Y \cup Y_1 \subseteq Y_T^\alpha$ olduğundan $t \in Y_T^\alpha$ olur. Dolayısıyla $t\alpha = T$ olur. O halde her $t \in Y \cup Y_1$ için $f_{0\alpha}(t) = T$ olur.

2. $t \in Y_1' \backslash (Y \cup Y_1)$ olsun. $Y_1' \backslash (Y \cup Y_1) \subseteq Y_1' \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$ olduğundan $t \in Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$ olur. Y_T^α ve $Y_{T'}^\alpha$ kümelerinin tanımından her $t \in Y_1' \backslash (Y \cup Y_1)$ için $f_{1\alpha}(t) \in \{T, T'\}$ olarak bulunur. Ayrıca $Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t' \in Y'$ için $t'\alpha = T'$ olur. $t' \in Y \cup Y_1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $t' \in Y \cup Y_1 \subseteq Y_T^\alpha$ olduğundan $t'\alpha = T$ olur. Bu da $T \neq T'$ olduğundan $t'\alpha = T'$ olması ile çelişir. O halde en az bir $t' \in Y' \backslash (Y \cup Y_1)$ için $f_{1\alpha}(t') = T'$ olur.

3. $t \in Y_1'' \backslash Y_1'$ olsun. $Y_1'' \backslash Y_1' \subseteq Y_1'' \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha$ olduğundan $t \in Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha$ olur. Y_T^α, $Y_{T'}^\alpha$ ve Y_Z^α kümelerinin tanımından her $t \in Y_1'' \backslash Y_1'$ için $f_{2\alpha}(t) \in \{T, T', Z\}$ bulunur. Ayrıca $Y_Z^\alpha \cap Y'' \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t'' \in Y''$ için $t''\alpha = Z$ dir. $t'' \in Y_1'$ olsun. Bu durumda $t'' \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$ olduğundan $t''\alpha \in \{T, T'\}$ olur. Bu ise $T \neq Z$ ve $T' \neq Z$ olduğundan $t''\alpha = Z$ olması ile çelişir. O halde en az bir $t'' \in Y'' \backslash Y_1'$ için $f_{2\alpha}(t'') = Z$ olur.

4. $t \in \breve{D} \backslash Y_1''$ olsun. Bu durumda $\breve{D} \backslash Y_1'' \subseteq \breve{D} \subseteq X = Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_0^\alpha$ olduğundan $t \in Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_0^\alpha$ olur. Dolayısıyla $t\alpha \in \{T, T', Z, \breve{D}\}$ olur. O halde her $t \in \breve{D} \backslash Y_1''$ için $f_{3\alpha}(t) \in \{T, T', Z, \breve{D}\}$ olarak bulunur. Ayrıca $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t''' \in \breve{D}$ için $t'''\alpha = \breve{D}$ olur. $t''' \in Y_1''$ olsun. Bu durumda $t'''\alpha \in \{T, T', Z\}$ olur. Bu ise $\breve{D} \notin \{T, T', Z\}$ olduğundan $t'''\alpha = \breve{D}$ olması ile çelişir. O halde en az bir $t \in \breve{D} \backslash Y_1''$ için $f_{3\alpha}(t''') = \breve{D}$ olur.

5. $t \in X \backslash \breve{D}$ olsun. $t \in X \backslash \breve{D} \subseteq X = Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_0^\alpha$ olduğundan $t\alpha \in \{T, T', Z, \breve{D}\}$ olur. O halde her $t \in X \backslash \breve{D}$ için $f_{4\alpha}(t) \in \{T, T', Z, \breve{D}\}$ olur.

Dolayısıyla $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ regüler elemanına karşılık

$f_\alpha = (f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha})$ sıralı sistemi vardır. Şimdi aşağıdaki özellikeri sağlayan dönüşümleri tanımlayalım.

$f_0 : Y \cup Y_1 \to \{T\}$,

$f_1 : Y_1' \backslash (Y \cup Y_1) \to \{T, T'\}$ ve en az bir $t' \in Y' \backslash (Y \cup Y_1)$ için $f_1(t') = T'$,

$f_2 : Y_1'' \backslash Y_1' \to \{T, T', Z\}$ ve en az bir $t'' \in Y'' \backslash Y_1'$ için $f_2(t'') = Z$,

$f_3 : \breve{D} \backslash Y_1'' \to \{T, T', Z, \breve{D}\}$ ve en az bir $t''' \in \breve{D} \backslash Y_1''$ için $f_3(t''') = \breve{D}$,

$f_4 : X \backslash \breve{D} \to \{T, T', Z, \breve{D}\}$

olsun. Bu dönüşümler yardımıyla tanımlanan f dönüşümü

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & t \in T, \\ f_1(t), & t \in Y_1' \backslash (Y \cup Y_1), \\ f_2(t), & t \in Y_1'' \backslash Y', \\ f_3(t), & t \in \breve{D} \backslash Y_1'', \\ f_4(t), & t \in X \backslash \breve{D}. \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Böylece $f : X \to D$ ye tanımlıdır. $\beta = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ olsun. Bu durumda $Y_T^\beta = \{t \mid t\beta = T\}$, $Y_{T'}^\beta = \{t \mid t\beta = T'\}$, $Y_Z^\beta = \{t \in X \mid t\beta = Z\}$ ve

$Y_0^\beta = \{t \in X \mid t\beta = \breve{D}\}$ olduğundan β ikili bağıntısı

$\beta = (Y_T^\beta \times T) \cup (Y_{T'}^\beta \times T') \cup (Y_{T''}^\beta \times T'') \cup (Y_0^\beta \times \breve{D})$ biçiminde yazılabilir. f dönüşümünün tanımından $t \in Y \cup Y_1$ ise $t\beta = T$ olduğundan $t \in Y_T^\beta$ bulunur Dolayısıyla $Y_T^\beta \supseteq Y \cup Y_1$ olur. Benzer olarak $Y_T^\beta \cup Y_{T'}^\beta \supseteq Y_1'$ ve $Y_T^\beta \cup Y_{T'}^\beta \cup Y_Z^\beta \supseteq Y_1''$ oldukları görülür. Ayrıca en az bir $t' \in Y' \backslash (Y \cup Y_1)$ için $f_1(t') = T'$ olduğundan $Y_{T'}^\beta \cap Y' \neq \varnothing$ olur. En az bir $t'' \in Y'' \backslash Y_1'$ için $f_2(t'') = Z$ olduğundan $Y_Z^\beta \cap Y'' \neq \varnothing$ ve en az bir $t''' \in \breve{D} \backslash Y_1''$ için $f_3(t''') = \breve{D}$ olduğundan $Y_0^\beta \cap \breve{D} \neq \varnothing$ olarak bulunur. O halde Teorem 4.1.10 dan $\beta \in R(D') \cap R(D'')$ olur.

Şimdi $\alpha, \beta \in R(D') \cap R(D'')$ ve $\alpha \neq \beta$ olsun. Bu durumda α ya karşılık $f_\alpha(t) = t\alpha$ olacak şekilde $f_\alpha = (f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha})$ sıralı sistemi ve β ya karşılık $f_\beta(t) = t\beta$ olacak şekilde $f_\beta = \left(f_{0\beta}, f_{1\beta}, f_{2\beta}, f_{3\beta}, f_{4\beta}\right)$ sıralı sistemi vardır. $f_\alpha = f_\beta$ olsun. Bu durumda her $t \in X$ için $f_\alpha(t) = t\alpha = t\beta = f_\beta(t)$ olur. Buradan $\alpha = \beta$ elde edilir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $f_\alpha \neq f_\beta$ olur.

Sonuç olarak $R(D') \cap R(D'')$ ile $f_\alpha = \left(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}\right)$ biçimindeki ayrık dönüşümlerin sıralı sistemlerinin kümesi arasında bire-bir bir eşleme vardır. Teorem 1.1.10 den $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}$ dönüşümlerinin sayısı sırasıyla

$$1,\ 2^{\left|\left(Y_1'\setminus(Y\cup Y_1)\right)\setminus\left(Y'\setminus(Y\cup Y_1)\right)\right|}\cdot\left(2^{\left|Y'\setminus(Y\cup Y_1)\right|}-1\right),\ 3^{\left|\left(Y_1''\setminus Y'\right)\setminus\left(Y''\setminus Y_1'\right)\right|}\cdot\left(3^{\left|Y''\setminus Y_1'\right|}-2^{\left|Y''\setminus Y_1'\right|}\right),\ 4^{\left|\breve{D}\setminus Y_1''\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Y_1''\right|},\ 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak bulunur.

Bu sayıların $T \subset T' \subset Z \subset \breve{D}$ olmak üzere $\left\{T, T', Z, \breve{D}\right\}$ seçilişinden bağımsız olduğu görülür. O halde D nin Q_4 e tam izomorf olan XI-alt yarılatislerinin her biri için yazılabilecek birbirinden farklı ayrık sistemlerin sayısı

$$2^{\left|\left(Y_1'\setminus(Y'\cup Y\cup Y_1)\right)\right|}\cdot\left(2^{\left|Y'\setminus(Y\cup Y_1)\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Y_1'\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Y_1'\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olduğundan

$$\left|R(D')\cap R(D'')\right| = 30\cdot 2^{\left|\left(Y_1'\setminus(Y'\cup Y_1)\right)\right|}\cdot\left(2^{\left|Y'\setminus(Y\cup Y_1)\right|}-1\right)\cdot 3^{\left|\left(Y_1''\setminus(Y''\cup Y_1')\right)\right|}\cdot\left(3^{\left|Y''\setminus Y_1'\right|}-2^{\left|Y''\setminus Y_1'\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Y_1''\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Y_1''\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak elde edilir.■

Teorem 4.1.12 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R(D_1')\cap R(D_2')\right| = 30\cdot 2^{|Z_6\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|},$$

$$\left|R(D_1')\cap R(D_3')\right| = 30\cdot 2^{|Z_6\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|},$$

$$\left|R(D_2')\cap R(D_7')\right| = 30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_2|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|},$$

$$\left|R(D_3')\cap R(D_8')\right| = 30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|},$$

$$\left|R(D_4')\cap R(D_5')\right| = 30\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|},$$

$$\left|R(D_4')\cap R(D_6')\right| = 30\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|},$$

$$\left|R(D_5')\cap R(D_7')\right| = 30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_2|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|},$$

$$\left|R(D_6')\cap R(D_8')\right| = 30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|},$$

$$\left|R\left(D_7'\right)\cap R\left(D_{15}'\right)\right| = 30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_2|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$

$$\left|R\left(D_8'\right)\cap R\left(D_{16}'\right)\right| = 30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$

$$\left|R\left(D_9'\right)\cap R\left(D_{10}'\right)\right| = 30\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_5|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$

$$\left|R\left(D_9'\right)\cap R\left(D_{11}'\right)\right| = 30\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_5|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$

$$\left|R\left(D_{10}'\right)\cap R\left(D_{15}'\right)\right| = 30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_2|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$

$$\left|R\left(D_{11}'\right)\cap R\left(D_{16}'\right)\right| = 30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$

$$\left|R\left(D_{12}'\right)\cap R\left(D_{13}'\right)\right| = 30\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$

$$\left|R\left(D_{12}'\right)\cap R\left(D_{14}'\right)\right| = 30\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$

$$\left|R\left(D_{13}'\right)\cap R\left(D_{15}'\right)\right| = 30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_2|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$

$$\left|R\left(D_{14}'\right)\cap R\left(D_{16}'\right)\right| = 30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: $D_1' = \left\{Z_8, Z_6, Z_3, \breve{D}\right\}$, $D_2' = \left\{Z_8, Z_6, Z_2, \breve{D}\right\}$, $D_3' = \left\{Z_8, Z_6, Z_1, \breve{D}\right\}$,

$D_4' = \left\{Z_8, Z_5, Z_3, \breve{D}\right\}$, $D_5' = \left\{Z_8, Z_5, Z_2, \breve{D}\right\}$, $D_6' = \left\{Z_8, Z_5, Z_1, \breve{D}\right\}$, $D_7' = \left\{Z_8, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}$,

$D_8' = \left\{Z_8, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$, $D_9' = \left\{Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\right\}$, $D_{10}' = \left\{Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\right\}$, $D_{11}' = \left\{Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\right\}$,

$D_{12}' = \left\{Z_7, Z_4, Z_3, \breve{D}\right\}$, $D_{13}' = \left\{Z_7, Z_4, Z_2, \breve{D}\right\}$, $D_{14}' = \left\{Z_7, Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}$,

$D_{15}' = \left\{Z_7, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}$, $D_{16}' = \left\{Z_7, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$

olduğundan Teorem 4.1.11 den istenen elde edilir.■

Teorem 4.1.13 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_4\right)\right| = {} & 30\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ & 30\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_6|}-2^{|Z_2\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ & 30\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|}-2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\end{aligned}$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

$$30\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-$$

$$-30\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

$$-30\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

$$-30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

$$-30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

$$-30\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

$$-30\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

$$-30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

$$-30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

$$-30\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

$$-30\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

$$-30\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$
$$-30\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$
$$-30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$
$$-30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$
$$-30\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$
$$-30\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$
$$-30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$
$$-30\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Lemma 4.1.9, Teorem 1.1.54 ve Teorem 4.1.12 den istenen elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.1.1-(5) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $Z, Z', T, T' \in D$ ve $Z \subset Z' \subset T \subset T' \subset \breve{D}$ olmak üzere $V(D,\alpha) = Q_5 = \{Z, Z', T, T', \breve{D}\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}Q_5\vartheta_{XI} = \Big\{&\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\\&\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\}\Big\}\end{aligned}$$

olur. Böylece $|\Omega(Q_5)| = 8$ bulunur. Ayrıca Q_5 in tam otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $|\Phi(Q_5)| = 1$ olur. Öte yandan

$$\begin{aligned}&D_1' = \{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ D_2' = \{Z_8,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\ D_3' = \{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\\&D_4' = \{Z_8,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\ D_5' = \{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ D_6' = \{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\\&D_7' = \{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ D_8' = \{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}\end{aligned}$$

ile gösterirsek,

$$R^*(Q_5) = \bigcup_{i=1}^{8} R(D_i')$$

olur.

Teorem 4.1.14 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_5\right)\right| = 8\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|} + \\
8\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|} \\
8\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|} \\
8\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|} \\
8\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|} \\
8\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|} \\
8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|} \\
8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_5\right)=\bigcup_{i=1}^{8} R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan kümelerden arakesitleri boş küme olanları belirleyelim.

$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)\neq\varnothing$ olsun. O halde en az bir $\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)\Rightarrow\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Z_3, \\
& Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_2,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_Z^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing, \\
& Y_{Z'}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing, \\
& Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Z_3, \\
& Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_1,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing, \\
& Y_Z^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing,\ Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing \\
\Rightarrow\ & Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq\breve{D}, \\
& \left(Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\right)\cap Y_0^\alpha\supseteq\breve{D}\cap Y_0^\alpha\neq\varnothing\end{aligned}$$

olur. Bu da α ikili bağıntısının quasinormal gösteriminde yer alan Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. Böylece $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)=\varnothing$ olur. Benzer olarak

$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)=\varnothing$, $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing$, $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_5'\right)=\varnothing$,

$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_6'\right)=\varnothing$, $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_7'\right)=\varnothing$, $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_8'\right)=\varnothing$,

$R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_3'\right)=\varnothing$, $R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing$, $R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_5'\right)=\varnothing$,

$$R(D_2')\cap R(D_6')=\varnothing,\ R(D_2')\cap R(D_7')=\varnothing,R(D_2')\cap R(D_8')=\varnothing,$$

$$R(D_3')\cap R(D_4')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_5')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_6')=\varnothing,$$

$$R(D_3')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_8')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_5')=\varnothing,$$

$$R(D_4')\cap R(D_6')=\varnothing,R(D_4')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_8')=\varnothing,$$

$$R(D_5')\cap R(D_6')=\varnothing,\ R(D_5')\cap R(D_7')=\varnothing,R(D_5')\cap R(D_8')=\varnothing,$$

$$R(D_6')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_6')\cap R(D_8')=\varnothing,\ R(D_7')\cap R(D_8')=\varnothing$$

oldukları görülür. O halde

$$\left|R^*(Q_5)\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|+\left|R(D_5')\right|+\left|R(D_6')\right|+\left|R(D_7')\right|+\left|R(D_8')\right|$$

olur. Böylece Teorem 1.1.54 kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_5)\right|=8\cdot&\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&8\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_6|}-2^{|Z_3\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}\\
&8\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}\\
&8\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}\\
&8\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}\\
&8\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}\\
&8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_3|}-3^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}\\
&8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_3|}-3^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

elde edilir.■

$\alpha\in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.1.1-(6) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha)=Q_6=\{Z,T,T',T\cup T'\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}Q_6\vartheta_{XI}=\Big\{&\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3\},\{Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\\
&\{Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3\}\Big\}\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\left|\Omega(Q_6)\right|=8$ olur. Ayrıca Q_6 nın tam otomorfizmleri

$$id_{Q_6}=\begin{pmatrix}Z & T & T' & T\cup T'\\ Z & T & T' & T\cup T'\end{pmatrix}\ \text{ve}\ \theta=\begin{pmatrix}Z & T & T' & T\cup T'\\ Z & T' & T & T\cup T'\end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_6\right)\right| = 2$ bulunur. Öte yandan

$$D_1' = \left\{Z_8, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_2' = \left\{Z_8, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_3' = \left\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3\right\},\ D_4' = \left\{Z_8, Z_5, Z_6, Z_3\right\},$$
$$D_5' = \left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3\right\},\ D_6' = \left\{Z_7, Z_4, Z_5, Z_3\right\},\ D_7' = \left\{Z_7, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_8' = \left\{Z_7, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},$$
$$D_9' = \left\{Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_{10}' = \left\{Z_6, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_{11}' = \left\{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_{12}' = \left\{Z_5, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},$$
$$D_{13}' = \left\{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_{14}' = \left\{Z_5, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_{15}' = \left\{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_{16}' = \left\{Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\}.$$

ile gösterirsek,

$$R^*\left(Q_6\right) = \bigcup_{i=1}^{16} R\left(D_i'\right)$$

olur.

Teorem 4.1.15 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_6\right)\right| = 8\cdot 2\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|} + 8\cdot 2\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus Z_3\right|} +$$
$$8\cdot 2\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus Z_3\right|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_6\right) = \bigcup_{i=1}^{16} R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan XI -alt yarılatislerden birbirine eşit olanları ve arakesitleri boş küme olanları belirleyelim.

$\alpha \in R\left(D_1'\right)$ olsun. O zaman

$$\alpha \in R\left(D_1'\right) \Leftrightarrow Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1,\ Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing \Leftrightarrow \alpha \in R\left(D_7'\right)$$

olduğundan $R\left(D_1'\right) = R\left(D_7'\right)$ olur. Benzer olarak

$$R\left(D_1'\right) = R\left(D_7'\right) = R\left(D_9'\right) = R\left(D_{11}'\right) = R\left(D_{13}'\right) = R\left(D_{15}'\right),$$
$$R\left(D_2'\right) = R\left(D_8'\right) = R\left(D_{10}'\right) = R\left(D_{12}'\right) = R\left(D_{14}'\right) = R\left(D_{16}'\right)$$

olduğu görülür. O halde

$$R^*\left(Q_6\right) = \bigcup_{i=1}^{6} R\left(D_i'\right)$$

olarak elde edilir.

Şimdi bu kümelerden arakesitleri boş küme olanları belirleyelim.

$R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_2'\right) \neq \varnothing$ olduğunu kabul edelim. O zaman en az bir $\alpha \in R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_2'\right)$ vardır. Buradan

$$\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') \Rightarrow Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1,\ Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing,$$
$$Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_1,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_T^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$$
$$\Rightarrow Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \breve{D},\ \left(Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha\right) \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq \breve{D} \cap Y_{T'}^\alpha \neq \varnothing$$

bulunur. Bu da α ikili bağıntısının quasinormal gösteriminde yer alan Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ olur. Benzer olarak

$$R(D_1') \cap R(D_3') = \varnothing,\ R(D_1') \cap R(D_4') = \varnothing,\ R(D_1') \cap R(D_5') = \varnothing,$$
$$R(D_1') \cap R(D_6') = \varnothing,\ R(D_2') \cap R(D_3') = \varnothing,\ R(D_2') \cap R(D_4') = \varnothing,$$
$$R(D_2') \cap R(D_5') = \varnothing,\ R(D_2') \cap R(D_6') = \varnothing,\ R(D_3') \cap R(D_4') = \varnothing,$$
$$R(D_3') \cap R(D_5') = \varnothing,\ R(D_3') \cap R(D_6') = \varnothing,\ R(D_4') \cap R(D_5') = \varnothing,$$
$$R(D_4') \cap R(D_6') = \varnothing,\ R(D_5') \cap R(D_6') = \varnothing$$

oldukları görülür. O halde

$$\left|R^*(Q_6)\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \left|R(D_4')\right| + \left|R(D_5')\right| + \left|R(D_6')\right|$$

olur.

Ayrıca D_1' ile D_2', D_3' ile D_4' ve D_5' ile D_6' arasında tam otomorfizma var olduğundan

$$\left|R(D_1')\right| = \left|R(D_2')\right|,\ \left|R(D_3')\right| = \left|R(D_4')\right| \text{ ve } \left|R(D_5')\right| = \left|R(D_6')\right|$$

bulunur. O halde Teorem 1.1.62-(a) dan

$$\left|R^*(Q_6)\right| = 8 \cdot 2 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + 8 \cdot 2 \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_3|} +$$
$$8 \cdot 2 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_3|}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.1.1-(7) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_7 = \{Z, T, T', T \cup T', Z'\}$ olduğundan

$$Q_7 \vartheta_{XI} = \{\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\},$$
$$\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}\}$$

ve $\left|\Omega(Q_7)\right| = 6$ olur. Ayrıca Q_7 nin tam otomorfizmleri

$$id_{Q_7} = \begin{pmatrix} Z & T & T' & T \cup T' & Z' \\ Z & T & T' & T \cup T' & Z' \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \begin{pmatrix} Z & T & T' & T \cup T' & Z' \\ Z & T' & T & T \cup T' & Z' \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_7\right)\right| = 2$ bulunur. Öte yandan

$$D_1' = \left\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\right\},\ D_2' = \left\{Z_8, Z_5, Z_6, Z_3, \breve{D}\right\},\ D_3' = \left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\right\},$$

$$D_4' = \left\{Z_7, Z_4, Z_5, Z_3, \breve{D}\right\},\ D_5' = \left\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\right\},\ D_6' = \left\{Z_8, Z_5, Z_6, Z_3, Z_1\right\},$$

$$D_7' = \left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\right\},\ D_8' = \left\{Z_7, Z_4, Z_5, Z_3, Z_1\right\},\ D_9' = \left\{Z_8, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\right\},$$

$$D_{10}' = \left\{Z_8, Z_5, Z_6, Z_3, Z_2\right\},\ D_{11}' = \left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\right\},\ D_{12}' = \left\{Z_7, Z_4, Z_5, Z_3, Z_2\right\}$$

ile gösterirsek,

$$R^*\left(Q_7\right) = \bigcup_{i=1}^{12} R\left(D_i'\right)$$

olur.

Teorem 4.1.16 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_7\right)\right| = 6\cdot 2\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$6\cdot 2\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_7\right) = \bigcup_{i=1}^{12} R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan XI -alt yarılatislerden birbirinin alt kümesi olanları belirleyelim.

$\alpha \in R\left(D_9'\right)$ olsun. O zaman D_9' ile Q_7 tam α - izomorf olduklarından $Y_Z^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_T^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ bulunur. Ayrıca $Z_2 \subseteq \breve{D}$ olduğundan $Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ elde edilir. O halde $R\left(D_9'\right) \subseteq R\left(D_1'\right)$ olur. Benzer olarak

$$R\left(D_5'\right) \subseteq R\left(D_1'\right),\ R\left(D_{10}'\right) \subseteq R\left(D_2'\right), R\left(D_6'\right) \subseteq R\left(D_2'\right),\ R\left(D_{11}'\right) \subseteq R\left(D_3'\right),$$

$$R\left(D_7'\right) \subseteq R\left(D_3'\right),\ R\left(D_8'\right) \subseteq R\left(D_4'\right),\ R\left(D_{12}'\right) \subseteq R\left(D_4'\right)$$

oldukları görülür. O halde

$$R^*\left(Q_7\right) = \bigcup_{i=1}^{4} R\left(D_i'\right)$$

olur.

Şimdi bu kümelerden arakesitleri boş küme olanları belirleyelim.

$R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_2'\right) \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. O zaman $\alpha \in R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_2'\right)$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha\in R(D_1')\cap R(D_2')\Rightarrow\ & Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\\ & Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,\\ & Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\\ & Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing\\ \Rightarrow\ & Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_3,\ \left(Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\right)\cap Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3\cap Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5\cap Y_{T'}^\alpha\neq\varnothing\end{aligned}$$

olur. Bu ise α ikili bağıntısının quasinormal gösteriminde yer alan Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1')\cap R(D_2')=\varnothing$ olur. Benzer olarak

$$R(D_1')\cap R(D_3')=\varnothing,\ R(D_1')\cap R(D_4')=\varnothing,\ R(D_2')\cap R(D_3')=\varnothing,$$
$$R(D_2')\cap R(D_4')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_4')=\varnothing$$

oldukları görülür. O halde

$$\left|R^*(Q_7)\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|$$

bulunur. D_1' ile D_2' ve D_3' ile D_4' arasında tam otomorfizma var olduğundan

$$\left|R(D_1')\right|=\left|R(D_2')\right| \text{ ve } \left|R(D_3')\right|=\left|R(D_4')\right|$$

olur. O halde Teorem 1.1.62-(a) dan

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_7)\right|=\ & 6\cdot2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ & 6\cdot2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot5^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha\in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.1.1-(8) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha)=Q_8=\{Z,T,T',T\cup T',Z',\breve{D}\}$ olur.

$$\begin{aligned}Q_8\vartheta_{XI}=\Big\{&\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}\\ &\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}\Big\}\end{aligned}$$

olduğundan $\left|\Omega(Q_8)\right|=4$ olur. Ayrıca Q_8 in tam otomorfizmleri

$$id_{Q_8}=\begin{pmatrix}Z & T & T' & T\cup T' & Z' & \breve{D}\\ Z & T & T' & T\cup T' & Z' & \breve{D}\end{pmatrix} \text{ ve } \theta=\begin{pmatrix}Z & T & T' & T\cup T' & Z' & \breve{D}\\ Z & T' & T & T\cup T' & Z' & \breve{D}\end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi(Q_8)\right|=2$ bulunur.

Öte yandan

$$D_1'=\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ D_2'=\{Z_8,Z_5,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ D_3'=\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},$$

$$D_4' = \left\{Z_8, Z_5, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_5' = \left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_6' = \left\{Z_7, Z_4, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\},$$

$$D_7' = \left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_8' = \left\{Z_7, Z_4, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_8) = \bigcup_{i=1}^{8} R(D_i')$$

olur.

Teorem 4.1.17 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_8)\right| = {} & 4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ & 4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ & 4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ & 4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: $R^*(Q_8) = \bigcup_{i=1}^{8} R(D_i')$ olduğundan birleşimde yer alan kümelerden arakesitleri boş küme olanları belirleyelim.

$R(D_1')\cap R(D_2')\neq\varnothing$ olduğunu varsayalım. O halde $\alpha\in R(D_1')\cap R(D_2')$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha\in R(D_1')\cap R(D_2') \Rightarrow {} & Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_2,\\ & Y_T^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,\\ & Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_2,\\ & Y_T^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing\\ \Rightarrow {} & Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_3,\ \left(Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\right)\cap Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3\cap Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_6\cap Y_{T'}^\alpha\neq\varnothing\end{aligned}$$

olur. Bu da Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1')\cap R(D_2')=\varnothing$ olur. Benzer olarak

$R(D_1')\cap R(D_3')=\varnothing$, $R(D_1')\cap R(D_4')=\varnothing$, $R(D_1')\cap R(D_5')=\varnothing$,

$R(D_1')\cap R(D_6')=\varnothing$, $R(D_1')\cap R(D_7')=\varnothing$, $R(D_1')\cap R(D_8')=\varnothing$,

$R(D_2')\cap R(D_3')=\varnothing$, $R(D_2')\cap R(D_4')=\varnothing$, $R(D_2')\cap R(D_5')=\varnothing$,

$R(D_2')\cap R(D_6')=\varnothing$, $R(D_2')\cap R(D_7')=\varnothing$, $R(D_2')\cap R(D_8')=\varnothing$,

$$R(D_3')\cap R(D_4')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_5')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_6')=\varnothing,$$

$$R(D_3')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_8')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_5')=\varnothing,$$

$$R(D_4')\cap R(D_6')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_8')=\varnothing,$$

$$R(D_5')\cap R(D_6')=\varnothing,\ R(D_5')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_5')\cap R(D_8')=\varnothing,$$

$$R(D_6')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_6')\cap R(D_8')=\varnothing,\ R(D_7')\cap R(D_8')=\varnothing$$

oldukları görülür. O halde

$$\left|R^*(Q_8)\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|$$

olur.

Teorem 1.1.62 den

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_8)\right|=&\,4\cdot2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&4\cdot2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&4\cdot2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&4\cdot2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot6^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha\in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.1.1-(9) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $Z,Z',T,T'\in D$, $Z\subset Z'\subset T$, $Z\subset Z'\subset T'$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ olmak üzere $V(D,\alpha)=Q_9=\{Z,Z',T,T',T\cup T'\}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}Q_9\vartheta_{XI}=\Big\{&\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\{Z_8,Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\\&\{Z_8,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\{Z_7,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\\&\{Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\Big\}\end{aligned}$$

olduğundan $\left|\Omega(Q_8)\right|=9$ bulunur. Ayrıca Q_9 un tam otomorfizmleri.

$$id_{Q_9}=\begin{pmatrix}Z & Z' & T & T' & T\cup T'\\ Z & Z' & T & T' & T\cup T'\end{pmatrix}\ \text{ve}\ \theta=\begin{pmatrix}Z & Z' & T & T' & T\cup T'\\ Z & Z' & T' & T & T\cup T'\end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi(Q_9)\right|=2$ olur.

Öte yandan

$D_1'=\{Z_8,Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $D_2'=\{Z_8,Z_6,Z_1,Z_2,\breve{D}\}$, $D_3'=\{Z_8,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,

$D'_4 = \left\{ Z_8, Z_5, Z_1, Z_2, \breve{D} \right\}$, $D'_5 = \left\{ Z_8, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\}$, $D'_6 = \left\{ Z_8, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D} \right\}$,

$D'_7 = \left\{ Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\}$, $D'_8 = \left\{ Z_7, Z_5, Z_1, Z_2, \breve{D} \right\}$, $D'_9 = \left\{ Z_7, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\}$,

$D'_{10} = \left\{ Z_7, Z_4, Z_1, Z_2, \breve{D} \right\}$, $D'_{11} = \left\{ Z_7, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\}$, $D'_{12} = \left\{ Z_7, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D} \right\}$,

$D'_{13} = \left\{ Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\}$, $D'_{14} = \left\{ Z_4, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D} \right\}$, $D'_{15} = \left\{ Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\}$,

$D'_{16} = \left\{ Z_6, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D} \right\}$, $D'_{17} = \left\{ Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\}$, $D'_{18} = \left\{ Z_5, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D} \right\}$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_9) = \bigcup_{i=1}^{18} R(D'_i)$$

olur.

Teorem 4.1.18 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\left|R^*(Q_9)\right| = {} & \left|R(D'_1)\right| + \left|R(D'_2)\right| + \left|R(D'_3)\right| + \left|R(D'_4)\right| + \left|R(D'_5)\right| + \left|R(D'_6)\right| + \\
& \left|R(D'_7)\right| + \left|R(D'_8)\right| + + \left|R(D'_9)\right| + \left|R(D'_{10})\right| + \left|R(D'_{11})\right| + \left|R(D'_{12})\right| - \\
& \left|R(D'_1) \cap R(D'_5)\right| - \left|R(D'_2) \cap R(D'_6)\right| - \left|R(D'_3) \cap R(D'_5)\right| - \\
& \left|R(D'_4) \cap R(D'_6)\right| - \left|R(D'_5) \cap R(D'_{11})\right| - \left|R(D'_6) \cap R(D'_{12})\right| - \\
& \left|R(D'_7) \cap R(D'_{11})\right| - \left|R(D'_8) \cap R(D'_{12})\right| - \left|R(D'_9) \cap R(D'_{11})\right| - \left|R(D'_{10}) \cap R(D'_{12})\right|
\end{aligned}$$

olur.

İspat: $Z_8 \subseteq \overline{Y}$ olmak üzere $D' = \left\{ \overline{Y}, Y, Y', Y'', Y' \cup Y'' \right\} \in \left\{ D'_1, ..., D'_{18} \right\}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_9 ile D' tam α -izomorf olduklarından Teorem 4.1.1-(9) dan α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi

$$\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right)$$

biçiminde olur ve $Y_Z^\alpha \supseteq \overline{Y}$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y'$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y''$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Y \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap Y' \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap Y'' \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_8 \subseteq \overline{Y}$ olduğundan $Y_Z^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y'$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y''$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Y \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap Y' \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap Y'' \neq \varnothing$ özellikleri her zaman sağlanır. $D'' = \left\{ Z_8, Y, Y', Y'', Y' \cup Y'' \right\}$ dersek $D'' = \left\{ Z_8, Y, Y', Y'', Y' \cup Y'' \right\} \in \left\{ D'_1, ..., D'_{18} \right\}$ ve $\alpha \in R(D'')$ olur. Dolayısıyla $R(D') \subseteq R(D'')$ olarak bulunur.

Benzer olarak $Z_7 \subseteq \overline{Y}$ olmak üzere keyfi bir $D' = \{\overline{Y}, Y, Y', Y'', Y' \cup Y''\} \in \{D'_1, ..., D'_{18}\}$ alalım ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_9 ile D' tam α-izomorf olduğundan Teorem 4.1.1-(9) dan α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi

$$\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right)$$

biçiminde olur ve $Y_Z^\alpha \supseteq \overline{Y}$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y'$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y''$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Y \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap Y' \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap Y'' \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_7 \subseteq \overline{Y}$ olduğundan $Y_Z^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y'$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y''$, $Y_{Z'}^\alpha \cap Y \neq \varnothing$ $Y_T^\alpha \cap Y' \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap Y'' \neq \varnothing$ her zaman sağlanır. O halde $D'' = \{Z_7, Y, Y', Y'', Y' \cup Y''\}$ ile gösterirsek $D'' = \{Z_7, Y, Y', Y'', Y' \cup Y''\} \in \{D'_1, ..., D'_{18}\}$ ve $\alpha \in R(D'')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D'')$ olarak bulunur. Benzer olarak $R(D'_{13}) \subseteq R(D'_5)$, $R(D'_{17}) \subseteq R(D'_5)$, $R(D'_{14}) \subseteq R(D'_6)$, $R(D'_{18}) \subseteq R(D'_6)$, $R(D'_{15}) \subseteq R(D'_{11})$, $R(D'_{16}) \subseteq R(D'_{12})$ olarak bulunur.

Sonuç olarak

$$R(Q_9) = \bigcup_{i=1}^{12} R(D'_i)$$

olur.

Şimdi birleşimde yer alan XI-alt yarılatislerden arakesitleri boş küme olanları ve birbirine eşit olanları belirleyelim.

$R(D'_1) \cap R(D'_2) \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$ alalım. O zaman

$$\begin{aligned}
\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2) \Rightarrow\ & Y_Z^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2, \\
& Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1, Y_{Z'}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing, \\
& Y_{T'}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing, \\
& Y_Z^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_1, \\
& Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_{Z'}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing, \\
& Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing \\
\Rightarrow\ & Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \breve{D},\ \left(Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha\right) \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq \breve{D} \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1 \cap Y_{T'}^\alpha \neq \varnothing
\end{aligned}$$

olur. Buda α nın quasinormal gösteriminde yer alan Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \varnothing$ olur. Benzer olarak

$R(D'_1) \cap R(D'_4) = \varnothing$, $R(D'_1) \cap R(D'_6) = \varnothing$, $R(D'_1) \cap R(D'_7) = \varnothing$,

$R(D'_1) \cap R(D'_8) = \varnothing$, $R(D'_1) \cap R(D'_{10}) = \varnothing$, $R(D'_1) \cap R(D'_{12}) = \varnothing$,

$$R(D_2')\cap R(D_3')=\varnothing, R(D_2')\cap R(D_5')=\varnothing,\ R(D_2')\cap R(D_7')=\varnothing,$$

$$R(D_2')\cap R(D_8')=\varnothing,\ R(D_2')\cap R(D_9')=\varnothing, R(D_2')\cap R(D_{11}')=\varnothing,$$

$$R(D_3')\cap R(D_4')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_6')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_7')=\varnothing,$$

$$R(D_3')\cap R(D_8')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_9')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_{10}')=\varnothing,$$

$$R(D_3')\cap R(D_{11}')=\varnothing, R(D_3')\cap R(D_{12}')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_5')=\varnothing,$$

$$R(D_4')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_8')=\varnothing, R(D_4')\cap R(D_9')=\varnothing,$$

$$R(D_4')\cap R(D_{10}')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_{11}')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_{12}')=\varnothing,$$

$$R(D_5')\cap R(D_6')=\varnothing,\ R(D_5')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_5')\cap R(D_8')=\varnothing,$$

$$R(D_5')\cap R(D_{10}')=\varnothing, R(D_5')\cap R(D_{12}')=\varnothing,\ R(D_6')\cap R(D_7')=\varnothing,$$

$$R(D_6')\cap R(D_8')=\varnothing,\ R(D_6')\cap R(D_9')=\varnothing, R(D_6')\cap R(D_{11}')=\varnothing,$$

$$R(D_7')\cap R(D_8')=\varnothing,\ R(D_7')\cap R(D_{10}')=\varnothing,\ R(D_7')\cap R(D_{12}')=\varnothing,$$

$$R(D_8')\cap R(D_9')=\varnothing,\ R(D_8')\cap R(D_{11}')=\varnothing, R(D_9')\cap R(D_{10}')=\varnothing,$$

$$R(D_9')\cap R(D_{12}')=\varnothing, R(D_{10}')\cap R(D_{11}')=\varnothing,\ R(D_{11}')\cap R(D_{12}')=\varnothing$$

oldukları görülür.

Şimdi $\alpha\in R(D_1')\cap R(D_3')$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\alpha\in R(D_1')\cap R(D_3') \Leftrightarrow\ & Y_Z^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_2,\\
& Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_1, Y_{Z'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_T^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing,\\
& Y_Z^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_2,\\
& Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_1,\ Y_{Z'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_T^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing\\
\Leftrightarrow\ & Y_Z^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_2,\\
& Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_1,\ Y_{Z'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing, Y_T^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\\
& Y_{T'}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing\\
\Leftrightarrow\ & Y_Z^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_2,\\
& Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_1, Y_{Z'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_T^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing,\\
& Y_Z^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_2,\\
& Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_1,\ Y_{Z'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_T^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing,\\
& Y_Z^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_2,\\
& Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_1,\ Y_{Z'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_T^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing\\
\Leftrightarrow\ & \alpha\in R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_5')
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla bu gerektirmeden $R(D_1')\cap R(D_3')=R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_5')$ elde edilir. Benzer olarak

$$R(D_1')\cap R(D_{11}')=R(D_1')\cap R(D_5')\cap R(D_{11}'),$$

$$R(D_2')\cap R(D_4')=R(D_2')\cap R(D_4')\cap R(D_6'),$$

$$R(D_2')\cap R(D_{12}')=R(D_2')\cap R(D_6')\cap R(D_{12}'),$$

$$R(D_5')\cap R(D_9')=R(D_5')\cap R(D_9')\cap R(D_{11}'),$$

$$R(D_6')\cap R(D_{10}')=R(D_6')\cap R(D_{10}')\cap R(D_{12}'),$$

$$R(D_7')\cap R(D_9')=R(D_7')\cap R(D_9')\cap R(D_{11}'),$$

$$R(D_8')\cap R(D_{10}')=R(D_8')\cap R(D_{10}')\cap R(D_{12}'),$$

$$\begin{aligned}R(D_1')\cap R(D_9')&=R(D_1')\cap R(D_5')\cap R(D_9')\\&=R(D_1')\cap R(D_9')\cap R(D_{11}')\\&=R(D_1')\cap R(D_5')\cap R(D_9')\cap R(D_{11}'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(D_2')\cap R(D_{10}')&=R(D_2')\cap R(D_6')\cap R(D_{10}')\\&=R(D_2')\cap R(D_{10}')\cap R(D_{12}')\\&=R(D_2')\cap R(D_6')\cap R(D_{10}')\cap R(D_{12}')\end{aligned}$$

oldukları görülür. O halde

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_9)\right|=&\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|+\left|R(D_5')\right|+\left|R(D_6')\right|+\\&\left|R(D_7')\right|+\left|R(D_8')\right|++\left|R(D_9')\right|+\left|R(D_{10}')\right|+\left|R(D_{11}')\right|+\left|R(D_{12}')\right|-\\&\left|R(D_1')\cap R(D_5')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_6')\right|-\left|R(D_3')\cap R(D_5')\right|-\\&\left|R(D_4')\cap R(D_6')\right|-\left|R(D_5')\cap R(D_{11}')\right|-\left|R(D_6')\cap R(D_{12}')\right|-\\&\left|R(D_7')\cap R(D_{11}')\right|-\left|R(D_8')\cap R(D_{12}')\right|-\left|R(D_9')\cap R(D_{11}')\right|-\left|R(D_{10}')\cap R(D_{12}')\right|\end{aligned}$$

olur.■

Teorem 4.1.19 $Y_1'\supseteq Y'$ olmak üzere $D'=\{Y,Y',Y_2,Y_2',\breve{D}\}$, $D''=\{Y_1,Y_1',Y_2,Y_2',\breve{D}\}$ $\in\{D_1',D_2',...,D_{12}'\}$ ve $D'\neq D''$ olsun. Ayrıca $\alpha\in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $Z,Z',T,T'\in D$, $Z\subset Z'\subset T$, $Z\subset Z'\subset T'$, $T\setminus T'\neq\varnothing$ ve $T'\setminus T\neq\varnothing$ olmak üzere $\alpha=(Y_Z^\alpha\times Z)\cup(Y_{Z'}^\alpha\times Z')\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_{T\cup T'}^\alpha\times(T\cup T'))$ biçiminde olsun. O zaman $\alpha\in R(D')\cap R(D'')$ olması için gerek ve yeter koşul

$$Y_Z^\alpha \supseteq Y \cup Y_1,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_2',$$
$$Y_{Z'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y_2' \neq \varnothing$$

olmasıdır.

İspat: $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ olsun. Bu durumda $\alpha \in R(D')$ ve $\alpha \in R(D'')$ olur. Teorem 4.1.1-(9) dan

$$Y_Z^\alpha \supseteq Y,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y',\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_2',$$
$$Y_{Z'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y_2' \neq \varnothing,$$
$$Y_Z^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_2',$$
$$Y_{Z'}^\alpha \cap Y_1' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y_2' \neq \varnothing$$

olarak bulunur. $Y_1' \supseteq Y'$ olduğundan

$$Y_Z^\alpha \supseteq Y \cup Y_1,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_2',$$
$$Y_{Z'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y_2' \neq \varnothing$$

elde edilir.

Tersine

$$Y_Z^\alpha \supseteq Y \cup Y_1,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_2',$$
$$Y_{Z'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y_2' \neq \varnothing$$

olsun. Bu durumda $Y_1' \supseteq Y'$ olduğundan

$$Y_Z^\alpha \supseteq Y,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y',\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_2',$$
$$Y_{Z'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y_2' \neq \varnothing$$

ve

$$Y_Z^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_2',$$
$$Y_{Z'}^\alpha \cap Y_1' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y_2' \neq \varnothing$$

sağlanır. O halde $\alpha \in R(D')$ ve $\alpha \in R(D'')$ olur. Yani $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ olur.■

Lemma 4.1.20 $Y_1' \supseteq Y'$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y_2, Y_2', \breve{D}\}$ ve $D'' = \{Y_1, Y_1', Y_2, Y_2', \breve{D}\}$ $\in \{D_1', D_2', ..., D_{12}'\}$, $D' \neq D''$ ve X sonlu olsun. Bu taktirde

$$\left|R(D') \cap R(D'')\right| = 12 \cdot 2^{\left|((Y_2 \cap Y_2') \setminus (Y' \cup Y_1))\right|} \cdot \left(2^{\left|Y' \setminus (Y \cup Y_1)\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Y_2 \setminus Y_2'\right|} - 2^{\left|Y_2 \setminus Y_2'\right|}\right) \cdot \left(3^{\left|Y_2' \setminus Y_2\right|} - 2^{\left|Y_2' \setminus Y_2\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus (Y_2 \cup Y_2')\right|}$$

olur.

İspat: $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ olsun. Teorem 4.1.19 dan $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $Z, Z', T, T' \in D$, $Z \subset Z' \subset T$, $Z \subset Z' \subset T'$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$ biçiminde olur ve α regüler elemanı

$$Y_Z^\alpha \supseteq Y \cup Y_1,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_2',$$
$$Y_{Z'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y_2' \neq \varnothing$$

koşullarını sağlar.

Ayrıca $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan α ikili bağıntısı $f_\alpha : X \to D$, $f_\alpha(t) = t\alpha$ dönüşümü ile belirlidir. Ayrıca $\{Y \cup Y_1,\ (Y_2 \cap Y_2') \setminus (Y \cup Y_1),\ Y_2 \setminus Y_2',\ Y_2' \setminus Y_2,\ X \setminus (Y_2 \cup Y_2')\}$ kümesinin X in parçalanışı olduğu açıktır. O halde f_α dönüşümünün $Y \cup Y_1$, $(Y_2 \cap Y_2') \setminus (Y \cup Y_1)$, $Y_2 \setminus Y_2'$, $Y_2' \setminus Y_2$ ve $X \setminus (Y_2 \cup Y_2')$ kümelerine kısıtlanışı sırasıyla $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ ve $f_{4\alpha}$ olsun. Şimdi $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ ve $f_{4\alpha}$ dönüşümlerinin özelliklerini belirleyelim.

1. $t \in Y \cup Y_1$ olsun. $Y \cup Y_1 \subseteq Y_Z^\alpha$ olduğundan ve $t\alpha = Z$ elde edilir. O halde her $t \in Y \cup Y_1$ için $f_{0\alpha}(t) = Z$ olur.

2. $t \in (Y_2 \cap Y_2') \setminus (Y \cup Y_1)$ olsun. $(Y_2 \cap Y_2') \setminus (Y \cup Y_1) \subseteq Y_2 \cap Y_2' \subseteq (Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha) \cap (Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha) = Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha$ olduğundan $t \in Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha$ olur. Y_Z^α ve $Y_{Z'}^\alpha$ kümelerinin tanımından her $t \in (Y_2 \cap Y_2') \setminus (Y \cup Y_1)$ için $f_{1\alpha}(t) \in \{Z, Z'\}$ olarak bulunur. Ayrıca $Y_{Z'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $z' \in Y'$ için $z'\alpha = Z'$ olur. $z' \in Y \cup Y_1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $Y \cup Y_1 \subseteq Y_Z^\alpha$ olduğundan $z'\alpha = Z$ olur. Bu da $Z \neq Z'$ olduğundan $z'\alpha = Z'$ olması ile çelişir. O halde en az bir $z' \in Y' \setminus (Y \cup Y_1)$ için $f_{1\alpha}(z') = Z'$ olur.

3. $t \in Y_2 \setminus Y_2'$ olsun. Bu durumda $Y_2 \setminus Y_2' \subseteq Y_2 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha$ olduğundan $t\alpha \in \{Z, Z', T\}$ olur. O halde her $t \in Y_2 \setminus Y_2'$ için $f_{2\alpha}(t) \in \{Z, Z', T\}$ olur. Ayrıca $Y_T^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $t' \in Y_2$ için $t'\alpha = T$ dir. $t' \in Y_2'$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $Y_2' \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$ olduğundan $t'\alpha \in \{Z, Z', T'\}$ olur. Bu ise $T \notin \{Z, Z', T'\}$ olduğundan $t'\alpha = T$ olması ile çelişir. O halde en az bir $t' \in Y_2 \setminus Y_2'$ için $f_{2\alpha}(t') = T$ bulunur.

4. $t \in Y_2' \setminus Y_2$ olsun. O zaman $Y_2' \setminus Y_2 \subseteq Y_2' \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$ olduğundan $t\alpha \in \{Z, Z', T'\}$ dir. O halde her $t \in Y_2' \setminus Y_2$ için $f_{3\alpha}(t) \in \{Z, Z', T'\}$ olur. Ayrıca $Y_{T'}^\alpha \cap Y_2' \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $z \in Y_2'$ için $z\alpha = T'$ dir. $z \in Y_2$ olsun. Bu durumda $z \in Y_2 \subseteq Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha$ olduğundan $z\alpha \in \{Z, Z', T\}$ olur. Bu ise $T' \notin \{Z, Z', T\}$ olduğundan $z\alpha = T'$ olması ile çelişir. O halde en az bir $z \in Y_2' \setminus Y_2$ için $f_{3\alpha}(z) = T'$ olur.

5. $t \in X \setminus (Y_2 \cup Y_2')$ olsun. $X \setminus (Y_2 \cup Y_2') \subseteq X = Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha$ olduğundan $t\alpha \in \{Z, Z', T, T', T \cup T'\}$ dir. O halde her $t \in X \setminus (Y_2 \cup Y_2')$ için $f_{4\alpha}(t) \in \{Z, Z', T, T', T \cup T'\}$ olur.

$\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ regüler elemanına karşılık yukarıdaki özellikleri sağlayan bir $f_\alpha = (f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha})$ sıralı sistemi vardır.

Şimdi

$f_0 : Y \cup Y_1 \to \{Z\}$

$f_1 : (Y_2 \cap Y_2') \setminus (Y \cup Y_1) \to \{Z, Z'\}$ ve en az bir $z' \in Y' \setminus (Y \cup Y_1)$ için $f_1(z') = Z'$,

$f_2 : Y_2 \setminus Y_2' \to \{Z, Z', T\}$ ve en az bir $t' \in Y_2 \setminus Y_2'$ için $f_2(t') = T$,

$f_3 : Y_2' \setminus Y_2 \to \{Z, Z', T'\}$ ve en az bir $z \in Y_2' \setminus Y_2$ için $f_3(z) = T'$,

$f_4 : X \setminus (Y_2 \cup Y_2') \to \{Z, Z', T, T', T \cup T'\}$

dönüşümlerini tanımlayalım. Bu dönüşümler yardımıyla

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & t \in Y \cup Y_1, \\ f_1(t), & t \in (Y_2 \cap Y_2') \setminus (Y \cup Y_1), \\ f_2(t), & t \in Y_2 \setminus Y_2', \\ f_3(t), & t \in Y_2' \setminus Y_2, \\ f_4(t), & t \in X \setminus (Y_2 \cup Y_2') \end{cases}$$

olmak üzere $f : X \to D$ dönüşümü olur. Ayrıca $\beta = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ olsun. Bu durumda $Y_Z^\beta = \{t \in X \mid t\beta = Z\}$, $Y_{Z'}^\beta = \{t \in X \mid t\beta = Z'\}$, $Y_T^\beta = \{t \mid t\beta = T\}$, $Y_{T'}^\beta = \{t \mid t\beta = T'\}$ $Y_{T''}^\beta = \{t \mid t\beta = T''\}$ ve $Y_{T\cup T'}^\beta = \{t \in X \mid t\beta = T \cup T'\}$ olduğundan β ikili bağıntısı

$\beta = \left(Y_Z^{\beta} \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^{\beta} \times Z'\right) \cup \left(Y_T^{\beta} \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^{\beta} \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^{\beta} \times \left(T \cup T'\right)\right)$ biçiminde yazılabilir. Şimdi birleşimde yer alan kümelerin özelliklerini belirleyelim.

$t \in Y \cup Y_1$ olsun. O zaman $f\left(t\right) = t\beta = Z$ olduğundan $t \in Y_Z^{\beta}$ olur. Dolayısıyla $Y_Z^{\beta} \supseteq Y \cup Y_1$ olur.

Benzer olarak $Y_Z^{\beta} \cup Y_{Z'}^{\beta} \supseteq Y_1'$, $Y_Z^{\beta} \cup Y_{Z'}^{\beta} \cup Y_T^{\beta} \supseteq Y_2$ ve $Y_Z^{\beta} \cup Y_{Z'}^{\beta} \cup Y_{T'}^{\beta} \supseteq Y_2'$ özellikleri sağlanır.

Ayrıca en az bir $z' \in Y' \setminus \left(Y \cup Y_1\right)$ için $f_1\left(z'\right) = Z'$ olduğundan $Y_{Z'}^{\beta} \cap Y' \neq \varnothing$, en az bir $t' \in Y_2 \setminus Y_2'$ için $f_2\left(t'\right) = T$ olduğundan $Y_T^{\beta} \cap Y_2 \neq \varnothing$ ve en az bir $z \in Y_2' \setminus Y_2$ için $f_3\left(z\right) = T'$ olduğundan $Y_{T'}^{\beta} \cap Y_2' \neq \varnothing$ olur. O halde Teorem 4.1.19 dan $\beta \in R\left(D'\right) \cap R\left(D''\right)$ olur.

Şimdi $\alpha, \beta \in R\left(D'\right) \cap R\left(D''\right)$ ve $\alpha \neq \beta$ olsun. Bu durumda α ya karşılık $f_{\alpha}\left(t\right) = t\alpha$ olacak şekilde $f_{\alpha} = \left(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}\right)$ sıralı sistemi ve β ya karşılık $f_{\beta}\left(t\right) = t\beta$ olacak şekilde $f_{\beta} = \left(f_{0\beta}, f_{1\beta}, f_{2\beta}, f_{3\beta}, f_{4\beta}\right)$ sıralı sistemi vardır. $f_{\alpha} = f_{\beta}$ olsun. O zaman her $t \in X$ için $f_{\alpha}\left(t\right) = t\alpha = t\beta = f_{\beta}\left(t\right)$ olur. Bu da $\alpha = \beta$ olmasını gerektirir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $f_{\alpha} \neq f_{\beta}$ dır.

Sonuç olarak $R\left(D'\right) \cap R\left(D''\right)$ ile $f_{\alpha} = \left(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}\right)$ biçimindeki ayrık dönüşümlerin sıralı sistemlerinin kümesi arasında bire-bir bir eşleme vardır. Şimdi bu f_{α} ların sayısını bulalım. Teorem 1.1.10 dan $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}$ dönüşümlerinin sayısı sırasıyla

$$1,\ 2^{\left|\left(\left(Y_2 \cap Y_2'\right) \setminus \left(Y \cup Y_1\right)\right) \setminus \left(Y' \setminus \left(Y \cup Y_1\right)\right)\right|} \cdot \left(2^{\left|Y' \setminus \left(Y \cup Y_1\right)\right|} - 1\right),\ \left(3^{\left|Y_2 \setminus Y_2'\right|} - 2^{\left|Y_2 \setminus Y_2'\right|}\right),\ \left(3^{\left|Y_2' \setminus Y_2\right|} - 2^{\left|Y_2' \setminus Y_2\right|}\right),\ 5^{\left|X \setminus \left(Y_2 \cup Y_2'\right)\right|}$$

olarak bulunur. Bu sayıların $Q_9 = \left\{Z, Z', T, T', T \cup T'\right\}$ un seçilişinden bağımsız olur. Dolayısıyla D nin Q_9 a tam izomorf olan XI -alt yarılatislerinin sayısı 12 olduğundan her biri için yazılabilecek birbirinden farklı f_{α} ların sayısı

$$2^{\left|\left(\left(Y_2 \cap Y_2'\right) \setminus \left(Y' \cup Y_1\right)\right)\right|} \cdot \left(2^{\left|Y' \setminus \left(Y \cup Y_1\right)\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Y_2 \setminus Y_2'\right|} - 2^{\left|Y_2 \setminus Y_2'\right|}\right) \cdot \left(3^{\left|Y_2' \setminus Y_2\right|} - 2^{\left|Y_2' \setminus Y_2\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \left(Y_2 \cup Y_2'\right)\right|}$$

olur. Böylece

$$\left|R\left(D'\right) \cap R\left(D''\right)\right| = 12 \cdot 2^{\left|\left(\left(Y_2 \cap Y_2'\right) \setminus \left(Y' \cup Y_1\right)\right)\right|} \cdot \left(2^{\left|Y' \setminus \left(Y \cup Y_1\right)\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Y_2 \setminus Y_2'\right|} - 2^{\left|Y_2 \setminus Y_2'\right|}\right) \cdot \left(3^{\left|Y_2' \setminus Y_2\right|} - 2^{\left|Y_2' \setminus Y_2\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \left(Y_2 \cup Y_2'\right)\right|}$$

olarak elde edilir.

Lemma 4.1.21 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R(D_1')\cap R(D_5')\right| = 12\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|},$$

$$\left|R(D_2')\cap R(D_6')\right| = 12\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|},$$

$$\left|R(D_3')\cap R(D_5')\right| = 12\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|},$$

$$\left|R(D_4')\cap R(D_6')\right| = 12\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|},$$

$$\left|R(D_5')\cap R(D_{11}')\right| = 12\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|},$$

$$\left|R(D_6')\cap R(D_{12}')\right| = 12\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|},$$

$$\left|R(D_7')\cap R(D_{11}')\right| = 12\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|},$$

$$\left|R(D_8')\cap R(D_{12}')\right| = 12\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|},$$

$$\left|R(D_9')\cap R(D_{11}')\right| = 12\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|},$$

$$\left|R(D_{10}')\cap R(D_{12}')\right| = 12\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: $D_1'=\{Z_8,Z_6,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $D_2'=\{Z_8,Z_6,Z_1,Z_2,\breve{D}\}$, $D_3'=\{Z_8,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $D_4'=\{Z_8,Z_5,Z_1,Z_2,\breve{D}\}$, $D_5'=\{Z_8,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $D_6'=\{Z_8,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\}$, $D_7'=\{Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $D_8'=\{Z_7,Z_5,Z_1,Z_2,\breve{D}\}$, $D_9'=\{Z_7,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $D_{10}'=\{Z_7,Z_4,Z_1,Z_2,\breve{D}\}$, $D_{11}'=\{Z_7,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ ve $D_{12}'=\{Z_7,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\}$ XI -alt yarılatisleri için Teorem 4.1.20 uygulanırsa istenen sonuç elde edilir.■

Teorem 4.1.22 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_9)\right| = {} & 12\cdot 2\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
& 12\cdot 2\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
& 12\cdot 2\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
& 12\cdot 2\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
& 12\cdot 2\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}+\end{aligned}$$

$$12\cdot 2\cdot 2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-$$
$$12\cdot 2\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-$$
$$12\cdot 2\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-$$
$$12\cdot 2\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-$$
$$12\cdot 2\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-$$
$$12\cdot 2\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Lemma 4.1.18, Teorem 1.1.62-(b) ve Lemma 4.1.21 den açıktır.■

$\alpha\in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.1.1-(10) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha)=Q_{10}=\{T,T',Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ olduğundan.

$$Q_{10}\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\right.$$
$$\left.\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\right\}$$

ve $|\Omega(Q_{10})|=4$ olur. Ayrıca Q_{10} un tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{10}}=\begin{pmatrix}T & T' & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ T & T' & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\end{pmatrix}\text{ ve }\theta=\begin{pmatrix}T & T' & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ T & T' & Z_3 & Z_1 & Z_2 & \breve{D}\end{pmatrix}$$

olarak bulunur. O halde $|\Phi(Q_{10})|=2$ olur. Ayrıca

$$D_1'=\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ D_2'=\{Z_8,Z_6,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\},\ D_3'=\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$$
$$D_4'=\{Z_8,Z_5,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\},\ D_5'=\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ D_6'=\{Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\}$$
$$D_7'=\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ D_8'=\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\}$$

olduğundan

$$R^*(Q_{10})=\bigcup_{i=1}^{8}R(D_i')$$

olur.■

Lemma 4.1.23 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{10}\right)\right| = 4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot$$
$$\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot$$
$$\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+\ 4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot$$
$$\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot$$
$$\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{10}\right)=\bigcup_{i=1}^{8}R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan XI -alt yarılatislerden arakesitleri boş küme olanları belirleyelim.

$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)\neq\varnothing$ olsun. $\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)$ alalım

$$\begin{aligned}\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)\Rightarrow\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq Z_3,\\ & Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq Z_2, Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq Z_1,\\ & Y_{T'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_3^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_2^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_1^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing,\\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq Z_3,\\ & Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq Z_1, Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq Z_2,\\ & Y_{T'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_3^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_2^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing,\ Y_1^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing\\ \Rightarrow\ & Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\breve{D},\\ & \left(Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha\right)\cap Y_1^\alpha\supseteq\breve{D}\cap Y_1^\alpha\supseteq Z_1\cap Y_1^\alpha\neq\varnothing\end{aligned}$$

olur. Bu da α nın quasinormal gösterimindeki Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)=\varnothing$ olur. Benzer olarak

$$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)=\varnothing,\ R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing,\ R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_5'\right)=\varnothing,$$

$$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_6'\right)=\varnothing,\ R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_7'\right)=\varnothing,\ R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_8'\right)=\varnothing,$$

$$R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_3'\right)=\varnothing,\ R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing,\ R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_5'\right)=\varnothing,$$

$$R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_6'\right)=\varnothing,\ R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_7'\right)=\varnothing,\ R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_8'\right)=\varnothing,$$

$$R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing,\ R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_5'\right)=\varnothing,\ R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_6'\right)=\varnothing,$$

$$R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_7'\right)=\varnothing,\ R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_8'\right)=\varnothing,\ R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_5'\right)=\varnothing,$$

$$R(D_4')\cap R(D_6')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_8')=\varnothing,$$

$$R(D_5')\cap R(D_6')=\varnothing,\ R(D_5')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_5')\cap R(D_8')=\varnothing,$$

$$R(D_6')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_6')\cap R(D_8')=\varnothing,\ R(D_7')\cap R(D_8')=\varnothing$$

oldukları görülür. O halde

$$\left|R^*(Q_{10})\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|+\left|R(D_5')\right|+\left|R(D_6')\right|+\left|R(D_7')\right|+\left|R(D_8')\right|$$

bulunur.

Teorem 1.1.62-(b) den

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_{10})\right|=\;&4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\\ &\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}+4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_8|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\\ &\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}+\ 4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\\ &\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ &4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\\ &\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}+\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha\in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.1.1-(11) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $Z,T,T'\in D$, $Z\subset T$, $Z\subset T'$, $T\setminus T'\neq\varnothing, T'\setminus T\neq\varnothing$ ve $T\cup T'=Z_3$ olmak üzere $V(D,\alpha)=Q_{11}=\{Z,T,T',Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ olur. Bu durumda

$$Q_{11}\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\right\}$$

ve $\left|\Omega(Q_{11})\right|=2$ olur. Ayrıca Q_{11} in tam otomorfizmleri

$$id_Q=\begin{pmatrix}Z & T & T' & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ Z & T & T' & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix}Z & T & T' & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ Z & T' & T & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\end{pmatrix},$$

$$g=\begin{pmatrix}Z & T & T' & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ Z & T & T' & Z_3 & Z_1 & Z_2 & \breve{D}\end{pmatrix}\text{ ve } h=\begin{pmatrix}Z & T & T' & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ Z & T' & T & Z_3 & Z_1 & Z_2 & \breve{D}\end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi(Q_{11})\right|=4$ olur. Öte yandan.

$$D_1'=\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ D_2'=\{Z_8,Z_6,Z_5,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\},$$

$$D_3'=\{Z_8,Z_5,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ D_4'=\{Z_8,Z_5,Z_6,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\},$$

$$D_5' = \left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_6' = \left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},$$

$$D_7' = \left\{Z_7, Z_4, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_8' = \left\{Z_7, Z_4, Z_5, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\}$$

ile gösterirsek

$$R^*\left(Q_{11}\right) = \bigcup_{i=1}^{8} R\left(D_i'\right)$$

olur.

Lemma 4.1.24 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{11}\right)\right| = 4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|}-4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot$$
$$\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|}-4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|} + 4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot$$
$$4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|}-4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|}-4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{11}\right) = \bigcup_{i=1}^{8} R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan XI-alt yarılatislerden arakesitleri boş küme olanları belirleyelim.

$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)\neq\varnothing$ olsun. $\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)$ alalım.

$$\begin{aligned}
\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right) \Rightarrow\ & Y_Z^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5,\\
& Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq Z_2,\\
& Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq Z_1,\\
& Y_T^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_2^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\\
& Y_1^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing,\ Y_Z^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_6,\\
& Y_Z^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq Z_1,\\
& Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq Z_2,\ Y_T^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\\
& Y_{T'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_2^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing,\ Y_1^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing\\
\Rightarrow\ & Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\breve{D},\\
& \left(Y_Z^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_2^\alpha\right)\cap Y_1^\alpha\supseteq\breve{D}\cap Y_1^\alpha\supseteq Z_1\cap Y_1^\alpha\neq\varnothing
\end{aligned}$$

olur. Bu da α nın quasinormal gösterimindeki Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)=\varnothing$ olur. Benzer olarak

$$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)=\varnothing,\ R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing,\ R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_5'\right)=\varnothing,$$

$$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_6'\right)=\varnothing,\ R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_7'\right)=\varnothing,\ R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_8'\right)=\varnothing,$$

$$R(D_2')\cap R(D_3')=\varnothing,\ R(D_2')\cap R(D_4')=\varnothing,\ R(D_2')\cap R(D_5')=\varnothing,$$

$$R(D_2')\cap R(D_6')=\varnothing,\ R(D_2')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_2')\cap R(D_8')=\varnothing,$$

$$R(D_3')\cap R(D_4')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_5')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_6')=\varnothing,$$

$$R(D_3')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_8')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_5')=\varnothing,$$

$$R(D_4')\cap R(D_6')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_4')\cap R(D_8')=\varnothing,$$

$$R(D_5')\cap R(D_6')=\varnothing,\ R(D_5')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_5')\cap R(D_8')=\varnothing,$$

$$R(D_6')\cap R(D_7')=\varnothing,\ R(D_6')\cap R(D_8')=\varnothing,\ R(D_7')\cap R(D_8')=\varnothing$$

oldukları görülür. O halde Teorem 3.1.7 den

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_{11})\right| &= 4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|}-4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\\ &\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|}-4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}+4\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\\ &4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|}-4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|}-4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

Teorem 4.1.25 $D=\left\{Z_8,\ Z_7,\ Z_6,\ Z_5,\ Z_4,\ Z_3,\ Z_2,\ Z_1,\ \breve{D}\right\}$ ve X sonlu olsun. O zaman $B_X(D)$ nin, $Z_8\cap Z_7\neq\varnothing$ koşulu altında regüler elemanlarınının sayısı

$$|R|=\sum_{i=1}^{11}\left|R^*(Q_i)\right|$$

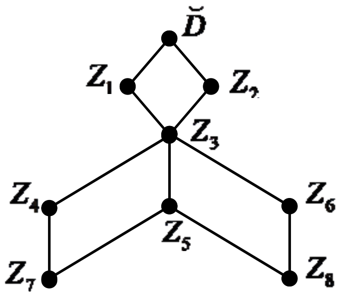
olur.

İspat: X sonlu olsun. $B_X(D)$ yarıgrubunun $Z_8\cap Z_7\neq\varnothing$ koşulu altında regüler elemanlarınının sayısının Teorem 1.1.30 dan

$$|R|=\sum_{D'\in\Sigma_{XI}}\left|R(D')\right|=\sum_{i=1}^{11}\left|R^*(Q_i)\right|$$

olarak bulunur.■

Örnek 4.1.26 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir aile $D=\{\{3,4\},\{3,6\},\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{3,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$ olsun. D kümesinin elemanlarını $\breve{D}=\{1,2,3,4,5,6\}$, $Z_1=\{2,3,4,5,6\}$, $Z_2=\{1,3,4,5,6\}$, $Z_3=\{3,4,5,6\}$, $Z_4=\{3,5,6\}$, $Z_5=\{3,4,6\}$, $Z_6=\{3,4,5\}$, $Z_7=\{3,6\}$ ve $Z_8=\{3,4\}$ ile gösterirsek D nin diyagramı aşağıdaki gibidir.



D nin her alt kümesinin kapsama bağıntısına göre bir en küçük üst sınırı olduğundan D kümelerdeki kapsama bağıntısı ile bir üst yarılatisdir. Ayrıca D kümelerdeki birleşme işlemine göre kapalı olduğundan tam X -yarılatisdir ve en büyük elemanı $\breve{D}$ olur. Öte yandan

$$Z_8 \cap Z_7 = \{3,4\} \cap \{3,6\} \neq \varnothing \text{ dır.}$$

O halde Teorem 3.1.20 den $B_X(D)$ nin idempotent elemanların sayısı, $\left|I^*(Q_1)\right| = 9$, $\left|I^*(Q_2)\right| = 220$, $\left|I^*(Q_3)\right| = 379$, $\left|I^*(Q_4)\right| = 118$, $\left|I^*(Q_5)\right| = 8$, $\left|I^*(Q_6)\right| = 38$, $\left|I^*(Q_7)\right| = 38$, $\left|I^*(Q_8)\right| = 4$, $\left|I^*(Q_9)\right| = 17$, $\left|I^*(Q_{10})\right| = 4$, $\left|I^*(Q_{11})\right| = 2$ olduğundan

$$|I_D| = \sum_{i=1}^{11}\left|I^*(Q_i)\right| = 837$$

olarak bulunur.

Teorem 4.1.25 den $B_X(D)$ nin regüler elemanların sayısı

$$|R| = \sum_{i=1}^{11}\left|R^*(Q_i)\right| = 5503$$

olarak bulunur.

Lemma 3.1.1 de verilen D nin tam X -alt yarılatislerinin bütün koşullar altında D nin XI -alt yarılatisleri olduklarını biliyoruz. Dolayısıyla Teorem 4.1.1 de verilen biçimlerde quasinormal gösterime sahip regüler elemanlar bütün koşullar altında $B_X(D)$ nin regüler elemanları olur. O halde diğer koşullar altında Teorem 4.1.1 de verilen biçimler dışında quasinormal gösterimi olan regüler elemanların yapısı incelenmelidir.

4.2. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ Koşulları Altında Regüler Elemanlar

Bu bölümde birleşimlerin tam X -yarılatisi D ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X(D)$ nin,

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$$

koşulları altında regüler elemanlarının özellikleri ve X kümesinin sonlu olması durumunda regüler elemanlarının sayısı belirlenecektir.

Teorem 4.1.1 de verilen biçimlerde quasinormal gösterime sahip ikili bağıntılar $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ koşulları altında da $B_X(D)$ nin regüler elemanı olur. O halde bunlar dışında quasinormal gösterime sahip olan $B_X(D)$ nin regüler elemanlarını bulalım.

Teorem 4.2.1 $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ olsun. Aşağıda verilen biçimlerde quasinormal gösterimlerden birine sahip olan $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının regüler olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizmasının verilen koşulları sağlamasıdır.

1) $T,\ T' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right)$ biçiminde ve φ, tam α -izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$ koşullarını sağlar.

2) $T,\ T',\ Z \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right)$ biçiminde ve φ, tam α -izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$ ve $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

3) $T,\ T',\ Z,\ Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ için $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right)$ biçiminde ve φ, $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

4) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $Z \cap Z' = \varnothing$, $Z \cup Z' = Z_5$ ve $T \in \{Z_2, Z_1\}$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi, $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup$

$\left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \varphi\left(\breve{D}\right) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

5) $T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subseteq Z_3$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

6) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T,\ T' \in \{Z_2, Z_1\}$ ve $T \neq T'$ olmak üzere
$\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı regüler olsun. Bu durumda $B_X(D)$ kümesinin tanımından $\alpha = \bigcup_{x\in X} \left(\{x\} \times f(x)\right)$ olacak şekilde $f : X \to D$ dönüşümü vardır. Buradan $f(x) \in \left\{ Z_8,\ Z_7,\ Z_6,\ Z_5,\ Z_4,\ Z_3,\ Z_2,\ Z_1,\ \breve{D} \right\}$ olur. Ayrıca her $T \in D$ için Y_T^α kümelerinin tanımından dolayı

$$\alpha = \bigcup_{T\in D'} \left(Y_T^\alpha \times T\right)$$

olacak şekilde D nin bir D' alt yarılatisi vardır. Buradan

$$V(D,\alpha) = D' = V(D',\alpha)$$

olur. Üstelik Teorem 1.1.17 den $V(D,\alpha)$, D nin XI-alt yarılatisidir. O halde D', D nin XI -alt yarılatisi olur. Yani D', $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ koşulları altında D nin Lemma 3.2.1 de verilen XI-alt yarılatislerini tarar. O halde α regüler elemanının quasinormal gösterim (1)-(6) da verilen quasinormal gösterimlerden biri gibidir. Şimdi φ , tam α -izomorfizmasının verilen koşulları sağladığını gösterelim.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (1) deki gibi yani $T,\ T' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right)$ biçiminde olsun. $Q_{12} = \{T, T', T \cup T'\}$ dersek Lemma 3.2.1 den dolayı Q_{12} D nin XI -alt yarılatisidir. Ayrıca $V(D,\alpha) = Q_{12}$ olur. Teorem 1.1.56 dan α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerekli ve yeterli koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizmasının $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$ koşullarını sağlamasıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (2) deki gibi yani $T,\ T',\ Z \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right)$ biçiminde olsun. $Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$ dersek Lemma 3.2.1 den dolayı Q_{13}, D nin XI -alt yarılatisidir. Ayrıca $V(D,\alpha) = Q_{13}$ olur. Teorem 1.1.56 dan dolayı α , $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır ancak ve ancak $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$ ve $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (3) deki gibi yani $T,\ T',\ Z,\ Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right)$ biçiminde olsun. $Q_{14} = \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ olsun. Lemma 3.2.1 den dolayı Q_{14}, D nin XI -alt yarılatisidir. Ayrıca $V(D,\alpha) = Q_{14}$ olur. Teorem 1.1.56 dan α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizmasının $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (4) deki gibi yani $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $Z \cap Z' = \varnothing$, $Z \cup Z' = Z_5$ ve $T \in \{Z_2, Z_1\}$ olmak üzere

$\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde olsun. $Q_{15} = \left\{Z, Z', Z_5, Z_3, T, \breve{D}\right\}$ olsun. Lemma 3.2.1 den dolayı Q_{15}, D nin XI -alt yarılatisidir. Ayrıca $V\left(D,\alpha\right) = Q_{15}$ olur. Teorem 1.1.56 dan α, $B_X\left(D\right)$ nin regüler elemanıdır ancak ve ancak $V\left(D,\alpha\right)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizması $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \varphi\left(\breve{D}\right) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (5) deki gibi yani $T,\ T' \in \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\right\}$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subseteq Z_3$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde olsun. $Q_{16} = \left\{T, T', T \cup T', Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ dersek Lemma 3.2.1 den dolayı Q_{16}, D nin XI -alt yarılatisi olur. Ayrıca $V\left(D,\alpha\right) = Q_{16}$ olur. Teorem 1.1.68 den dolayı α, $B_X\left(D\right)$ nin regüler elemanıdır ancak ve ancak $V\left(D,\alpha\right)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (6) deki gibi yani $Z,\ Z' \in \left\{Z_8, Z_7\right\}$, $Z \neq Z'$, $T,\ T' \in \left\{Z_2, Z_1\right\}$ ve $T \neq T'$ olmak üzere

$\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times \left(Z \cup Z'\right)\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$

biçiminde olsun. $Q_{17} = \left\{Z, Z', Z_5, Z_3, T, T', \breve{D}\right\}$ dersek Lemma 3.2.1 den dolayı Q_{17}, D nin XI -alt yarılatisi olur. Ayrıca $V\left(D,\alpha\right) = Q_{17}$ olur. Teorem 3.2.2 den dolayı α nın $B_X\left(D\right)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul $V\left(D,\alpha\right)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizmasının

$$Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z),\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z'),\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3),$$

$$Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T),\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T'),$$

$$Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing \text{ ve } Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$$

koşullarını sağlamasıdır.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.2.1-(1) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{12} = \{T, T', T \cup T'\}$ olduğundan

$$Q_{12}\vartheta_{XI} = \{\{Z_8, Z_7, Z_5\}\}$$

olur. Dolayısıyla $|\Omega(Q_{12})| = 1$ bulunur. Ayrıca Q_{12} nin tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{12}} = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' \\ T & T' & T \cup T' \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' \\ T' & T & T \cup T' \end{pmatrix}$$

olduğundan $|\Phi(Q_{12})| = 2$ bulunur. O halde X sonlu iken $R^*(Q_{12})$ nin eleman sayısını bulalım.

Lemma 4.2.2 X sonlu olsun. O zaman

$$|R^*(Q_{12})| = 2 \cdot 3^{|X \setminus Z_5|}$$

olur.

İspat: Q_{12} ile $D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5\}$ tam α -izomorf olduklarından Teorem 1.1.58 den

$$|R^*(Q_{12})| = 2 \cdot 1 \cdot 3^{|X \setminus Z_5|}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.2.1-(2) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$ olur. Buradan

$$Q_{13}\vartheta_{XI} = \{\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}\}$$

olduğundan $|\Omega(Q_{13})| = 4$ bulunur. Ayrıca Q_{13} ün tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{13}} = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' & Z \\ T & T' & T \cup T' & Z \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' & Z \\ T' & T & T \cup T' & Z \end{pmatrix}$$

olduğundan $|\Phi(Q_{13})| = 2$ bulunur. Bunun yanında

$$D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\},\ D_2' = \{Z_7, Z_8, Z_5, \breve{D}\},\ D_3' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\},$$

$$D_4' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3\},\ D_5' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\},\ D_6' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_1\},$$

$$D_7' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\},\ D_8' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_2\}$$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_{13}) = \bigcup_{i=1}^{8} R(D_i')$$

olur.

Lemma 4.2.3 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*(Q_{13})\right| = 2 \cdot 4 \cdot \left(4^{|\breve{D}\setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D}\setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: $Z_8 \subseteq Y$ ve $Z_7 \subseteq Y'$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y \cup Y', Y_1\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_{13} ile D' tam α-izomorf olduklarıdan Teorem 4.2.1-(2) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\alpha \times Z)$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_8 \subseteq Y$, $Z_7 \subseteq Y'$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri de sağlanır. O halde $D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D_1')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D_1')$ elde edilir.

Benzer olarak $Z_7 \subseteq Y$ ve $Z_8 \subseteq Y'$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y \cup Y', Y_1\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_{13} ile D' α-izomorf olduklarından Teorem 4.2.1-(2) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\alpha \times Z)$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır.

Öte yandan $Z_7 \subseteq Y$, $Z_8 \subseteq Y'$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri de sağlanır. $D_2' = \{Z_7, Z_8, Z_5, \breve{D}\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D_2')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D_2')$ olarak bulunur. Sonuç olarak

$$R(D_3') \subseteq R(D_1'),\ R(D_4') \subseteq R(D_1'),\ R(D_5') \subseteq R(D_1'),\ R(D_7') \subseteq R(D_1'),$$
$$R(D_4') \subseteq R(D_2'),\ R(D_6') \subseteq R(D_2') \text{ ve } R(D_8') \subseteq R(D_2')$$

bulunur. Bu durumda $R^*(Q_{13}) = R(D_1') \cup R(D_2')$ olur.

Şimdi $R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ olsun. O zaman

$$\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') \Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,$$
$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$
$$\Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Z_5 \neq \varnothing$$

olur ki buda α nın quasinormal gösteriminde ki Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ dir. Böylece

$$\left|R^*(Q_{13})\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right|$$

bulunur. D_1' ile D_2' arasında tam otomorfizma var olduğundan $\left|R(D_1')\right| = \left|R(D_2')\right|$ dır. Teorem 1.1.58 den

$$\left|R^*(Q_{13})\right| = 2 \cdot 4 \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanı Teorem 4.2.1-(3) koşulunu sağlasın. Bu durumda $T, T', Z, Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ olmak üzere $V(D,\alpha) = Q_{14} = \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ olduğundan

$$Q_{14}\vartheta_{XI} = \Big\{\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\},$$
$$\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\}\Big\},$$

olur. Böylece $\left|\Omega(Q_{14})\right| = 5$ bulunur.. Ayrıca Q_{14} nin tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{14}} = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' & Z & Z' \\ T & T' & T \cup T' & Z & Z' \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' & Z & Z' \\ T' & T & T \cup T' & Z & Z' \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi(Q_{14})\right| = 2$ olur. Burada

$$D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\},\ D_2' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_2, \breve{D}\},\ D_3' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\},$$
$$D_4' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_1, \breve{D}\},\ D_5' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\},\ D_6' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3, \breve{D}\},$$
$$D_7' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\},\ D_8' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3, Z_2\},\ D_9' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\},$$
$$D_{10}' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3, Z_1\}$$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_{14}) = \bigcup_{i=1}^{10} R(D_i')$$

olur.

Lemma 4.2.4 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*(Q_{14})\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \left|R(D_4')\right| + \left|R(D_5')\right| + \left|R(D_6')\right|$$
$$-\left|R(D_1')\cap R(D_5')\right| - \left|R(D_2')\cap R(D_6')\right| - \left|R(D_3')\cap R(D_5')\right| - \left|R(D_4')\cap R(D_6')\right|$$

olur.

İspat: $Z_8 \subseteq Y$, $Z_7 \subseteq Y'$ ve $Y_1 \in \{Z_3, Z_2, Z_1\}$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\} \in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_{14} ile D' tam α -izomorf olduklarından Teorem 4.2.1-(3) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T)\cup(Y_{T'}^\alpha \times T')\cup(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T\cup T'))\cup(Y_Z^\alpha \times Z)\cup(Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_1$, $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_8 \subseteq Y$, $Z_7 \subseteq Y'$ olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$ olur. O halde $D'' = \{Z_8, Z_7, Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\}$ dersek $D'' = \{Z_8, Z_7, Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\} \in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D'')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D'')$ elde edilir.

Benzer olarak $Z_7 \subseteq Y$, $Z_8 \subseteq Y'$ ve $Y_1 \in \{Z_3, Z_2, Z_1\}$ için $D' = \{Y, Y', Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\} \in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_{14} ile D' tam α -izomorf olduklarından Teorem 4.2.1-(3) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T)\cup(Y_{T'}^\alpha \times T')\cup(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T\cup T'))\cup(Y_Z^\alpha \times Z)\cup(Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_1$, $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_7 \subseteq Y$, $Z_8 \subseteq Y'$ olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$ olur. O halde $D'' = \{Z_7, Z_8, Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\}$ dersek $D'' = \{Z_7, Z_8, Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\} \in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D'')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D'')$ elde edilir. Sonuç olarak

$$R(D_7') \subseteq R(D_5'),\ R(D_8') \subseteq R(D_6'),\ R(D_9') \subseteq R(D_5'),\ R(D_{10}') \subseteq R(D_6')$$

bulunur. O halde

$$R^*(Q_{14}) = \bigcup_{i=1}^{6} R(D_i')$$

olur. Şimdi bu kümelerden arakesitleri boş küme olanları belirleyelim.

$R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ alalım.

$$\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') \Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2,$$
$$Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,$$
$$Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2,$$
$$Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$
$$\Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Z_5 = Z_5 \neq \varnothing$$

olur. Buda Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. Dolayısıyla $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ olur.

Benzer olarak

$$R(D_1') \cap R(D_3') = \varnothing,\ R(D_1') \cap R(D_4') = \varnothing, R(D_1') \cap R(D_6') = \varnothing,$$
$$R(D_2') \cap R(D_3') = \varnothing,\ R(D_2') \cap R(D_4') = \varnothing, R(D_2') \cap R(D_5') = \varnothing,$$
$$R(D_3') \cap R(D_4') = \varnothing,\ R(D_3') \cap R(D_6') = \varnothing,\ R(D_4') \cap R(D_5') = \varnothing,$$
$$R(D_5') \cap R(D_6') = \varnothing$$

oldukları görülür. Buradan

$$\left|R^*(Q_{14})\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \left|R(D_4')\right| + \left|R(D_5')\right| + \left|R(D_6')\right|$$
$$-\left|R(D_1') \cap R(D_5')\right| - \left|R(D_2') \cap R(D_6')\right| - \left|R(D_3') \cap R(D_5')\right| - \left|R(D_4') \cap R(D_6')\right|$$

olarak bulunur.■

Lemma 4.2.5 $Y = Y_1$, $Y_1' = Y'$ ve $Y_2' \supseteq Y_2$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y \cup Y', Y_2, \breve{D}\}$, $D'' = \{Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1', Y_2', \breve{D}\} \in \{D_1', D_2', ..., D_6'\}$ ve $D' \neq D''$ olsun. Ayrıca $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $T,\ T',\ Z,\ Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ olmak üzere

$$\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$$

biçiminde olsun. O zaman $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ olması için gerek ve yeter koşul

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1 \cup Y_1',\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_2',\ Y_Z^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing \text{ ve } Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$

olmasıdır.

İspat: $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ olsun. Bu durumda Teorem 4.2.1-(3) den

$$\alpha \in R(D') \cap R(D'') \Leftrightarrow \alpha \in R(D') \text{ ve } \alpha \in R(D'')$$
$$\Leftrightarrow Y_T^\alpha \supseteq Y,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Y',\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing,$$
$$Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \text{ ve } Y_T^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_2',$$
$$Y_Z^\alpha \cap Y_2' \neq \varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$
$$\Leftrightarrow Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1 \cup Y_1',\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_2',\ Y_Z^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing,$$
$$Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$

bulunur.■

Lemma 4.2.6 $Y = Y_1$, $Y_1' = Y'$ ve $Y_2' \supseteq Y_2$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y \cup Y', Y_2, \breve{D}\}$, $D'' = \{Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1', Y_2', \breve{D}\} \in \{D_1', D_2', ..., D_6'\}$, $D' \neq D''$ .ve X sonlu olsun. O halde

$$\left|R(D') \cap R(D'')\right| = 5 \cdot 4^{\left|Y_2' \setminus (Y_2 \cup Y_1 \cup Y_1')\right|}\left(4^{\left|Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right|} - 3^{\left|Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Y_2'\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Y_2'\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ olsun. Lemma 4.2.5 den $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right)$ biçiminde ve α regüler elemanının $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1 \cup Y_1'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_2'$, $Y_Z^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşullarını sağladığını biliyoruz.

Ayrıca $\alpha \in B_X(D)$ olduğundan, α ikili bağıntısı bir $f_\alpha : X \to D,\ f_\alpha(t) = t\alpha$ dönüşümü ile belirlidir. $\{Y_1 \cup Y_1',\ Y_2' \setminus (Y_1 \cup Y_1'),\ \breve{D} \setminus Y_2',\ X \setminus \breve{D}\}$ kümesi X in parçalanışıdır. f_α dönüşümünün $Y_1 \cup Y_1'$, $Y_2' \setminus (Y_1 \cup Y_1')$, $\breve{D} \setminus Y_2'$ ve $X \setminus \breve{D}$ kümelerine kısıtlanışı sırasıyla $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$ ve $f_{3\alpha}$ olsun. Şimdi $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$. dönüşümlerinin özelliklerini belirleyelim.

1. $t \in Y_1 \cup Y_1'$ olsun. $Y_1 \subseteq Y_T^\alpha$ ve $Y_1' \subseteq Y_{T'}^\alpha$ olduğundan $t \in Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$ ve $t\alpha \in \{T, T'\}$ elde edilir. O halde her $t \in Y_1 \cup Y_1'$ için $f_{0\alpha}(t) \in \{T, T'\}$ olur.
2. $t \in Y_2' \setminus (Y_1 \cup Y_1')$ olsun. Bu durumda $Y_2' \setminus (Y_1 \cup Y_1') \subseteq Y_2' \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha$ olduğundan $t \in Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha$ dolayısıyla $t\alpha \in \{T, T', T \cup T', Z\}$ olur. O halde her $t \in Y_2' \setminus (Y_1 \cup Y_1')$ için $f_{1\alpha}(t) \in \{T, T', T \cup T', Z\}$ olur. Ayrıca $Y_Z^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $z \in Y_2$ için $z\alpha = Z$ olur. $z \in Y_1 \cup Y_1'$ olduğunu kabul edelim.

Bu durumda $z \in Y_1 \cup Y_1' \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$ olduğundan $z\alpha \in \{T, T'\}$ olur. Bu ise $z\alpha = Z$ olması ile çelişir. O halde en az bir $z \in Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')$ için $f_{1\alpha}(z) = Z$ olur.

3. $t \in \breve{D} \setminus Y_2'$ olsun. Bu durumda $\breve{D} \setminus Y_2' \subseteq \breve{D} \subseteq X = Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha$ olduğundan $t\alpha \in \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ olur. O halde her $t \in \breve{D} \setminus Y_2'$ için $f_{2\alpha}(t) \in \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ bulunur. Ayrıca $Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $z' \in \breve{D}$ için $z'\alpha = Z'$ olur. $z' \in Y_2'$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $Y_2' \subseteq Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha$ olduğundan $z'\alpha \in \{T, T', T \cup T', Z\}$ olur. Bu ise $z'\alpha = Z'$ olması ile çelişir. O halde en az bir $z' \in \breve{D} \setminus Y_2'$ için $f_{2\alpha}(z') = Z'$ olur.

4. $t \in X \setminus \breve{D}$ olsun. $X \setminus \breve{D} \subseteq X = Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha$ olduğundan $t\alpha \in \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ olur. O halde her $t \in X \setminus \breve{D}$ için $f_{3\alpha}(t) \in \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ elde edilir.

$\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ regüler elemanına karşılık yukarıdaki özellikleri sağlayan $f_\alpha = (f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ sıralı sistemi vardır. Şimdi

$f_0 : Y_1 \cup Y_1' \to \{T, T'\}$,

$f_1 : Y_2' \setminus (Y_1 \cup Y_1') \to \{T, T', T \cup T', Z\}$ ve en az bir $z \in Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')$ için $f_1(z) = Z$,

$f_2 : \breve{D} \setminus Y_2' \to \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ ve en az bir $z' \in \breve{D} \setminus Y_2'$ için $f_2(z') = Z'$,

$f_3 : X \setminus \breve{D} \to \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$

dönüşümleri yardımıyla

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & t \in Y_1 \cup Y_1', \\ f_1(t), & t \in Y_2' \setminus (Y_1 \cup Y_1'), \\ f_2(t), & \breve{D} \setminus Y', \\ f_3(t), & t \in X \setminus \breve{D}. \end{cases}$$

$f : X \to D$ dönüşümünü tanımlayalım. $\beta = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$ olsun. Bu durumda $Y_T^\beta = \{t \mid t\beta = T\}$, $Y_{T'}^\beta = \{t \mid t\beta = T'\}$, $Y_{T\cup T'}^\beta = \{t \in X \mid t\beta = T \cup T'\}$, $Y_Z^\beta = \{t \in X \mid t\beta = Z\}$ ve $Y_{Z'}^\beta = \{t \in X \mid t\beta = Z'\}$ olduğundan β ikili bağıntısı,

$$\beta = (Y_T^\beta \times T) \cup (Y_{T'}^\beta \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\beta \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\beta \times Z) \cup (Y_{Z'}^\beta \times Z')$$

biçiminde yazılabilir.

Şimdi birleşimde yer alan kümelerin özelliklerini belirleyelim.

$t \in Y_1 \cup Y_1'$ olsun. O zaman $f(t) = t\beta \in \{T, T'\}$ olduğundan $t \in Y_T^\beta \cup Y_{T'}^\beta$ olur. Dolayısıyla $Y_T^\beta \cup Y_{T'}^\beta \supseteq Y_1 \cup Y_1'$ olur.

Benzer olarak $Y_T^\beta \cup Y_{T'}^\beta \cup Y_{T\cup T'}^\beta \cup Y_Z^\beta \supseteq Y_2'$ olduğu açıktır.

Ayrıca en az bir $z \in Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')$ için $f_1(z) = Z$ olduğundan $Y_Z^\beta \cap Y_2 \neq \varnothing$ olur. Bununla birlikte en az bir $z' \in \breve{D} \setminus Y_2'$ için $f_2(z') = Z'$ olduğundan $Y_{Z'}^\beta \cap \breve{D} \neq \varnothing$ olarak bulunur. O halde Lemma 4.2.5 den $\beta \in R(D') \cap R(D'')$ olur.

Şimdi $\alpha, \beta \in R(D') \cap R(D'')$ ve $\alpha \neq \beta$ olsun. Bu durumda α ya karşılık $f_\alpha(t) = t\alpha$ olacak şekilde $f_\alpha = (f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ sıralı sistemi ve β ya karşılık $f_\beta(t) = t\beta$ olacak şekilde $f_\beta = (f_{0\beta}, f_{1\beta}, f_{2\beta}, f_{3\beta})$ sıralı sistemi vardır. $f_\alpha = f_\beta$ olsun. Buradan her $t \in X$ için $f_\alpha(t) = t\alpha = t\beta = f_\beta(t)$ olur. Dolayısıyla $\alpha = \beta$ elde edilir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $f_\alpha \neq f_\beta$ dır.

Sonuç olarak $R(D') \cap R(D'')$ ile $f_\alpha = (f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ biçimindeki ayrık dönüşümlerin sıralı sistemlerinin kümesi arasında bire-bir eşleme vardır. Şimdi bu f_α ların sayısını bulalım. Teorem 1.1.10 dan $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}$ dönüşümlerinin sayısı sırasıyla

$$1,\ 4^{\left|\left(Y_2' \setminus (Y_1 \cup Y_1') \setminus \left(Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right)\right)\right|}\left(4^{\left|Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right|} - 3^{\left|Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right|}\right),\ \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Y_2'\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Y_2'\right|}\right),\ 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olarak bulunur. Bu sayıların $Q_{14} = \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ den bağımsız olduğu görülür. Dolayısıyla Q_{14} yarılatisine tam izomorf olan 5 tane XI -alt yarılatis var olduğundan her biri için yazılabilecek birbirinden farklı f_α ların sayısı

$$2^{\left|\left(Y_1' \setminus (Y' \cup Y \cup Y_1)\right)\right|} \cdot \left(2^{\left|Y' \setminus (Y \cup Y_1)\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Y_1'\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Y_1'\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olur. O halde

$$\left|R(D') \cap R(D'')\right| = 5 \cdot 4^{\left|Y_2' \setminus (Y_2 \cup Y_1 \cup Y_1')\right|}\left(4^{\left|Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right|} - 3^{\left|Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Y_2'\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Y_2'\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 4.2.7 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right| = 5\cdot 4^{|Z_2\backslash Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_3\backslash Z_5|}-3^{|Z_3\backslash Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\backslash Z_2|}-4^{|\breve{D}\backslash Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\backslash \breve{D}|}$$

$$\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right| = 5\cdot 4^{|Z_2\backslash Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_3\backslash Z_5|}-3^{|Z_3\backslash Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\backslash Z_2|}-4^{|\breve{D}\backslash Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\backslash \breve{D}|}$$

$$\left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right| = 5\cdot 4^{|Z_1\backslash Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_3\backslash Z_5|}-3^{|Z_3\backslash Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\backslash Z_1|}-4^{|\breve{D}\backslash Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\backslash \breve{D}|}$$

$$\left|R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right| = 5\cdot 4^{|Z_1\backslash Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_3\backslash Z_5|}-3^{|Z_3\backslash Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\backslash Z_1|}-4^{|\breve{D}\backslash Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\backslash \breve{D}|}$$

olur.

İspat: $D_1'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\right\}$, $D_2'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_2,\breve{D}\right\}$, $D_3'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_4'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_5'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\}$ ve $D_6'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\}$ XI -alt yarılatisleri için Lemma 4.2.6 uygulandığında sonuç açıktır.■

Teorem 4.2.8 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right| &= 2\cdot 5\cdot\left(4^{|Z_2\backslash Z_5|}-3^{|Z_2\backslash Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\backslash Z_2|}-4^{|\breve{D}\backslash Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\backslash \breve{D}|}\\
&+2\cdot 5\cdot\left(4^{|Z_1\backslash Z_5|}-3^{|Z_1\backslash Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\backslash Z_1|}-4^{|\breve{D}\backslash Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\backslash \breve{D}|}\\
&+2\cdot 5\cdot\left(4^{|Z_3\backslash Z_5|}-3^{|Z_3\backslash Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\backslash Z_3|}-4^{|\breve{D}\backslash Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\backslash \breve{D}|}\\
&-2\cdot 5\cdot 4^{|Z_2\backslash Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_3\backslash Z_5|}-3^{|Z_3\backslash Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\backslash Z_2|}-4^{|\breve{D}\backslash Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\backslash \breve{D}|}\\
&-2\cdot 5\cdot 4^{|Z_1\backslash Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_3\backslash Z_5|}-3^{|Z_3\backslash Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\backslash Z_1|}-4^{|\breve{D}\backslash Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\backslash \breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Lemma 4.2.4, Teorem 1.1.58 ve Lemma 4.2.7 den istenen elde edilir.■

$\alpha\in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının Teorem 4.2.1-(4) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V\left(D,\alpha\right)=Q_{15}=\left\{Z,Z',Z_5,Z_3,T,\breve{D}\right\}$ olduğundan

$$Q_{15}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\right\}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\left|\Omega\left(Q_{15}\right)\right|=2$ olur. Ayrıca Q_{15} in tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{15}}=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D}\\ Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D}\end{pmatrix} \text{ ve } \theta=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D}\\ Z' & Z & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D}\end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{15}\right)\right|=2$ olur. Öten yandan

$$D_1' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_2' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\},$$

$$D_3' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_4' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$$

ile gösterilirse,

$$R^*\left(Q_{15}\right) = \bigcup_{i=1}^{4} R\left(D_i'\right)$$

olarak bulunur.

Lemma 4.2.9 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right| = 2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|} - 4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|} - 5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|} - 4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{15}\right) = \bigcup_{i=1}^{4} R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan XI -alt yarılatislerin arakesitlerini inceleyelim.

$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right) \neq \varnothing$ olsun. $\alpha \in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)$ alalım.

$$\begin{aligned}
\alpha \in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right) \Rightarrow\ & Y_Z^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3,\\
& Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\\
& Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,\\
& Y_Z^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3,\\
& Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\\
& Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing\\
\Rightarrow\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5\\
& Y_Z^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_Z^\alpha \cap Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Z_5 = Z_5 \neq \varnothing
\end{aligned}$$

olur. Bu da Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right) = \varnothing$ olur. Benzer olarak

$$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right) = \varnothing,\ R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_4'\right) = \varnothing,\ R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_3'\right) = \varnothing,$$

$$R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_4'\right) = \varnothing \text{ ve } R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_4'\right) = \varnothing$$

oldukları görülür. O halde

$$\left|R\left(Q_{15}\right)\right| = \left|R\left(D_1'\right)\right| + \left|R\left(D_2'\right)\right| + \left|R\left(D_3'\right)\right| + \left|R\left(D_4'\right)\right|$$

olarak bulunur.

Ayrıca D_1' ile D_2' yarılatisleri ve D_3' ile D_4' yarılatisleri arasında tam otomorfizma var olduğundan $\left|R\left(D_1'\right)\right| = \left|R\left(D_2'\right)\right|$ ve $\left|R\left(D_3'\right)\right| = \left|R\left(D_4'\right)\right|$ olur. Teorem 1.1.58 kullanılarak

$$\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right| = 2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|} - 4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|} - 5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|} - 4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının Teorem 4.2.1-(5) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V\left(D,\alpha\right) = Q_{16} = \left\{T, T', T\cup T', Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ olduğundan

$$Q_{16}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$$

olarak bulunur. Böylece $\left|\Omega\left(Q_{16}\right)\right| = 1$ olur. Ayrıca Q_{16} nın tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{16}} = \begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ T' & T & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ T & T' & T\cup T' & Z_1 & Z_2 & \breve{D} \end{pmatrix} \text{ ve } h = \begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ T & T' & T\cup T' & Z_1 & Z_2 & \breve{D} \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{16}\right)\right| = 4$ bulunur.

Lemma 4.2.10 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right| = 4\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|} - 3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|} - 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: Q_{16} ile $D_1' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ tam α-izomorf olduklarından Teorem 1.1.70 den

$$\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right| = 4\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|} - 3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|} - 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak bulunur.■

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının Teorem 4.2.1-(6) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V\left(D,\alpha\right) = Q_{17} = \left\{Z, Z', Z_5, Z_3, T, T', \breve{D}\right\}$ olduğundan

$$Q_{17}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$$

olarak bulunur. Böylece $\left|\Omega\left(Q_{17}\right)\right|=1$ olur. Ayrıca Q_{17} nin otomorfizmleri

$$id_{Q_{17}}=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \\ Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \\ Z' & Z & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \end{pmatrix}$$

$$g=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \\ Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T' & T & \breve{D} \end{pmatrix} \text{ ve } h=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \\ Z' & Z & Z_5 & Z_3 & T' & T & \breve{D} \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{17}\right)\right|=4$ olur.

Lemma 4.2.11 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{17}\right)\right|=4\cdot 4^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: Q_{17} ile $D_1'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ tam α -izomorf olduklarından Teorem 3.2.7 den

$$\left|R^*\left(Q_{17}\right)\right|=4\cdot 1\cdot 4^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak bulunur.■

Teorem 4.2.12 X sonlu bir küme olsun. D birleşimlerin tam X -yarılatisi ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X\left(D\right)$ nin $Z_8\cap Z_7=\varnothing$, $Z_8\cap Z_4\neq\varnothing$ ve $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$ koşulları altında regüler elemanlarınının sayısı

$$\left|R\right|=\sum_{i=1}^{17}\left|R^*\left(Q_i\right)\right|$$

olur.

İspat: X sonlu olsun. D birleşimlerin tam X -yarılatisi ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X\left(D\right)$ nin, $Z_8\cap Z_7=\varnothing$, $Z_8\cap Z_4\neq\varnothing$ ve $Z_7\cap Z_6\neq\varnothing$ koşulları altında regüler elemanlarınının sayısını veren formül Teorem 1.1.30 dan

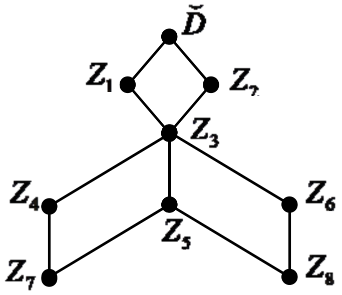
$$\left|R\right|=\sum_{D'\in\Sigma_{XI}}\left|R\left(D'\right)\right|=\sum_{i=1}^{17}\left|R^*\left(Q_i\right)\right|$$

olarak bulunur.■

Örnek 4.2.13 $X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir aile

$$D=\{\{4,7\},\{3,6\},\{3,4,5,7\},\{3,4,6,7\},\{3,5,6,7\},\{3,4,5,6,7\},\{1,3,4,5,6,7\},$$
$$\{2,3,4,5,6,7\},\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$$

olsun. D nin elemanlarını $\breve{D}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $Z_1=\{2,3,4,5,6,7\}$, $Z_2=\{1,3,4,5,6,7\}$, $Z_3=\{3,4,5,6,7\}$, $Z_4=\{3,5,6,7\}$, $Z_5=\{3,4,6,7\}$, $Z_6=\{3,4,5,7\}$, $Z_7=\{3,6\}$ ve $Z_8=\{4,7\}$ ile gösterirsek D nin diyagramı aşağıdaki gibidir.



D nin her alt kümesinin kapsama bağıntısına göre bir en küçük üst sınırı olduğundan D kümelerdeki kapsama bağıntısı ile bir üst yarılatisdir. Ayrıca D kümelerdeki birleşme işlemine göre kapalı olduğundan tam X -yarılatisdir ve en büyük elemanı $\breve{D}$ olur. Üstelik

$$Z_8 \cap Z_7=\{4,7\}\cap\{3,6\}=\varnothing,$$
$$Z_8 \cap Z_4=\{4,7\}\cap\{3,5,6,7\}=\{7\}\neq\varnothing,$$
$$Z_7 \cap Z_6=\{3,6\}\cap\{3,4,5,7\}=\{3\}\neq\varnothing.$$

olduğundan Teorem 3.2.15 den $B_X(D)$ nin idempotent elemanların sayısı, $|I^*(Q_1)|=9$, $|I^*(Q_2)|=412$, $|I^*(Q_3)|=963$, $|I^*(Q_4)|=334$, $|I^*(Q_5)|=24$, $|I^*(Q_6)|=38$, $|I^*(Q_7)|=38$, $|I^*(Q_8)|=4$, $|I^*(Q_9)|=41$, $|I^*(Q_{10})|=12$, $|I^*(Q_{11})|=2$ ve $\sum_{i=12}^{17}|I^*(Q_i)|=175$ olduğundan $|I_D|=2052$ olarak bulunur.

Ayrıca Teorem 4.2.12 den $B_X(D)$ nin regüler elemanların sayısı

$$|R|=\sum_{i=1}^{17}|R^*(Q_i)|=14267$$

bulunur.

4.3. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ Koşulları Altında Regüler Elemanlar

Bu bölümde

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 = \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$$

koşulları altında birleşimlerin tam X -yarılatisi D ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarı grubu $B_X(D)$ nin, regüler elemanlarınının özellikleri ve X kümesinin sonlu olması durumunda regüler elemanlarının sayısı belirlenecektir.

Teorem 4.1.1 de verilen biçimlerde quasinormal gösterime sahip ikili bağıntılar $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ koşulları altında da $B_X(D)$ nin regüler elemanı olur. O halde bunlar dışında quasinormal gösterime sahip olan $B_X(D)$ nin regüler elemanlarını bulalım.

Teorem 4.3.1 $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ olsun. Aşağıda verilen biçimlerde quasinormal gösterimlerden birine sahip olan $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının regüler olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizmasının verilen koşulları sağlamasıdır.

1) $T,\ T' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right)$ biçiminde ve φ, tam α -izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$ koşullarını sağlar.

2) $T,\ T',\ Z \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right)$ biçiminde ve φ, tam α -izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$ ve $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

3) $T,\ T',\ Z,\ Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ için $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right)$ biçiminde ve φ, $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

4) $Z,\ Z'\in\{Z_8,Z_7\}$, $Z\neq Z'$, $Z\cap Z'=\varnothing$, $Z\cup Z'=Z_5$ ve $T\in\{Z_2,Z_1\}$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi, $\alpha=\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)\cup\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, $Y_Z^\alpha\supseteq\varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha\supseteq\varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(Z_3)$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_3^\alpha\cap\varphi(Z_3)\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$ ve $Y_0^\alpha\cap\varphi(\breve{D})\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

5) $T,\ T'\in\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_4\}$, $T\cap T'=\varnothing$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ ve $T\cup T'\subseteq Z_3$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times(T\cup T')\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\varphi(Z_2)$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(Z_1)$, $Y_2^\alpha\cap\varphi(Z_2)\neq\varnothing$ ve $Y_1^\alpha\cap\varphi(Z_1)\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

6) $Z,\ Z'\in\{Z_8,Z_7\}$, $Z\neq Z'$, $T,\ T'\in\{Z_2,Z_1\}$ ve $T\neq T'$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)\cup\left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha\times(Z\cup Z')\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha\supseteq\varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha\supseteq\varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(Z_3)$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_3^\alpha\cap\varphi(Z_3)\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

7) $Z,\ Z',\ T\in D$, $Z\cap T=\varnothing$, $Z'\subset T$, $Z\cup Z'\cup T=Z_3$, $Z\setminus Z'\neq\varnothing$ ve $Z'\setminus Z\neq\varnothing$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi $\alpha=\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)\cup\left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha\times(Z\cup Z')\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha\supseteq\varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha\supseteq\varphi(Z')$, $Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$ ve $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

8) $Z,\ Z'\in\{Z_8,Z_7\}$, $Z\neq Z'$, $T\in\{Z_6,Z_4\}$, $Z'\subset T$, $Z\cap T=\varnothing$, $Z''\in\{Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $Z\cup Z'\cup T=Z_3$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)\cup\left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha\times(Z\cup Z')\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_{Z''}^\alpha\times Z''\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha\supseteq\varphi(Z)$,

$Y_{Z'}^{\alpha} \supseteq \varphi(Z')$, $Y_{Z'}^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^{\alpha} \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_{Z''}^{\alpha} \cap \varphi(Z'') \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

9) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z'' \in \{Z_2, Z_1\}$ ve $Z \cup Z' \cup T = Z_3$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi

$$\alpha = \left(Y_Z^{\alpha} \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^{\alpha} \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z \cup Z'}^{\alpha} \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^{\alpha} \times T\right) \cup \left(Y_3^{\alpha} \times Z_3\right) \cup \left(Y_{Z''}^{\alpha} \times Z''\right)$$

$\cup \left(Y_0^{\alpha} \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^{\alpha} \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^{\alpha} \supseteq \varphi(Z')$, $Y_{Z'}^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^{\alpha} \cup Y_{Z'}^{\alpha} \cup Y_{Z \cup Z'}^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_{Z''}^{\alpha} \supseteq \varphi(Z'')$, $Y_T^{\alpha} \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_{Z''}^{\alpha} \cap \varphi(Z'') \neq \varnothing$ ve $Y_0^{\alpha} \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

10) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$ ve $T \cap Z = \varnothing$ olmak üzere

$$\alpha = \left(Y_Z^{\alpha} \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^{\alpha} \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z \cup Z'}^{\alpha} \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^{\alpha} \times T\right) \cup \left(Y_3^{\alpha} \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^{\alpha} \times Z_2\right)$$

$\cup \left(Y_1^{\alpha} \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^{\alpha} \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, $Y_Z^{\alpha} \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^{\alpha} \supseteq \varphi(Z')$, $Y_{Z'}^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^{\alpha} \cup Y_{Z'}^{\alpha} \cup Y_{Z \cup Z'}^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_2^{\alpha} \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_Z^{\alpha} \cup Y_{Z'}^{\alpha} \cup Y_{Z \cup Z'}^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \cup Y_3^{\alpha} \cup Y_1^{\alpha} \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_T^{\alpha} \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_2^{\alpha} \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing$ ve $Y_1^{\alpha} \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı regüler olsun. Bu durumda $B_X(D)$ kümesinin tanımından $\alpha = \bigcup_{x \in X} \left(\{x\} \times f(x)\right)$ olacak şekilde $f : X \to D$ dönüşümü vardır. Buradan $f(x) \in \left\{ Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\}$ olur. Ayrıca her $T \in D$ için Y_T^{α} kümelerinin tanımından dolayı

$$\alpha = \bigcup_{T \in D'} \left(Y_T^{\alpha} \times T\right)$$

olacak şekilde D nin bir D' alt yarılatisi vardır. Buradan

$$V(D, \alpha) = D' = V(D', \alpha)$$

olur. Üstelik Teorem 1.1.17 den $V(D, \alpha)$, D nin XI-alt yarılatisidir. O halde D', D nin XI -alt yarılatisi olur. Yani D', $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ koşulları altında D nin Lemma 3.3.1 de verilen XI-alt yarılatislerini tarar. O halde α regüler elemanının quasinormal gösterim (1)-(10) da verilen quasinormal gösterimlerden biri gibidir.

Teorem 4.2.1 de uygulanan adımlar benzer şekilde uygulandığında (1)-(6) da verilen biçimlerde quasinormal gösterimi olan α ikili bağıntısının regüler olması için gerek ve yeter koşulun φ , tam α -izomorfizmasının verilen koşulları sağlaması gerektiği elde edilir.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (7) deki gibi yani $Z,\ Z',\ T \in D$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z' \subset T$, $Z \cup Z' \cup T = Z_3$, $Z \setminus Z' \neq \varnothing$ ve $Z' \setminus Z \neq \varnothing$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right)$ biçiminde olsun. $Q_{18} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3\}$ dersek Lemma 3.3.1 den dolayı Q_{18}, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_{18}$ olur. Teorem 1.1.64 den dolayı α , $B_X(D)$ nin regüler elemanıdır ancak ve ancak $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α - izomorfizması $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$ ve $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (8) deki gibi yani $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z'' \in \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $Z \cup Z' \cup T = Z_3$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right)$ $\cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_{Z''}^\alpha \times Z''\right)$ biçiminde olsun. $Q_{19} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z''\}$ dersek Lemma 3.3.1 den dolayı Q_{19}, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_{19}$ olur. Teorem 1.1.64 den dolayı α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X - yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizmasının $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_{Z''}^\alpha \cap \varphi(Z'') \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (9) deki gibi yani $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z'' \in \{Z_2, Z_1\}$ ve $Z \cup Z' \cup T = Z_3$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right)$ $\cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_{Z''}^\alpha \times Z''\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde olsun. $Q_{20} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z'', \breve{D}\}$ dersek Lemma 3.3.1 den dolayı Q_{20}, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_{20}$ olur. Teorem 1.1.64 den dolayı α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizmasının $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$ ve $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır.

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (10) daki gibi yani $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$ ve $T \cap Z = \varnothing$ olmak üzere $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times (Z \cup Z')) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2)$ $\cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ biçiminde olsun. $Q_{21} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ dersek Lemma 3.3.1 den dolayı Q_{21}, D nin XI -alt yarılatisi ve $V(D,\alpha) = Q_{21}$ olur. Teorem 3.3.2 den α nın $B_X(D)$ nin regüler elemanı olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizmasının $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$ koşullarını sağlamasıdır.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.3.1-(1) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{12} = \{T, T', T \cup T'\}$ olduğundan

$$Q_{12}\vartheta_{XI} = \{\{Z_8, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_5\}\}$$

olur. Dolayısıyla $|\Omega(Q_{12})| = 2$ bulunur. Ayrıca Q_{12} nin tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{12}} = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' \\ T & T' & T \cup T' \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' \\ T' & T & T \cup T' \end{pmatrix}$$

olduğundan $|\Phi(Q_{12})| = 2$ bulunur. Ayrıca

$$D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5\},\ D_2' = \{Z_7, Z_8, Z_5\},\ D_3' = \{Z_8, Z_4, Z_3\},\ D_4' = \{Z_4, Z_8, Z_3\}$$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_{12}) = \bigcup_{i=1}^{4} R(D_i')$$

olur. O halde X sonlu iken $R^*(Q_{12})$ nin eleman sayısını bulalım.

Lemma 4.3.2 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*(Q_{12})\right| = 2 \cdot 2 \cdot 3^{|X \setminus Z_5|}$$

olur.

İspat: $R^*(Q_{12}) = \bigcup_{i=1}^{4} R(D_i')$ olduğunu biliyoruz. Birleşimde yer alan kümeler arasındaki ilişkileri ve arakesitlerini inceleyelim.

$\alpha \in R(D_3')$ olsun. O zaman D_3' le Q_{12} tam α -izomorf olduklarından Teorem 4.3.1-(1) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi

$$\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right)$$

biçiminde olur ve

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_8 \text{ ve } Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4$$

özellikleri sağlanır. Ayrıca $Z_7 \subseteq Z_4$ olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in R\left(D_1'\right)$ olur. Buradan $R(D_3') \subseteq R(D_1')$ olur.

Benzer olarak $R(D_4') \subseteq R(D_2')$ olduğu elde edilir. Bu durumda

$$R(Q_{12}) = R(D_1') \cup R(D_2')$$

olur. Şimdi $R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') \Rightarrow & Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, \\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8, \\ \Rightarrow & Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \end{aligned}$$

olur. Bu da α nın quasinormal gösterimindeki Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ olarak elde edilir. Böylece

$$\left|R^*(Q_{12})\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right|$$

elde edilir. D_1' ile D_2' yarılatisleri arasında tam otomorfizma var olduğundan $\left|R(D_1')\right| = \left|R(D_2')\right|$ olur. Teorem 1.1.58 den

$$\left|R^*(Q_{12})\right| = 2 \cdot 2 \cdot 3^{|X \setminus Z_5|}$$

bulunur.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.3.1-(2) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$ olur. Buradan

$$Q_{13}\vartheta_{XI} = \{\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}\}$$

olduğundan $|\Omega(Q_{13})| = 7$ bulunur. Ayrıca Q_{13} ün tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{13}} = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' & Z \\ T & T' & T \cup T' & Z \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' & Z \\ T' & T & T \cup T' & Z \end{pmatrix}$$

olduğundan $|\Phi(Q_{13})| = 2$ bulunur. Bunun yanında

$D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}$, $D_2' = \{Z_7, Z_8, Z_5, \breve{D}\}$, $D_3' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}$, $D_4' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3\}$, $D_5' = \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1\}$, $D_6' = \{Z_4, Z_8, Z_3, Z_1\}$, $D_7' = \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2\}$, $D_8' = \{Z_4, Z_8, Z_3, Z_2\}$, $D_9' = \{Z_8, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$, $D_{10}' = \{Z_4, Z_8, Z_3, \breve{D}\}$, $D_{11}' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}$, $D_{12}' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_1\}$, $D_{13}' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}$, $D_{14}' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_2\}$ ile gösterirsek

$$R^*(Q_{13}) = \bigcup_{i=1}^{14} R(D_i')$$

olur.

Lemma 4.3.3 X sonlu olsun. O zaman

$$|R^*(Q_{13})| = 2 \cdot 7 \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: $Z_8 \subseteq Y$ ve $Z_7 \subseteq Y'$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y \cup Y', Y_1\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_{13} ile D' tam α-izomorf olduklarıdan Teorem 4.3.1-(2) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\alpha \times Z)$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_8 \subseteq Y$, $Z_7 \subseteq Y'$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri de sağlanır. O halde $D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D_1')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D_1')$ elde edilir.

Benzer olarak $Z_7 \subseteq Y$ ve $Z_8 \subseteq Y'$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y \cup Y', Y_1\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_{13} ile D' α -izomorf olduklarından Teorem 4.3.1-(2) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\alpha \times Z)$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_7 \subseteq Y$, $Z_8 \subseteq Y'$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri de sağlanır. O halde $D_2' = \{Z_7, Z_8, Z_5, \breve{D}\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D_2')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D_2')$ olarak bulunur. Sonuç olarak $R(D_3') \subseteq R(D_1')$, $R(D_4') \subseteq R(D_1')$, $R(D_5') \subseteq R(D_1')$, $R(D_7') \subseteq R(D_1')$, $R(D_9') \subseteq R(D_1')$, $R(D_{11}') \subseteq R(D_1')$, $R(D_{13}') \subseteq R(D_1')$, $R(D_4') \subseteq R(D_2')$, $R(D_6') \subseteq R(D_2')$, $R(D_8') \subseteq R(D_2')$, $R(D_{10}') \subseteq R(D_2')$, $R(D_{12}') \subseteq R(D_2')$ ve $R(D_{14}') \subseteq R(D_2')$ bulunur. Bu durumda

$$R^*(Q_{13}) = R(D_1') \cup R(D_2')$$

olur. Şimdi $R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ alalım. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') &\Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,\\ &\quad Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing\\ &\Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Z_5 \neq \varnothing\end{aligned}$$

olur ki buda α nın quasinormal gösteriminde ki Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ dir. O halde $|R^*(Q_{13})| = |R(D_1')| + |R(D_2')|$ bulunur. D_1' ile D_2' arasında tam otomorfizma var olduğundan $|R(D_1')| = |R(D_2')|$ dır. Teorem 1.1.58 den

$$|R^*(Q_{13})| = 2 \cdot 7 \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanı Teorem 4.3.1-(3) koşulunu sağlasın. Bu durumda $T, T', Z, Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ olmak üzere $V(D, \alpha) = Q_{14} = \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ olduğundan

$$Q_{14}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\right\}, \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\right\}\right\}$$

olur. Böylece $\left|\Omega\left(Q_{14}\right)\right| = 7$ bulunur. Ayrıca Q_{14} nin tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{14}} = \begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z & Z' \\ T & T' & T\cup T' & Z & Z' \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z & Z' \\ T' & T & T\cup T' & Z & Z' \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{14}\right)\right| = 2$ olur. Ayrıca

$$D_1' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_2' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_3' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\right\},$$

$$D_4' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_5' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\right\},\ D_6' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3, \breve{D}\right\},$$

$$D_7' = \left\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_8' = \left\{Z_4, Z_8, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_9' = \left\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},$$

$$D_{10}' = \left\{Z_4, Z_8, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_{11}' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\right\},\ D_{12}' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3, Z_2\right\},$$

$$D_{13}' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\right\},\ D_{14}' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3, Z_1\right\}$$

ile gösterirsek

$$R^*\left(Q_{14}\right) = \bigcup_{i=1}^{14} R\left(D_i'\right)$$

olur.

Lemma 4.3.4 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right| = \left|R\left(D_1'\right)\right| + \left|R\left(D_2'\right)\right| + \left|R\left(D_3'\right)\right| + \left|R\left(D_4'\right)\right| + \left|R\left(D_5'\right)\right| + \left|R\left(D_6'\right)\right|$$
$$-\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right| - \left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right| - \left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right| - \left|R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right|$$

olur.

İspat: $Z_8 \subseteq Y$, $Z_7 \subseteq Y'$ ve $Y_1 \in \left\{Z_3, Z_2, Z_1\right\}$ olmak üzere $D' = \left\{Y, Y', Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\right\} \in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R\left(D'\right)$ olsun. Bu durumda Q_{14} ile D' tam α -izomorf olduklarından Teorem 4.3.1-(3) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ $\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T\cup T'\right)\right)\cup\left(Y_Z^\alpha \times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right)$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_1$, $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_8 \subseteq Y$, $Z_7 \subseteq Y'$ olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$ olur. O halde $D'' = \left\{Z_8, Z_7, Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\right\}$

dersek $D''=\{Z_8,Z_7,Y\cup Y',Y_1,\breve{D}\}\in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha\in R(D'')$ olur. Buradan $R(D')\subseteq R(D'')$ elde edilir.

Benzer olarak $Z_7\subseteq Y$, $Z_8\subseteq Y'$ ve $Y_1\in\{Z_3,Z_2,Z_1\}$ olmak üzere $D'=\{Y,Y',Y\cup Y',Y_1,\breve{D}\}\in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha\in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_{14} ile D' tam α-izomorf olduklarından Teorem 4.3.1-(3) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha=(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_{T\cup T'}^\alpha\times(T\cup T'))\cup(Y_Z^\alpha\times Z)\cup(Y_{Z'}^\alpha\times Z')$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha\supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq Y'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Y_1$, $Y_Z^\alpha\cap Y_1\neq\varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_7\subseteq Y$, $Z_8\subseteq Y'$ olduğundan $Y_T^\alpha\supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_7$ olur. O halde $D''=\{Z_7,Z_8,Y\cup Y',Y_1,\breve{D}\}$ dersek $D''=\{Z_7,Z_8,Y\cup Y',Y_1,\breve{D}\}\in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha\in R(D'')$ olur. Buradan $R(D')\subseteq R(D'')$ elde edilir. Sonuç olarak

$$R(D_7')\subseteq R(D_1'),\ R(D_8')\subseteq R(D_2'),\ R(D_9')\subseteq R(D_3'),\ R(D_{10}')\subseteq R(D_4'),$$
$$R(D_{11}')\subseteq R(D_5'),\ R(D_{12}')\subseteq R(D_6'),\ R(D_{13}')\subseteq R(D_5'),\ R(D_{14}')\subseteq R(D_6')$$

olarak bulunur.

Böylece

$$R^*(Q_{14})=\bigcup_{i=1}^{6}R(D_i')$$

olur. Şimdi bu kümelerden arakesitleri boş küme olanları belirleyelim.

$R(D_1')\cap R(D_2')\neq\varnothing$ olduğunu varsayalım. $\alpha\in R(D_1')\cap R(D_2')$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha\in R(D_1')\cap R(D_2')\Rightarrow\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Z_2,\\ & Y_Z^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,\\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Z_2,\\ & Y_Z^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing\\ \Rightarrow\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha\cap Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5\cap Z_5=Z_5\neq\varnothing\end{aligned}$$

olur. Buda Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. Dolayısıyla $R(D_1')\cap R(D_2')=\varnothing$ olur. Benzer olarak

$$R(D_1')\cap R(D_3')=\varnothing,\ R(D_1')\cap R(D_4')=\varnothing,R(D_1')\cap R(D_6')=\varnothing,$$
$$R(D_2')\cap R(D_3')=\varnothing,\ R(D_2')\cap R(D_4')=\varnothing,R(D_2')\cap R(D_5')=\varnothing,$$
$$R(D_3')\cap R(D_4')=\varnothing,\ R(D_3')\cap R(D_6')=\varnothing,R(D_4')\cap R(D_5')=\varnothing,$$

$$R(D_5')\cap R(D_6')=\varnothing$$

oldukları görülür. Buradan

$$\left|R^*(Q_{14})\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|+\left|R(D_5')\right|+\left|R(D_6')\right|$$

$$-\left|R(D_1')\cap R(D_5')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_6')\right|-\left|R(D_3')\cap R(D_5')\right|-\left|R(D_4')\cap R(D_6')\right|$$

olarak bulunur.■

Lemma 4.3.5 $Y=Y_1$, $Y_1'=Y'$ ve $Y_2'\supseteq Y_2$ olmak üzere $D'=\{Y,Y',Y\cup Y',Y_2,\breve{D}\}$, $D''=\{Y_1,Y_1',Y_1\cup Y_1',Y_2',\breve{D}\}\in\{D_1',D_2',...,D_6'\}$ ve $D'\neq D''$ olsun. Ayrıca $\alpha\in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi T, T', Z, $Z'\in D$, $T\cap T'=\varnothing$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ ve $T\cup T'\subset Z\subset Z'$ olmak üzere $\alpha=(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_{T\cup T'}^\alpha\times(T\cup T'))\cup(Y_Z^\alpha\times Z)\cup(Y_{Z'}^\alpha\times Z')$ biçiminde olsun. O zaman $\alpha\in R(D')\cap R(D'')$ olması için gerek ve yeter koşul

$$Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Y_1\cup Y_1',\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Y_2',$$

$$Y_Z^\alpha\cap Y_2\neq\varnothing \text{ ve } Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$$

olmasıdır.

İspat: $\alpha\in R(D')\cap R(D'')$ olsun. Bu durumda Teorem 4.3.1-(3) den

$$\begin{aligned}\alpha\in R(D')\cap R(D'')&\Leftrightarrow \alpha\in R(D') \text{ ve } \alpha\in R(D'')\\
&\Leftrightarrow Y_T^\alpha\supseteq Y,\ Y_{T'}^\alpha\supseteq Y',\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha\cap Y_2\neq\varnothing,\\
&\quad\ Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing \text{ ve}\\
&\quad\ Y_T^\alpha\supseteq Y_1,\ Y_{T'}^\alpha\supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Y_2',\ Y_Z^\alpha\cap Y_2'\neq\varnothing,\\
&\quad\ Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing\\
&\Leftrightarrow Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Y_1\cup Y_1',\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Y_2',\ Y_Z^\alpha\cap Y_2\neq\varnothing,\\
&\quad\ Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing\end{aligned}$$

olarak bulunur.■

Lemma 4.3.6 $Y=Y_1$, $Y_1'=Y'$ ve $Y_2'\supseteq Y_2$ olmak üzere $D'=\{Y,Y',Y\cup Y',Y_2,\breve{D}\}$ ve $D''=\{Y_1,Y_1',Y_1\cup Y_1',Y_2',\breve{D}\}\in\{D_1',D_2',...,D_6'\}$, $D'\neq D''$ ve X sonlu olsun. O halde

$$\left|R(D')\cap R(D'')\right|=7\cdot 4^{\left|Y_2'\setminus(Y_2\cup Y_1\cup Y_1')\right|}\left(4^{\left|Y_2\setminus(Y_1\cup Y_1')\right|}-3^{\left|Y_2\setminus(Y_1\cup Y_1')\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Y_2'\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Y_2'\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: Lemma 4.2.6. da uygulanan adımlar benzer şekilde uygulandığında

$$\left|R(D')\cap R(D'')\right| = 7\cdot 4^{\left|Y_2'\setminus(Y_2\cup Y_1\cup Y_1')\right|}\left(4^{\left|Y_2\setminus(Y_1\cup Y_1')\right|}-3^{\left|Y_2\setminus(Y_1\cup Y_1')\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Y_2'\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Y_2'\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak bulunur.■

Lemma 4.3.7 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R(D_1')\cap R(D_5')\right| = 7\cdot 4^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R(D_2')\cap R(D_6')\right| = 7\cdot 4^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R(D_3')\cap R(D_5')\right| = 7\cdot 4^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R(D_4')\cap R(D_6')\right| = 7\cdot 4^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: $D_1' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\right\}$, $D_2' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_2, \breve{D}\right\}$, $D_3' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\right\}$, $D_4' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_1, \breve{D}\right\}$, $D_5' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\right\}$ ve $D_6' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3, \breve{D}\right\}$ XI -alt yarılatisleri için Lemma 4.3.6 uygulandığında sonuç açıktır.■

Teorem 4.3.8 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_{14})\right| &= 2\cdot 7\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\\ &+2\cdot 7\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\\ &+2\cdot 7\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\\ &-2\cdot 7\cdot 4^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\\ &-2\cdot 7\cdot 4^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Lemma 4.3.4, Teorem 1.1.58 ve Lemma 4.3.7 den istenen elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.3.1-(4) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{15} = \left\{Z, Z', Z_5, Z_3, T, \breve{D}\right\}$ olduğundan

$$Q_{15}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}\right\}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\left|\Omega\left(Q_{15}\right)\right| = 2$ olur. Ayrıca Q_{15} in tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{15}} = \begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D} \\ Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D} \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D} \\ Z' & Z & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D} \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{15}\right)\right| = 2$ olur. Öten yandan

$$D_1' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_2' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\},$$

$$D_3' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_4' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$$

ile gösterilirse

$$R^*\left(Q_{15}\right) = \bigcup_{i=1}^{4} R\left(D_i'\right)$$

olarak bulunur.

Lemma 4.3.9 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right| = 2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|} - 4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|} - 5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|} +$$
$$2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|} - 3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|} - 4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|} - 5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{15}\right) = \bigcup_{i=1}^{4} R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan XI-alt yarılatislerin arakesitlerini inceleyelim.

$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right) \neq \varnothing$ ve $\alpha \in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\alpha \in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right) \Rightarrow\ & Y_Z^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3, \\
& Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing, \\
& Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing, \\
& Y_Z^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3, \\
& Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing, \\
& Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \\
\Rightarrow\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \\
& Y_Z^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_Z^\alpha \cap Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Z_5 = Z_5 \neq \varnothing
\end{aligned}$$

olur. Bu da Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right) = \varnothing$ olur. Benzer olarak

$$R(D_1')\cap R(D_3')=\varnothing,\ R(D_1')\cap R(D_4')=\varnothing,\ R(D_2')\cap R(D_3')=\varnothing,$$

$$R(D_2')\cap R(D_4')=\varnothing \text{ ve } R(D_3')\cap R(D_4')=\varnothing$$

oldukları görülür. O halde

$$\left|R(Q_{15})\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|$$

olarak bulunur.

Ayrıca D_1' ile D_2' ve D_3' ile D_4' yarılatisleri arasında tam otomorfizma var olduğundan $\left|R(D_1')\right|=\left|R(D_2')\right|$ ve $\left|R(D_3')\right|=\left|R(D_4')\right|$ olur. Teorem 1.1.58 kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_{15})\right|=&\,2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha\in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.3.1-(5) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha)=Q_{16}=\{T,T',T\cup T',Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ olduğundan

$$Q_{16}\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\right\}$$

olarak bulunur. Böylece $\left|\Omega(Q_{16})\right|=2$ olur. Ayrıca Q_{16} nın tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{16}}=\begin{pmatrix}T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix}T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ T' & T & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\end{pmatrix}$$

$$g=\begin{pmatrix}T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ T & T' & T\cup T' & Z_1 & Z_2 & \breve{D}\end{pmatrix} \text{ ve } h=\begin{pmatrix}T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ T & T' & T\cup T' & Z_1 & Z_2 & \breve{D}\end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi(Q_{16})\right|=4$ bulunur. Ayrıca

$$D_1'=\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ D_2'=\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1,Z_2,\breve{D}\},D_3'=\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$$

$$D_4'=\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_1,Z_2,\breve{D}\},\ D_5'=\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ D_6'=\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\},$$

$$D_7'=\{Z_4,Z_8,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ D_8'=\{Z_4,Z_8,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\}$$

ile gösterilirse

$$R^*(Q_{16})=\bigcup_{i=1}^{8}R(D_i')$$

olarak bulunur.

Lemma 4.3.10 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right| = 2\cdot 4\cdot 3^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{16}\right)=\bigcup_{i=1}^{12}R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan kümelerden birbirini kapsayanları ve arakesitleri boş küme olanları belirleyelim. $\alpha\in R\left(D_5'\right)$ olsun. Bu durumda

$$\alpha\in R\left(D_5'\right)\Rightarrow Y_T^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_4,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq Z_2,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq Z_1,$$
$$Y_2^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_1^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing$$

olur. $Z_4\supset Z_7$ olduğundan $Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_7$ elde edilir. Böylece $\alpha\in R\left(D_1'\right)$ olur. O halde $R\left(D_5'\right)\subseteq R\left(D_1'\right)$ olarak elde edilir. Benzer olarak $R\left(D_6'\right)\subseteq R\left(D_2'\right)$, $R\left(D_7'\right)\subseteq R\left(D_3'\right)$, $R\left(D_8'\right)\subseteq R\left(D_4'\right)$ oldukları görülür. O halde

$$R^*\left(Q_{16}\right)=\bigcup_{i=1}^{4}R\left(D_i'\right)$$

olur.

D_2', D_3' ve D_4' yarılatisleri D_1' yarılatisi arasında tam otomorfizma var olduğundan

$$\left|R\left(D_1'\right)\right|=\left|R\left(D_2'\right)\right|=\left|R\left(D_3'\right)\right|=\left|R\left(D_4'\right)\right|$$

olur. O halde Teorem 1.1.70 den dolayı

$$\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right| = 2\cdot 4\cdot 3^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak bulunur.■

$\alpha\in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının Teorem 4.3.1-(6) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V\left(D,\alpha\right)=Q_{17}=\left\{Z,Z',Z_5,Z_3,T,T',\breve{D}\right\}$ olduğundan

$$Q_{17}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

olarak bulunur. Böylece $\left|\Omega\left(Q_{17}\right)\right|=1$ olur. Ayrıca Q_{17} nin otomorfizmleri

$$id_{Q_{17}}=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D}\\ Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D}\end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D}\\ Z' & Z & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D}\end{pmatrix}$$

$$g=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D}\\ Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T' & T & \breve{D}\end{pmatrix}\text{ ve } h=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D}\\ Z' & Z & Z_5 & Z_3 & T' & T & \breve{D}\end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{17}\right)\right| = 4$ olur.

Lemma 4.3.11 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{17}\right)\right| = 4 \cdot 4^{\left|(Z_2 \cap Z_1)\setminus Z_3\right|} \cdot \left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|} - 3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|} - 4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|} - 4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right) \cdot 7^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: Q_{17} ile $D_1' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ tam α-izomorf olduklarından Teorem 3.2.7 den

$$\left|R^*\left(Q_{17}\right)\right| = 4 \cdot 1 \cdot 4^{\left|(Z_2 \cap Z_1)\setminus Z_3\right|} \cdot \left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|} - 3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|} - 4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|} - 4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right) \cdot 7^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}$$

olarak bulunur.■

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının Teorem 4.3.1-(7) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V\left(D,\alpha\right) = Q_{18} = \left\{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3\right\}$ olduğundan

$$Q_{18}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3\right\}\right\}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\left|\Omega\left(Q_{18}\right)\right| = 1$ olur. Ayrıca Q_{18} in tam otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{18}\right)\right| = 1$ olur. O halde $Q_{18}\vartheta_{XI}$ ın elemanlarını $D_1' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3\right\}$ ile gösterirsek

$$R^*\left(Q_{18}\right) = R\left(D_1'\right)$$

olarak bulunur.

Lemma 4.3.12 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{18}\right)\right| = \left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|} - 1\right) \cdot 5^{\left|X\setminus Z_3\right|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{18}\right) = R\left(D_1'\right)$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\left|R\left(Q_{18}\right)\right| = \left|R\left(D_1'\right)\right|$$

olur. Teorem 1.1.66 dan

$$\left|R^*\left(Q_{18}\right)\right| = 1 \cdot 1 \cdot \left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|} - 1\right) \cdot 5^{\left|X\setminus Z_3\right|}$$

olarak bulunur.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.3.1-(8) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{19} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z''\}$ olduğundan

$$Q_{19}\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}\right\}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $|\Omega(Q_{19})| = 3$ olur. Bunun yanında Q_{19} un otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $|\Phi(Q_{19})| = 1$ olur. Ayrıca

$$D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\},\ D_2' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\},\ D_3' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}$$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_{19}) = \bigcup_{i=1}^{3} R(D_i')$$

olur.

Lemma 4.3.13 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*(Q_{19})\right| = 3 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: $R^*(Q_{19}) = \bigcup_{i=1}^{3} R(D_i')$ olduğundan birleşimde yer alan kümelerin ara kesitlerini inceleyelim. $\alpha \in R(D_2')$ alalım. Q_{19} ile D_3' yarılatisleri tam α-izomorf olduklarından $Y_Z^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_4,\ Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_{Z''}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Buradan $Z_1 \subseteq \breve{D}$ olduğundan $Y_{Z''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ olur. O halde $\alpha \in R(D_1')$ olur. Dolayısıyla $R(D_2') \subseteq R(D_1')$ olarak bulunur. Benzer olarak $R(D_3') \subseteq R(D_1')$ olduğu görülür. Bu durumda

$$R^*(Q_{19}) = R(D_1')$$

olur. Böylece

$$\left|R^*(Q_{19})\right| = \left|R(D_1')\right|$$

bulunur. Teorem 1.1.66 dan

$$\left|R^*(Q_{19})\right| = 3 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.3.1-(9) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha)=Q_{20}=\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z'',\breve{D}\}$ olduğundan

$$Q_{20}\vartheta_{XI}=\{\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}\}$$

olur. Dolayısıyla $|\Omega(Q_{20})|=2$ bulunur. Bunun yanında Q_{20} nin otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $|\Phi(Q_{20})|=1$ olur. Ayrıca

$$D_1'=\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\ D_2'=\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_{20})=R(D_1')\cup R(D_2')$$

olur.

Lemma 4.3.14 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}|R^*(Q_{20})|&=4\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&\quad 4\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}+\end{aligned}$$

olur.

İspat: $R^*(Q_{20})=\bigcup_{i=1}^{4}R(D_i')$ olduğundan birleşimde yer alan kümelerin ara kesitlerini inceleyelim.

$R(D_1')\cap R(D_2')\neq\varnothing$ olsun. O zaman $\alpha\in R(D_1')\cap R(D_2')$ vardır. Buradan $\alpha\in R(D_1')$ ve $\alpha\in R(D_2')$ olur. $\alpha\in R(D_1')$ olduğundan $Y_Z^\alpha\supseteq Z_8$, $Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_7$, $Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_{Z''}^\alpha\supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing$ ve $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$ koşulları sağlanır. Aynı zamanda $\alpha\in R(D_2')$ olduğundan $Y_Z^\alpha\supseteq Z_8$, $Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_7$, $Y_{Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_4$ $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_{Z''}^\alpha\supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing$ ve $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$ koşulları da sağlanır. O halde $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_{Z''}^\alpha\supseteq\breve{D}$ ve $\left(Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_{Z''}^\alpha\right)\cap Y_0^\alpha\supseteq\breve{D}\cap Y_0^\alpha\neq\varnothing$ elde edilir. Bu ise α nın quasinormal gösteriminde Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1')\cap R(D_2')=\varnothing$ olur. Sonuç olarak

$$|R^*(Q_{20})|=|R(D_1')|+|R(D_2')|$$

olur. Teorem 1.1.66 dan

$$\left|R^*\left(Q_{20}\right)\right| = 4\cdot 1\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$4\cdot 1\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}+$$

olarak elde edilir.■

$\alpha\in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının Teorem 4.3.1-(10) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V\left(D,\alpha\right)=Q_{21}=\left\{Z,Z',Z\cup Z',T,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, olduğundan

$$Q_{21}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

olur. Dolayısıyla $\left|\Omega\left(Q_{21}\right)\right|=1$ bulunur. Ayrıca Q_{21} in otomorfizmleri

$$id_{Q_{21}}=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z\cup Z' & T & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ Z & Z' & Z\cup Z' & T & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\end{pmatrix} \text{ ve } h=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z\cup Z' & T & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ Z & Z' & Z\cup Z' & T & Z_3 & Z_1 & Z_2 & \breve{D}\end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{21}\right)\right|=2$ olur. Ayrıca

$$D_1'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_2'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\right\},$$

ile gösterirsek,

$$R^*\left(Q_{21}\right)=R\left(D_1'\right)\cup R\left(D_2'\right)$$

olur.

Lemma 4.3.15 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{21}\right)\right|=2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 8^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{21}\right)=R\left(D_1'\right)\cup R\left(D_2'\right)$ olduğundan

$$\left|R^*\left(Q_{21}\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|-\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)\right|$$

bulunur. Ayrıca D_1' ile D_2' tam izomorf olduklarından

$$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)=\varnothing \text{ ve } \left|R\left(D_1'\right)\right|=\left|R\left(D_2'\right)\right|$$

olur. O halde Teorem 3.3.7 den

$$\left|R^*\left(Q_{21}\right)\right|=2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 8^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

Teorem 4.3.16 X sonlu bir küme olsun. D birleşimlerin tam X-yarılatisi ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarı grubu $B_X(D)$ nin $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ koşulları altında regüler elemanlarınının sayısı

$$|R| = \sum_{i=1}^{21} \left| R^*(Q_i) \right|$$

olur.

İspat: X sonlu olsun. D X-yarılatisi ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarı grubu $B_X(D)$ nin, $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$ koşulları altında regüler elemanlarınının sayısının Teorem 1.1.30 dan

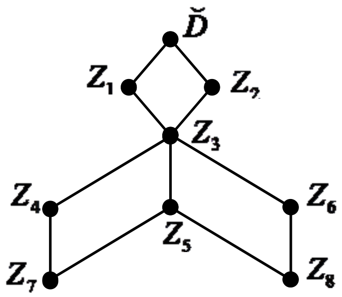
$$|R| = \sum_{D' \in \Sigma_{XI}} \left| R(D') \right| = \sum_{i=1}^{21} \left| R^*(Q_i) \right|$$

olarak bulunur.■

Örnek 4.3.17 $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir aile

$D = \{\{4\},\{3,6\},\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{3,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$

olsun. D kümesinin elemanlarını $\breve{D} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $Z_1 = \{2,3,4,5,6\}$, $Z_2 = \{1,3,4,5,6\}$, $Z_3 = \{3,4,5,6\}$, $Z_4 = \{3,5,6\}$, $Z_5 = \{3,4,6\}$, $Z_6 = \{3,4,5\}$, $Z_7 = \{3,6\}$, $Z_8 = \{4\}$ ile gösterirsek D nin diyagramı yandaki gibidir. D nin her alt kümesinin kapsama bağıntısına göre bir en küçük üst sınırı olduğundan D kümelerdeki kapsama bağıntısı ile bir üst yarılatisdir. Ayrıca D kümelerdeki birleşme işlemine göre kapalı olduğundan tam X-yarılatisdir ve en büyük elemanı $\breve{D}$ olur. Öte yandan



$$Z_8 \cap Z_7 = \{4\} \cap \{3,6\} = \varnothing,$$

$$Z_8 \cap Z_4 = \{4\} \cap \{3,5,6\} = \varnothing,$$

$$Z_7 \cap Z_6 = \{3,6\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}$$

olduğundan Teorem 3.3.19 dan $B_X(D)$ nin idempotent elemanların sayısı, $\left| I^*(Q_1) \right| = 9$, $\left| I^*(Q_2) \right| = 316$, $\left| I^*(Q_3) \right| = 671$, $\left| I^*(Q_4) \right| = 226$, $\left| I^*(Q_5) \right| = 16$, $\left| I^*(Q_6) \right| = 38$,

$\left|I^*(Q_7)\right| = 38$, $\left|I^*(Q_8)\right| = 4$, $\left|I^*(Q_9)\right| = 29$, $\left|I^*(Q_{10})\right| = 8$, $\left|I^*(Q_{11})\right| = 2$ ve

$\sum_{i=12}^{21}\left|I^*(Q_i)\right| = 253$ olduğundan $\left|I_D\right| = 1610$ olarak bulunur.

Bunun yanında Teorem 4.3.16 dan $B_X(D)$ nin regüler elemanların sayısı

$$|R| = \sum_{i=1}^{21}\left|R^*(Q_i)\right| = 10559$$

olarak bulunur.

4.4. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ Koşulları Altında Regüler Elemanlar

Bu bölümde birleşimlerin tam X -yarılatisi D ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X(D)$ nin,

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$$

koşulları altında regüler elemanlarının özellikleri ve X kümesinin sonlu olması durumunda regüler elemanlarının sayısı belirlenecektir.

Teorem 4.1.1 de verilen biçimlerde quasinormal gösterime sahip ikili bağıntılar $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ koşulları altında da $B_X(D)$ nin regüler elemanı olur. O halde bunlar dışında quasinormal gösterime sahip olan $B_X(D)$ nin regüler elemanlarını belirleyelim.

Teorem 4.4.1 $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ olsun. Aşağıda verilen biçimlerde quasinormal gösterimlerden birine sahip olan $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının regüler olması için gerek ve yeter koşul $V(D,\alpha)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizmasının verilen koşulları sağlamasıdır.

1) $T, T' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right)$ biçiminde ve φ, tam α -izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$ koşullarını sağlar.

2) $T,\ T',\ Z \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$ ve $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

3) $T,\ T',\ Z,\ Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ için $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right)$ biçiminde ve φ, $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_Z^\alpha \cap \varphi(Z) \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \varphi(Z') \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

4) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $Z \cap Z' = \varnothing$, $Z \cup Z' = Z_5$ ve $T \in \{Z_2, Z_1\}$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi, $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

5) $T,\ T' \in \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4\}$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subseteq Z_3$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

6) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T,\ T' \in \{Z_2, Z_1\}$ ve $T \neq T'$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times \left(Z \cup Z'\right)\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq \varphi(Z_3)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_3^\alpha \cap \varphi(Z_3) \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

7) $Z,\ Z',\ T \in D$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z' \subset T$, $Z \cup Z' \cup T = Z_3$, $Z \setminus Z' \neq \varnothing$ ve $Z' \setminus Z \neq \varnothing$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi

$\alpha=\left(Y_Z^{\alpha}\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^{\alpha}\times Z'\right)\cup\left(Y_{Z\cup Z'}^{\alpha}\times\left(Z\cup Z'\right)\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_3^{\alpha}\times Z_3\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^{\alpha}\supseteq\varphi(Z)$, $Y_{Z'}^{\alpha}\supseteq\varphi(Z')$, $Y_{Z'}^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq\varphi(T)$ ve $Y_T^{\alpha}\cap\varphi(T)\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

8) $Z,\ Z'\in\{Z_8,Z_7\}$, $Z\neq Z'$, $T\in\{Z_6,Z_4\}$, $Z'\subset T$, $Z\cap T=\varnothing$, $Z''\in\{Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $Z\cup Z'\cup T=Z_3$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_Z^{\alpha}\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^{\alpha}\times Z'\right)\cup\left(Y_{Z\cup Z'}^{\alpha}\times\left(Z\cup Z'\right)\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)$ $\cup\left(Y_3^{\alpha}\times Z_3\right)\cup\left(Y_{Z''}^{\alpha}\times Z''\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^{\alpha}\supseteq\varphi(Z)$, $Y_{Z'}^{\alpha}\supseteq\varphi(Z')$, $Y_{Z'}^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^{\alpha}\cap\varphi(T)\neq\varnothing$ ve $Y_{Z''}^{\alpha}\cap\varphi(Z'')\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

9) $Z,\ Z'\in\{Z_8,Z_7\}$, $Z\neq Z'$, $T\in\{Z_6,Z_4\}$, $Z'\subset T$, $Z\cap T=\varnothing$, $Z''\in\{Z_2,Z_1\}$ ve $Z\cup Z'\cup T=Z_3$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi $\alpha=\left(Y_Z^{\alpha}\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^{\alpha}\times Z'\right)\cup\left(Y_{Z\cup Z'}^{\alpha}\times\left(Z\cup Z'\right)\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_3^{\alpha}\times Z_3\right)\cup\left(Y_{Z''}^{\alpha}\times Z''\right)$ $\cup\left(Y_0^{\alpha}\times\breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^{\alpha}\supseteq\varphi(Z)$, $Y_{Z'}^{\alpha}\supseteq\varphi(Z')$, $Y_{Z'}^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq\varphi(T)$, $Y_Z^{\alpha}\cup Y_{Z'}^{\alpha}\cup Y_{Z\cup Z'}^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\cup Y_3^{\alpha}\cup Y_{Z''}^{\alpha}\supseteq\varphi(Z'')$, $Y_T^{\alpha}\cap\varphi(T)\neq\varnothing$, $Y_{Z''}^{\alpha}\cap\varphi(Z'')\neq\varnothing$ ve $Y_0^{\alpha}\cap\varphi(\breve{D})\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

10) $Z,\ Z'\in\{Z_8,Z_7\}$, $Z\neq Z'$, $T\in\{Z_6,Z_4\}$, $Z'\subset T$ ve $T\cap Z=\varnothing$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_Z^{\alpha}\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^{\alpha}\times Z'\right)\cup\left(Y_{Z\cup Z'}^{\alpha}\times\left(Z\cup Z'\right)\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_3^{\alpha}\times Z_3\right)\cup\left(Y_2^{\alpha}\times Z_2\right)$ $\cup\left(Y_1^{\alpha}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\alpha}\times\breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, $Y_Z^{\alpha}\supseteq\varphi(Z)$, $Y_{Z'}^{\alpha}\supseteq\varphi(Z')$, $Y_{Z'}^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq\varphi(T)$, $Y_Z^{\alpha}\cup Y_{Z'}^{\alpha}\cup Y_{Z\cup Z'}^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\cup Y_3^{\alpha}\cup Y_2^{\alpha}\supseteq\varphi(Z_2)$, $Y_Z^{\alpha}\cup Y_{Z'}^{\alpha}\cup Y_{Z\cup Z'}^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\cup Y_3^{\alpha}\cup Y_1^{\alpha}\supseteq\varphi(Z_1)$, $Y_T^{\alpha}\cap\varphi(T)\neq\varnothing$, $Y_2^{\alpha}\cap\varphi(Z_2)\neq\varnothing$ ve $Y_1^{\alpha}\cap\varphi(Z_1)\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

İspat: $\alpha\in B_X(D)$ ikili bağıntısı regüler olsun. Bu durumda $B_X(D)$ kümesinin tanımından $\alpha=\bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right)$ olacak şekilde $f:X\rightarrow D$ dönüşümü vardır. Buradan $f(x)\in\left\{Z_8,\ Z_7,\ Z_6,\ Z_5,\ Z_4,\ Z_3,\ Z_2,\ Z_1,\ \breve{D}\right\}$ olur. Ayrıca her $T\in D$ için Y_T^{α} kümelerinin tanımından dolayı

$$\alpha=\bigcup_{T\in D'}\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)$$

olacak şekilde D nin bir D' alt yarılatisi vardır. Buradan

$$V(D,\alpha) = D' = V(D',\alpha)$$

olur. Üstelik Teorem 1.1.17 den $V(D,\alpha)$, D nin XI-alt yarılatisidir. O halde D', D nin XI -alt yarılatisi olur. Yani D', $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ koşulları altında D nin Lemma 3.4.1 de verilen XI-alt yarılatislerini tarar. O halde α regüler elemanının quasinormal gösterim (1)-(10) da verilen quasinormal gösterimlerden biri gibidir.

Teorem 4.3.1 de uygulanan adımlar benzer şekilde uygulandığında (1)-(10) da verilen biçimlerde quasinormal gösterimi olan α ikili bağıntısının regüler olması için gerek ve yeter koşulun φ, tam α-izomorfizmasının verilen koşulları sağlaması gerektiği elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.4.1-(1) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{12} = \{T, T', T \cup T'\}$ olduğundan

$$Q_{12}\vartheta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_5\}\}$$

olur. Dolayısıyla $|\Omega(Q_{12})| = 2$ bulunur. Ayrıca Q_{12} nin tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{12}} = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' \\ T & T' & T \cup T' \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' \\ T' & T & T \cup T' \end{pmatrix}$$

olduğundan $|\Phi(Q_{12})| = 2$ bulunur. Öte yandan

$$D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5\},\ D_2' = \{Z_7, Z_8, Z_5\},\ D_3' = \{Z_7, Z_6, Z_3\},\ D_4' = \{Z_6, Z_7, Z_3\},$$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_{12}) = \bigcup_{i=1}^{4} R(D_i')$$

olur. O halde X sonlu iken $R^*(Q_{12})$ nin eleman sayısını bulalım.

Lemma 4.4.2 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*(Q_{12})\right| = 2 \cdot 2 \cdot 3^{|X \setminus Z_5|}$$

olur.

İspat: $R^*(Q_{12}) = \bigcup_{i=1}^{4} R(D_i')$ olduğunu biliyoruz. Birleşimde yer alan kümeler arasındaki ilişkileri ve arakesitlerini inceleyelim.

$\alpha \in R(D_4')$ olsun. O zaman D_4' le Q_{12} tam α-izomorf olduklarından Teorem 4.4.1-(1) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi

$$\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T')\right)$$

biçiminde olur ve

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_6 \text{ ve } Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$$

özellikleri sağlanır. Ayrıca $Z_8 \subseteq Z_6$ olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\alpha \in R(D_1')$ olur. Buradan $R(D_4') \subseteq R(D_1')$ olur. Benzer olarak $R(D_3') \subseteq R(D_2')$ olduğu elde edilir. Bu durumda

$$R(Q_{12}) = R(D_1') \cup R(D_2')$$

olur. Şimdi $R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ olsun.

$$\begin{aligned} \alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') \Rightarrow & Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7, \\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8, \\ \Rightarrow & Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \end{aligned}$$

olur. Bu da α nın quasinormal gösterimindeki Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ olarak elde edilir. O halde

$$\left|R^*(Q_{12})\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right|$$

olur. D_1' ile D_2' arasında tam otomorfizma var olduğundan $\left|R(D_1')\right| = \left|R(D_2')\right|$ olur. Teorem 1.1.58 den

$$\left|R^*(Q_{12})\right| = 2 \cdot 2 \cdot 3^{|X \setminus Z_5|}$$

olarak bulunur.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.4.1-(2) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} Q_{13}\vartheta_{XI} = \{ & \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}, \\ & \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}\} \end{aligned}$$

olduğundan $\left|\Omega(Q_{13})\right| = 7$ bulunur. Ayrıca Q_{13} ün tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{13}} = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' & Z \\ T & T' & T \cup T' & Z \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' & Z \\ T' & T & T \cup T' & Z \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{13}\right)\right| = 2$ bulunur. Ayrıca

$$D_1' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\right\},\ D_2' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, \breve{D}\right\},\ D_3' = \left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\right\},$$

$$D_4' = \left\{Z_6, Z_7, Z_3, Z_1\right\},\ D_5' = \left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\right\},\ D_6' = \left\{Z_6, Z_7, Z_3, Z_2\right\},$$

$$D_7' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\right\},\ D_8' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3\right\},\ D_9' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\right\},$$

$$D_{10}' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_1\right\},\ D_{11}' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\right\},\ D_{12}' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_2\right\},$$

$$D_{13}' = \left\{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\right\},\ D_{14}' = \left\{Z_6, Z_7, Z_3, \breve{D}\right\}$$

ile gösterirsek

$$R^*\left(Q_{13}\right) = \bigcup_{i=1}^{14} R\left(D_i'\right)$$

olur.

Lemma 4.4.3 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right| = 2 \cdot 7 \cdot \left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|} - 3^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}\right) \cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: $Z_8 \subseteq Y$ ve $Z_7 \subseteq Y'$ olmak üzere $D' = \left\{Y, Y', Y \cup Y', Y_1\right\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R\left(D'\right)$ olsun. Bu durumda Q_{13} ile D' tam α-izomorf olduklarıdan Teorem 4.4.1-(2) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right)$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_8 \subseteq Y$, $Z_7 \subseteq Y'$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri de sağlanır. O halde $D_1' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\right\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R\left(D_1'\right)$ olur. Buradan $R\left(D'\right) \subseteq R\left(D_1'\right)$ elde edilir.

Benzer olarak $Z_7 \subseteq Y$ ve $Z_8 \subseteq Y'$ olmak üzere $D' = \left\{Y, Y', Y \cup Y', Y_1\right\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R\left(D'\right)$ olsun. Bu durumda Q_{13} ile D' α-izomorf olduklarından Teorem 4.4.1-(2) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right) \cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right)$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_7 \subseteq Y$, $Z_8 \subseteq Y'$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan

$Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri de sağlanır. O halde $D_2{}' = \{Z_7, Z_8, Z_5, \breve{D}\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D_2')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D_2')$ olarak bulunur.

Sonuç olarak

$$R(D_4') \subseteq R(D_1'),\ R(D_6') \subseteq R(D_1'),\ R(D_7') \subseteq R(D_1'),\ R(D_9') \subseteq R(D_1'),$$
$$R(D_{11}') \subseteq R(D_1'),\ R(D_{13}') \subseteq R(D_1'),\ R(D_9') \subseteq R(D_1'),\ R(D_{11}') \subseteq R(D_1'),$$
$$R(D_{14}') \subseteq R(D_1'),\ R(D_3') \subseteq R(D_2'),\ R(D_5') \subseteq R(D_2'),\ R(D_8') \subseteq R(D_2'),$$
$$R(D_{10}') \subseteq R(D_2'),\ R(D_{12}') \subseteq R(D_2'),\ R(D_{14}') \subseteq R(D_2'),\ R(D_{10}') \subseteq R(D_2')$$
$$R(D_{12}') \subseteq R(D_2'),\ R(D_{13}') \subseteq R(D_2')$$

bulunur. Bu durumda $R^*(Q_{13}) = R(D_1') \cup R(D_2')$ olur.

Şimdi $R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. O halde $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned} \alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') &\Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing, \\ &\quad\ Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \\ &\Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Z_5 \neq \varnothing \end{aligned}$$

olur ki buda α nın quasinormal gösteriminde ki Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ dir. O halde

$$\left|R^*(Q_{13})\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right|$$

bulunur. D_1' ile D_2' arasında tam otomorfizma var olduğundan $\left|R(D_1')\right| = \left|R(D_2')\right|$ dır. Teorem 1.1.58 den

$$\left|R^*(Q_{13})\right| = 2 \cdot 7 \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanı Teorem 4.4.1-(3) koşulunu sağlasın. Bu durumda $T, T', Z, Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ olmak üzere $V(D, \alpha) = Q_{14} = \{T, T', T \cup T', Z, Z'\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} Q_{14}\vartheta_{XI} = \Big\{ &\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \\ &\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2\} \Big\} \end{aligned}$$

olur. Böylece $\left|\Omega\left(Q_{14}\right)\right|=7$ bulunur.. Ayrıca Q_{14} nin tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{14}}=\begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z & Z' \\ T & T' & T\cup T' & Z & Z' \end{pmatrix} \text{ ve } \theta=\begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z & Z' \\ T' & T & T\cup T' & Z & Z' \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{14}\right)\right|=2$ olur. Öte yandan

$$D_1'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\right\},\ D_2'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_2,\breve{D}\right\},\ D_3'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},$$

$$D_4'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_5'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\},\ D_6'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\},$$

$$D_7'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\right\},\ D_8'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_3,Z_2\right\},\ D_9'=\left\{Z_6,Z_7,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},$$

$$D_{10}'=\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\ D_{11}'=\left\{Z_6,Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_{12}'=\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},$$

$$D_{13}'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\right\},\ D_{14}'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_3,Z_1\right\}$$

ile gösterirsek

$$R^*\left(Q_{14}\right)=\bigcup_{i=1}^{14}R\left(D_i'\right)$$

olur.

Lemma 4.4.4 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right| &= \left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|+\left|R\left(D_3'\right)\right|+\left|R\left(D_4'\right)\right|+\left|R\left(D_5'\right)\right|+\left|R\left(D_6'\right)\right| \\ &-\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right|-\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right|-\left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right|-\left|R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right|\end{aligned}$$

olur.

İspat: $Z_8\subseteq Y$, $Z_7\subseteq Y'$ ve $Y_1\in\left\{Z_3,Z_2,Z_1\right\}$ olmak üzere $D'=\left\{Y,Y',Y\cup Y',Y_1,\breve{D}\right\}\in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha\in R\left(D'\right)$ olsun. Bu durumda Q_{14} ile D' tam α-izomorf olduklarından Teorem 4.4.1-(3) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times\left(T\cup T'\right)\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha\supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq Y'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Y_1$, $Y_Z^\alpha\cap Y_1\neq\varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_8\subseteq Y$, $Z_7\subseteq Y'$ olduğundan $Y_T^\alpha\supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_7$ olur. O halde $D''=\left\{Z_8,Z_7,Y\cup Y',Y_1,\breve{D}\right\}$ dersek $D''=\left\{Z_8,Z_7,Y\cup Y',Y_1,\breve{D}\right\}\in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha\in R\left(D''\right)$ olur. Buradan $R\left(D'\right)\subseteq R\left(D''\right)$ elde edilir.

Benzer olarak $Z_7 \subseteq Y$, $Z_8 \subseteq Y'$ ve $Y_1 \in \{Z_3, Z_2, Z_1\}$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y \cup Y', Y_1, \breve{D}\} \in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_{14} ile D' tam α-izomorf olduklarından Teorem 4.4.1-(3) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_1$, $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_7 \subseteq Y$, $Z_8 \subseteq Y'$ olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$ olur. O halde $D'' = \{Z_7, Z_8, Y \cup Y', Y_1, \breve{D}\}$ dersek $D'' = \{Z_7, Z_8, Y \cup Y', Y_1, \breve{D}\} \in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D'')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D'')$ elde edilir. Sonuç olarak

$$R(D_7') \subseteq R(D_1'),\ R(D_8') \subseteq R(D_2'),\ R(D_9') \subseteq R(D_3'),\ R(D_{10}') \subseteq R(D_4'),$$

$$R(D_7') \subseteq R(D_5'),\ R(D_8') \subseteq R(D_6'),\ R(D_9') \subseteq R(D_1'),\ R(D_{10}') \subseteq R(D_2'),$$

$$R(D_{11}') \subseteq R(D_3'),\ R(D_{12}') \subseteq R(D_4'),\ R(D_{13}') \subseteq R(D_5'),\ R(D_{14}') \subseteq R(D_6')$$

olarak bulunur. Böylece

$$R^*(Q_{14}) = \bigcup_{i=1}^{6} R(D_i')$$

olur. Şimdi bu kümelerden arakesitleri boş küme olanları belirleyelim.

$R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') \Rightarrow\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2, \\ & Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing, \\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2, \\ & Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \\ \Rightarrow\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Z_5 = Z_5 \neq \varnothing \end{aligned}$$

olur. Buda Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. Dolayısıyla $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ olur.

Benzer olarak

$$R(D_1') \cap R(D_3') = \varnothing,\ R(D_1') \cap R(D_4') = \varnothing,\ R(D_1') \cap R(D_6') = \varnothing,$$

$$R(D_2') \cap R(D_3') = \varnothing,\ R(D_2') \cap R(D_4') = \varnothing,\ R(D_2') \cap R(D_5') = \varnothing,$$

$$R(D_3') \cap R(D_4') = \varnothing,\ R(D_3') \cap R(D_6') = \varnothing,\ R(D_4') \cap R(D_5') = \varnothing,$$

$$R(D_5') \cap R(D_6') = \varnothing$$

oldukları görülür.

Buradan

$$\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right| = \left|R\left(D_1'\right)\right| + \left|R\left(D_2'\right)\right| + \left|R\left(D_3'\right)\right| + \left|R\left(D_4'\right)\right| + \left|R\left(D_5'\right)\right| + \left|R\left(D_6'\right)\right|$$

$$-\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right| - \left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right| - \left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right| - \left|R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right|$$

elde edilir.■

Lemma 4.4.5 $Y = Y_1$, $Y_1' = Y'$ ve $Y_2' \supseteq Y_2$ olmak üzere $D' = \left\{Y, Y', Y \cup Y', Y_2, \breve{D}\right\}$, $D'' = \left\{Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1', Y_2', \breve{D}\right\} \in \left\{D_1', D_2', ..., D_6'\right\}$ ve $D' \neq D''$ olsun. Ayrıca $\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi T, T', Z, $Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right)$ $\cup \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right)$ biçiminde olsun. O zaman $\alpha \in R\left(D'\right) \cap R\left(D''\right)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1 \cup Y_1',\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_2',$$

$$Y_Z^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing \text{ ve } Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$

olmasıdır.

İspat: $\alpha \in R\left(D'\right) \cap R\left(D''\right)$ olsun. Bu durumda Teorem 4.4.1-(3) den

$$\begin{aligned}
\alpha \in R\left(D'\right) \cap R\left(D''\right) &\Leftrightarrow \alpha \in R\left(D'\right) \text{ ve } \alpha \in R\left(D''\right) \\
&\Leftrightarrow Y_T^\alpha \supseteq Y,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Y',\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing, \\
&\quad\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \text{ ve} \\
&\quad\ Y_T^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_2',\ Y_Z^\alpha \cap Y_2' \neq \varnothing, \\
&\quad\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1 \cup Y_1',\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T \cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_2',\ Y_Z^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing, \\
&\quad\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing.
\end{aligned}$$

olarak bulunur.■

Lemma 4.4.6 $Y = Y_1$, $Y_1' = Y'$ ve $Y_2' \supseteq Y_2$ olmak üzere $D' = \left\{Y, Y', Y \cup Y', Y_2, \breve{D}\right\}$ ve $D'' = \left\{Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1', Y_2', \breve{D}\right\} \in \left\{D_1', D_2', ..., D_6'\right\}$, $D' \neq D''$ ve X sonlu olsun. O halde

$$\left|R\left(D'\right) \cap R\left(D''\right)\right| = 7 \cdot 4^{\left|Y_2' \setminus \left(Y_2 \cup Y_1 \cup Y_1'\right)\right|}\left(4^{\left|Y_2 \setminus \left(Y_1 \cup Y_1'\right)\right|} - 3^{\left|Y_2 \setminus \left(Y_1 \cup Y_1'\right)\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Y_2'\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Y_2'\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: Lemma 4.2.6. da uygulanan adımlar benzer şekilde uygulandığında

$$\left|R\left(D'\right)\cap R\left(D''\right)\right|=7\cdot 4^{\left|Y_2'\setminus\left(Y_2\cup Y_1\cup Y_1'\right)\right|}\left(4^{\left|Y_2\setminus\left(Y_1\cup Y_1'\right)\right|}-3^{\left|Y_2\setminus\left(Y_1\cup Y_1'\right)\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Y_2'\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Y_2'\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 4.4.7 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right|=7\cdot 4^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right|=7\cdot 4^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right|=7\cdot 4^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

$$\left|R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right|=7\cdot 4^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: $D_1'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\right\}$, $D_2'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_2,\breve{D}\right\}$, $D_3'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_4'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_5'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\}$ ve $D_6'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\}$ XI -alt yarılatisleri için Lemma 4.4.6 uygulandığında sonuç açıktır.■

Teorem 4.4.8 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right| &= 2\cdot 7\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\\
&+2\cdot 7\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\\
&+2\cdot 7\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\\
&-2\cdot 7\cdot 4^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\\
&-2\cdot 7\cdot 4^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Lemma 4.4.4, Teorem 1.1.58 ve Lemma 4.4.7 den istenen elde edilir.■

$\alpha\in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının Teorem 4.4.1-(4) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V\left(D,\alpha\right)=Q_{15}=\left\{Z,Z',Z_5,Z_3,T,\breve{D}\right\}$ olduğundan

$$Q_{15}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\right\}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\left|\Omega\left(Q_{15}\right)\right|=2$ olur. Ayrıca Q_{15} in tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{15}}=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D} \\ Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D} \end{pmatrix} \text{ ve } \theta=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D} \\ Z' & Z & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D} \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{15}\right)\right|=2$ olur.

Öten yandan $D_1'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}$, $D_2'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}$, $D_3'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_4'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$ ile gösterilirse

$$R^*\left(Q_{15}\right)=\bigcup_{i=1}^{4}R\left(D_i'\right)$$

olarak bulunur.

Lemma 4.4.9 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|=2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ 2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{15}\right)=\bigcup_{i=1}^{4}R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan XI-alt yarılatislerin arakesitlerini inceleyelim.

$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)\neq\varnothing$ olsun. $\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)$ alalım. Buradan

$$\begin{aligned}\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)\Rightarrow\ & Y_Z^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_7,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq Z_3,\\ & Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_2,\ Y_3^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_T^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\\ & Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,\\ & Y_Z^\alpha\supseteq Z_7,\ Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq Z_3,\\ & Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_2,\ Y_3^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_T^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\\ & Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing\\ \Rightarrow\ & Y_T^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5\\ & Y_Z^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_Z^\alpha\cap Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_5\cap Z_5=Z_5\neq\varnothing\end{aligned}$$

olur. Bu da Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)=\varnothing$ olur.

Benzer olarak $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)=\varnothing$, $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing$, $R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_3'\right)=\varnothing$, $R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing$ ve $R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing$ oldukları görülür. O halde

$$\left|R\left(Q_{15}\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|+\left|R\left(D_3'\right)\right|+\left|R\left(D_4'\right)\right|$$

olarak bulunur.

Ayrıca D_1' ile D_2' ve D_3' ile D_4' arasında tam otomorfizma var olduğundan $\left|R\left(D_1'\right)\right|=\left|R\left(D_2'\right)\right|$ ve $\left|R\left(D_3'\right)\right|=\left|R\left(D_4'\right)\right|$ olur. Teorem 1.1.58 kullanılarak

$$\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|=2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

bulunur.■

$\alpha\in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının Teorem 4.4.1-(5) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V\left(D,\alpha\right)=Q_{16}=\left\{T,T',T\cup T',Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ olduğundan

$$Q_{16}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

olarak bulunur. Böylece $\left|\Omega\left(Q_{16}\right)\right|=2$ olur. Ayrıca Q_{16} nın tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{16}}=\begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ T' & T & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\end{pmatrix}$$

$$g=\begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ T & T' & T\cup T' & Z_1 & Z_2 & \breve{D}\end{pmatrix}\text{ ve }h=\begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\\ T & T' & T\cup T' & Z_1 & Z_2 & \breve{D}\end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{16}\right)\right|=4$ bulunur. Böylece $D_1'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_2'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1,Z_2,\breve{D}\right\}$, $D_3'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_4'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_1,Z_2,\breve{D}\right\}$, $D_5'=\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_6'=\left\{Z_6,Z_7,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\right\}$, $D_7'=\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_8'=\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,Z_2,\breve{D}\right\}$ ile gösterilirse

$$R^*\left(Q_{16}\right)=\bigcup_{i=1}^{8}R\left(D_i'\right)$$

olarak bulunur.

Lemma 4.4.10 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right|=2\cdot 4\cdot 3^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5\right|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{16}\right)=\bigcup_{i=1}^{8} R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan kümelerden birbirini kapsayanları ve arakesitleri boş küme olanları belirleyelim. $\alpha \in R\left(D_5'\right)$ olsun. Bu durumda

$$\alpha \in R\left(D_5'\right) \Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1,$$
$$Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$$

olur. $Z_6 \supset Z_8$ olduğundan $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8$ elde edilir. Böylece $\alpha \in R\left(D_1'\right)$ olur. O halde $R\left(D_5'\right) \subseteq R\left(D_1'\right)$ olarak elde edilir. Benzer olarak $R\left(D_6'\right) \subseteq R\left(D_2'\right)$, $R\left(D_7'\right) \subseteq R\left(D_3'\right)$, $R\left(D_8'\right) \subseteq R\left(D_4'\right)$ oldukları görülür. Böylece

$$R^*\left(Q_{16}\right)=\bigcup_{i=1}^{4} R\left(D_i'\right)$$

olur.

D_2', D_3' ve D_4' XI -alt yarılatisleri ile D_1' XI -alt yarılatisi arasında tam otomorfizma var olduğundan $\left|R\left(D_1'\right)\right|=\left|R\left(D_2'\right)\right|=\left|R\left(D_3'\right)\right|=\left|R\left(D_4'\right)\right|$ olur. O halde Teorem 1.1.70 den dolayı

$$\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right|=3\cdot 4\cdot 3^{\left|\left(Z_2\cap Z_1\right)\setminus Z_5\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}$$

olarak bulunur.■

$\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının Teorem 4.4.1-(6) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V\left(D,\alpha\right)=Q_{17}=\left\{Z,Z',Z_5,Z_3,T,T',\breve{D}\right\}$ olur. Böylece $\left|\Omega\left(Q_{17}\right)\right|=1$ olur. Ayrıca Q_{17} nin otomorfizmleri

$$id_{Q_{17}}=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \\ Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \\ Z' & Z & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \end{pmatrix}$$

$$g=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \\ Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T' & T & \breve{D} \end{pmatrix} \text{ ve } h=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \\ Z' & Z & Z_5 & Z_3 & T' & T & \breve{D} \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{17}\right)\right|=4$ olur.

Lemma 4.4.11 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{17}\right)\right|=4\cdot 4^{\left|\left(Z_2\cap Z_1\right)\setminus Z_3\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-3^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: Q_{17} ile $D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ tam α-izomorf olduklarından Teorem 3.2.7 den

$$\left|R^*\left(Q_{17}\right)\right| = 4 \cdot 1 \cdot 4^{\left|(Z_2 \cap Z_1)\setminus Z_3\right|} \cdot \left(4^{\left|Z_3 \setminus Z_5\right|} - 3^{\left|Z_3 \setminus Z_5\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 4^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|} - 4^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 7^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olarak bulunur.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.4.1-(7) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{18} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3\}$ olduğundan

$$Q_{18}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\right\}\right\}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\left|\Omega\left(Q_{18}\right)\right| = 1$ olur. Ayrıca Q_{18} in tam otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{18}\right)\right| = 1$ olur. O halde $D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\}$ ile gösterirsek

$$R^*\left(Q_{18}\right) = R\left(D_1'\right)$$

olarak bulunur.

Lemma 4.4.12 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{18}\right)\right| = \left(2^{\left|Z_6 \setminus Z_5\right|} - 1\right) \cdot 5^{\left|X \setminus Z_3\right|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{18}\right) = R\left(D_1'\right)$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\left|R\left(Q_{18}\right)\right| = \left|R\left(D_1'\right)\right|$$

olur. Teorem 1.1.66 dan

$$\left|R^*\left(Q_{18}\right)\right| = 1 \cdot 1 \cdot \left(2^{\left|Z_6 \setminus Z_5\right|} - 1\right) \cdot 5^{\left|X \setminus Z_3\right|}$$

olarak bulunur.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.4.1-(8) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{19} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z''\}$ olduğundan

$$Q_{19}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\right\}, \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\right\}, \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\right\}\right\}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\left|\Omega\left(Q_{19}\right)\right| = 3$ olur. Ayrıca Q_{19} un otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{19}\right)\right| = 1$ olur. Ayrıca

$D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}$, $D_2' = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}$, $D_3' = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_{19}) = \bigcup_{i=1}^{3} R(D_i')$$

olur.

Lemma 4.4.13 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*(Q_{19})\right| = 3 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: $R^*(Q_{19}) = \bigcup_{i=1}^{3} R(D_i')$ olduğundan birleşimde yer alan kümelerin ara kesitlerini inceleyelim. $\alpha \in R(D_2')$ alalım. Q_{19} ile D_2' tam α-izomorf olduklarından

$$Y_Z^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_{Z''}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$$

özellikleri sağlanır. Buradan $Z_1 \subseteq \breve{D}$ olduğundan $Y_{Z''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ olur. O halde $\alpha \in R(D_1')$ olur. Dolayısıyla $R(D_2') \subseteq R(D_1')$ olarak bulunur. Benzer olarak $R(D_3') \subseteq R(D_1')$ olduğu bulunur. Bu durumda

$$R^*(Q_{19}) = R(D_1')$$

olur. Böylece

$$\left|R^*(Q_{19})\right| = \left|R(D_1')\right|$$

elde edilir. Teorem 1.1.66 dan

$$\left|R^*(Q_{19})\right| = 3 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

bulunur.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.4.1-(9) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{20} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z'', \breve{D}\}$ olduğundan

$$Q_{20}\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}\right\}$$

olur. Dolayısıyla $\left|\Omega(Q_{20})\right| = 2$ bulunur. Ayrıca Q_{20} nin otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $\left|\Phi(Q_{20})\right| = 1$ olur. Ayrıca

$$D_1' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\} \text{ ve } D_2' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_{20}) = R(D_1') \cup R(D_2')$$

olur.

Lemma 4.4.14 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*(Q_{20})\right| = 2 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(7^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 6^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|} +$$
$$2 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(7^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 6^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: $R^*(Q_{20}) = R(D_1') \cup R(D_2')$ olduğundan birleşimde yer alan kümelerin arakesitlerini inceleyelim.

$R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$ olsun. O zaman $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ vardır. Buradan $\alpha \in R(D_1')$ ve $\alpha \in R(D_2')$ olur. $\alpha \in R(D_1')$ olduğundan $Y_Z^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z \cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşulları sağlanır. Aynı zamanda $\alpha \in R(D_2')$ olduğundan $Y_Z^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z \cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşulları da sağlanır. O halde $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z \cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha \supseteq \breve{D}$ ve $\left(Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z \cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha\right) \cap Y_0^\alpha \supseteq \breve{D} \cap Y_0^\alpha \neq \varnothing$ elde edilir. Bu ise α nın quasinormal gösteriminde Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ olur. Sonuç olarak

$$\left|R^*(Q_{20})\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right|$$

olur. Teorem 1.1.66 dan

$$\left|R^*(Q_{20})\right| = 2 \cdot 1 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(7^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 6^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|} +$$
$$2 \cdot 1 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(7^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 6^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.5.1-(10) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{21} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, olduğundan $Q_{21}\vartheta_{XI} = \{\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\}$ olur. Dolayısıyla $|\Omega(Q_{21})| = 1$ bulunur. Ayrıca Q_{21} in otomorfizmleri

$$id_{Q_{21}} = \begin{pmatrix} Z & Z' & Z\cup Z' & T & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ Z & Z' & Z\cup Z' & T & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \end{pmatrix} \text{ ve } h = \begin{pmatrix} Z & Z' & Z\cup Z' & T & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ Z & Z' & Z\cup Z' & T & Z_3 & Z_1 & Z_2 & \breve{D} \end{pmatrix}$$

olduğundan $|\Phi(Q_{21})| = 2$ olur. Ayrıca

$$D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ D_2' = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\}$$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_{21}) = R(D_1') \cup R(D_2')$$

olur.

Lemma 4.4.15 X sonlu olsun. O zaman

$$|R^*(Q_{21})| = 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: $R^*(Q_{21}) = R(D_1') \cup R(D_2')$ olduğundan

$$|R^*(Q_{21})| = |R(D_1')| + |R(D_2')| - |R(D_1') \cap R(D_2')|$$

olur. Ayrıca D_1' ile D_2' arasında tam otomorfizma var olduğundan

$$R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing \text{ ve } |R(D_1')| = |R(D_2')|$$

bulunur. O halde Teorem 3.3.7 den

$$|R^*(Q_{21})| = 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

Teorem 4.4.16 X sonlu bir küme olsun. D X-yarılatisi ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X(D)$ nin $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ koşulları altında regüler elemanlarınının sayısı

$$|R| = \sum_{i=1}^{21} |R^*(Q_i)|$$

olur.

İspat: X sonlu olsun. D X -yarılatisi ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X(D)$ nin, $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ koşulları altında regüler elemanlarınının sayısının Teorem 1.1.30 dan

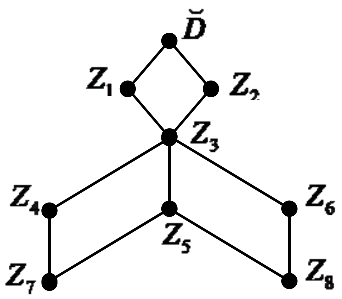
$$|R| = \sum_{D' \in \Sigma_{XI}} |R(D')| = \sum_{i=1}^{21} \left|R^*(Q_i)\right|$$

olarak bulunur.■

Örnek 4.4.17 $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve X kümesinin alt kümelerinin bir ailesi

$D = \{\{3,4\},\{6\},\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{3,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$

olsun. D kümesinin elemanlarını $\breve{D} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $Z_1 = \{2,3,4,5,6\}$, $Z_2 = \{1,3,4,5,6\}$, $Z_3 = \{3,4,5,6\}$, $Z_4 = \{3,5,6\}$, $Z_5 = \{3,4,6\}$, $Z_6 = \{3,4,5\}$, $Z_7 = \{6\}$ ve $Z_8 = \{3,4\}$ ile gösterirsek D nin diyagramı aşağıdaki gibidir.



D nin her alt kümesinin kapsama bağıntısına göre bir en küçük üst sınırı olduğundan D kümelerdeki kapsama bağıntısı ile bir üst yarılatisdir. Ayrıca D kümelerdeki birleşme işlemine göre kapalı olduğundan tam X -yarılatisdir ve en büyük elemanı $\breve{D}$ olur. Ayrıca

$$Z_8 \cap Z_7 = \{3,4\} \cap \{6\} = \varnothing,$$

$$Z_8 \cap Z_4 = \{3,4\} \cap \{3,5,6\} = \{3\},$$

$$Z_7 \cap Z_6 = \{6\} \cap \{3,4,5\} = \varnothing$$

olduğundan Teorem 3.4.13 den $B_X(D)$ nin idempotent elemanların sayısı, $\left|I^*(Q_1)\right| = 9$, $\left|I^*(Q_2)\right| = 316$, $\left|I^*(Q_3)\right| = 671$, $\left|I^*(Q_4)\right| = 226$, $\left|I^*(Q_5)\right| = 16$, $\left|I^*(Q_6)\right| = 38$, $\left|I^*(Q_7)\right| = 38$,

$\left|I^*\left(Q_8\right)\right| = 4$, $\left|I^*\left(Q_9\right)\right| = 29$, $\left|I^*\left(Q_{10}\right)\right| = 8$, $\left|I^*\left(Q_{11}\right)\right| = 2$, $\sum_{i=12}^{21}\left|I^*\left(Q_i\right)\right| = 253$ olduğundan $\left|I_D\right| = 1610$ olarak bulunur.

Ayrıca Teorem 4.4.16 dan $B_X\left(D\right)$ nin regüler elemanların sayısı

$$\left|R\right| = \sum_{i=1}^{21}\left|R^*\left(Q_i\right)\right| = 10559$$

olur.

4.5. $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ Koşulları Altında Regüler Elemanlar

Bu bölümde birleşimlerin tam X -yarılatisi D ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X\left(D\right)$ nin,

$$Z_8 \cap Z_7 = \varnothing,\ Z_8 \cap Z_4 = \varnothing \text{ ve } Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$$

koşulları altında regüler elemanlarının özellikleri ve X kümesinin sonlu olması durumunda regüler elemanlarının sayısı belirlenecektir.

Teorem 4.1.1 de verilen biçimlerde quasinormal gösterime sahip ikili bağıntılar $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ koşulları altında da $B_X\left(D\right)$ nin regüler elemanı olur. O halde bunlar dışında quasinormal gösterime sahip olan $B_X\left(D\right)$ nin regüler elemanlarını bulalım.

Teorem 4.5.1 $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ olsun. Aşağıda verilen biçimlerde quasinormal gösterimlerden birine sahip olan $\alpha \in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının regüler olması için gerek ve yeter koşul $V\left(D,\alpha\right)$ X -yarılatisinden D nin bir X -alt yarılatisi olan D' ye bir φ, tam α -izomorfizmasının verilen koşulları sağlamasıdır.

1) $T,\ T' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$ ve $T' \setminus T \neq \varnothing$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T \cup T'}^\alpha \times \left(T \cup T'\right)\right)$ biçiminde ve φ, tam α -izomorfizması $Y_T^\alpha \supseteq \varphi\left(T\right)$ ve $Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi\left(T'\right)$ koşullarını sağlar.

2) $T,\ T',\ Z\in D$, $T\cap T'=\varnothing$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ ve $T\cup T'\subset Z$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times\left(T\cup T'\right)\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$ ve $Y_Z^\alpha\cap\varphi(Z)\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

3) $T,\ T',\ Z,\ Z'\in D$, $T\cap T'=\varnothing$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ ve $T\cup T'\subset Z\subset Z'$ için $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times\left(T\cup T'\right)\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)$ biçiminde ve φ, $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq\varphi(Z)$, $Y_Z^\alpha\cap\varphi(Z)\neq\varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha\cap\varphi(Z')\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

4) $Z,\ Z'\in\{Z_8,Z_7\}$, $Z\neq Z'$, $Z\cap Z'=\varnothing$, $Z\cup Z'=Z_5$ ve $T\in\{Z_2,Z_1\}$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi, $\alpha=\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)\cup\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, $Y_Z^\alpha\supseteq\varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha\supseteq\varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(Z_3)$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_5^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_3^\alpha\cap\varphi(Z_3)\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$ ve $Y_0^\alpha\cap\varphi\left(\breve{D}\right)\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

5) $T,\ T'\in\{Z_8,Z_7,Z_6,Z_4\}$, $T\cap T'=\varnothing$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ ve $T\cup T'\subseteq Z_3$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha\times\left(T\cup T'\right)\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\varphi(Z_2)$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T\cup T'}^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(Z_1)$, $Y_2^\alpha\cap\varphi(Z_2)\neq\varnothing$ ve $Y_1^\alpha\cap\varphi(Z_1)\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

6) $Z,\ Z'\in\{Z_8,Z_7\}$, $Z\neq Z'$, $T,\ T'\in\{Z_2,Z_1\}$ ve $T\neq T'$ olmak üzere $\alpha=\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)\cup\left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha\times\left(Z\cup Z'\right)\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times Z_3\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha\supseteq\varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha\supseteq\varphi(Z')$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq\varphi(Z_3)$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha\cup Y_3^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_3^\alpha\cap\varphi(Z_3)\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$ ve $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$ koşullarını sağlar.

7) $Z,\ Z',\ T\in D$, $Z\cap T=\varnothing$, $Z'\subset T$, $Z\cup Z'\cup T=Z_3$, $Z\setminus Z'\neq\varnothing$ ve $Z'\setminus Z\neq\varnothing$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi

$\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times \left(Z \cup Z'\right)\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$ ve $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

8) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z'' \in \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $Z \cup Z' \cup T = Z_3$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times \left(Z \cup Z'\right)\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right)$ $\cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_{Z''}^\alpha \times Z''\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ ve $Y_{Z''}^\alpha \cap \varphi(Z'') \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

9) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$, $Z \cap T = \varnothing$, $Z'' \in \{Z_2, Z_1\}$ ve $Z \cup Z' \cup T = Z_3$ olmak üzere α nın quasinormal gösterimi $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times \left(Z \cup Z'\right)\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_{Z''}^\alpha \times Z''\right)$ $\cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, tam α-izomorfizması $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha \supseteq \varphi(Z'')$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha \cap \varphi(Z'') \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \varphi(\breve{D}) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

10) $Z,\ Z' \in \{Z_8, Z_7\}$, $Z \neq Z'$, $T \in \{Z_6, Z_4\}$, $Z' \subset T$ ve $T \cap Z = \varnothing$ olmak üzere $\alpha = \left(Y_Z^\alpha \times Z\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{Z\cup Z'}^\alpha \times \left(Z \cup Z'\right)\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right)$ $\cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ biçiminde ve φ, $Y_Z^\alpha \supseteq \varphi(Z)$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq \varphi(Z')$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$ koşullarını sağlar.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı regüler olsun. Bu durumda $B_X(D)$ kümesinin tanımından $\alpha = \bigcup_{x \in X} \left(\{x\} \times f(x)\right)$ olacak şekilde $f : X \to D$ dönüşümü vardır. Buradan $f(x) \in \{\ Z_8,\ Z_7,\ Z_6,\ Z_5,\ Z_4,\ Z_3,\ Z_2,\ Z_1,\ \breve{D}\ \}$ olur. Ayrıca her $T \in D$ için Y_T^α kümelerinin tanımından dolayı

$$\alpha = \bigcup_{T \in D'} \left(Y_T^\alpha \times T\right)$$

olacak şekilde D nin bir D' alt yarılatisi vardır. Buradan

$$V(D,\alpha)=D'=V(D',\alpha)$$

olur. Üstelik Teorem 1.1.17 den D nin $V(D,\alpha)$ XI -alt yarılatisidir. O halde D', D nin XI -alt yarılatisi olur. Yani D', $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ koşulları altında D nin Lemma 3.5.1 de verilen XI -alt yarılatislerini tarar. O halde α regüler elemanının quasinormal gösterim (1)-(10) da verilen quasinormal gösterimlerden biri gibidir.

Teorem 4.3.1 de uygulanan adımlar benzer şekilde uygulandığında (1)-(10) da verilen biçimlerde quasinormal gösterimi olan α ikili bağıntısının regüler olması için gerek ve yeter koşulun φ , tam α -izomorfizmasının verilen koşulları sağlaması gerektiği elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.5.1-(1) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha)=Q_{12}=\{T,T',T\cup T'\}$ olduğundan

$$Q_{12}\vartheta_{XI}=\{\{Z_7,Z_6,Z_3\},\{Z_8,Z_4,Z_3\},\{Z_8,Z_7,Z_5\}\}$$

olur. Dolayısıyla $|\Omega(Q_{12})|=3$ bulunur. Ayrıca Q_{12} nin tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{12}}=\begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' \\ T & T' & T\cup T' \end{pmatrix} \text{ ve } \theta=\begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' \\ T' & T & T\cup T' \end{pmatrix}$$

olduğundan $|\Phi(Q_{12})|=2$ bulunur. Ayrıca

$$D_1'=\{Z_8,Z_7,Z_5\},\ D_2'=\{Z_7,Z_8,Z_5\},\ D_3'=\{Z_7,Z_6,Z_3\},$$

$$D_4'=\{Z_6,Z_7,Z_3\},\ D_5'=\{Z_8,Z_4,Z_3\},\ D_6'=\{Z_4,Z_8,Z_3\}$$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_{12})=\bigcup_{i=1}^{6}R(D_i')$$

olur. O halde X sonlu iken $R^*(Q_{12})$ nin eleman sayısını bulalım.

Lemma 4.5.2 X sonlu olsun. O zaman

$$|R^*(Q_{12})|=2\cdot 3\cdot 3^{|X\setminus Z_5|}$$

olur.

İspat: $Z_8 \subseteq Z$ ve $Z_7 \subseteq Z'$ olmak üzere $D'=\{Z,Z',Z\cup Z'\}\in Q_{12}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_{12} ile D' tam α -izomorf olduklarından Teorem 4.5.1-(1) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha=\left(Y_T^\alpha \times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times\left(T\cup T'\right)\right)$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Z,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z'$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_8 \subseteq Z$ ve $Z_7 \subseteq Z'$ olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$ olur. O halde $D_1'=\left\{Z_8, Z_7, Z_5\right\}$ dersek $D_1'=\left\{Z_8, Z_7, Z_5\right\}\in Q_{12}\vartheta_{XI}$ olur. Dolayısıyla $\alpha\in R\left(D_1'\right)$ olarak bulunur. Buradan $R\left(D'\right)\subseteq R\left(D_1'\right)$ olur.

Benzer olarak $Z_7 \subseteq Z$ ve $Z_8 \subseteq Z'$ olmak üzere $D'=\left\{Z, Z', Z\cup Z'\right\}\in Q_{12}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha\in R\left(D'\right)$ olsun. Bu durumda Q_{12} ile D' tam α-izomorf olduklarından Teorem 4.5.1-(1) den α nın quasinormal gösterimi $\alpha=\left(Y_T^\alpha \times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)\cup\left(Y_{T\cup T'}^\alpha \times\left(T\cup T'\right)\right)$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Z,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z'$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_7 \subseteq Z$ ve $Z_8 \subseteq Z'$ olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8$ olur. O halde $D_2'=\left\{Z_7, Z_8, Z_5\right\}$ dersek $D_2'=\left\{Z_7, Z_8, Z_5\right\}\in Q_{12}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha\in R\left(D_2'\right)$ olur. Buradan $R\left(D'\right)\subseteq R\left(D_2'\right)$ olarak bulunur.

Sonuç olarak $R\left(D_4'\right)\subseteq R\left(D_1'\right),\ R\left(D_5'\right)\subseteq R\left(D_1'\right),\ R\left(D_3'\right)\subseteq R\left(D_2'\right), R\left(D_6'\right)\subseteq R\left(D_2'\right)$ olur. Bu durumda

$$R\left(Q_{12}\right)=R\left(D_1'\right)\cup R\left(D_2'\right)$$

olur. Şimdi $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)\neq\varnothing$ olduğunu varsayalım. $\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)$ alalım. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)&\Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7,\\ &\quad\ Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8,\\ &\Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5\end{aligned}$$

olur. Bu da α nın quasinormal gösterimindeki Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)=\varnothing$ olarak elde edilir. O halde

$$\left|R^*\left(Q_{12}\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|$$

olur. D_1' ile D_2' arasında tam otomorfizma var olduğundan $\left|R\left(D_1'\right)\right|=\left|R\left(D_2'\right)\right|$ dır. Teorem 1.1.58 den

$$\left|R^*\left(Q_{12}\right)\right|=2\cdot 3\cdot 3^{\left|X\setminus Z_5\right|}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ regüler elemanının Teorem 4.5.1-(2) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda

$$V(D,\alpha) = Q_{13} = \{T, T', T \cup T', Z\}$$

olur. Buradan

$$Q_{13}\vartheta_{XI} = \{\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}, \{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}\}$$

olduğundan $|\Omega(Q_{13})| = 10$ bulunur. Ayrıca Q_{13} ün tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{13}} = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' & Z \\ T & T' & T \cup T' & Z \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \begin{pmatrix} T & T' & T \cup T' & Z \\ T' & T & T \cup T' & Z \end{pmatrix}$$

olduğundan $|\Phi(Q_{13})| = 2$ bulunur. Burada

$D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\}$, $D_2' = \{Z_7, Z_8, Z_5, \breve{D}\}$, $D_3' = \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1\}$, $D_4' = \{Z_6, Z_7, Z_3, Z_1\}$,

$D_5' = \{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2\}$, $D_6' = \{Z_6, Z_7, Z_3, Z_2\}$, $D_7' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3\}$, $D_8' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3\}$,

$D_9' = \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1\}$, $D_{10}' = \{Z_4, Z_8, Z_3, Z_1\}$, $D_{11}' = \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2\}$, $D_{12}' = \{Z_4, Z_8, Z_3, Z_2\}$,

$D_{13}' = \{Z_8, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$, $D_{14}' = \{Z_4, Z_8, Z_3, \breve{D}\}$, $D_{15}' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1\}$, $D_{16}' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_1\}$,

$D_{17}' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2\}$, $D_{18}' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_2\}$, $D_{19}' = \{Z_7, Z_6, Z_3, \breve{D}\}$, $D_{20}' = \{Z_6, Z_7, Z_3, \breve{D}\}$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_{13}) = \bigcup_{i=1}^{20} R(D_i')$$

olur.

Lemma 4.5.3 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*(Q_{13})\right| = 2 \cdot 10 \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_5|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: $Z_8 \subseteq Y$ ve $Z_7 \subseteq Y'$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y \cup Y', Y_1\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_{13} ile D' tam α-izomorf olduklarıdan Teorem 4.5.1-(2) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\alpha \times Z)$ biçimindedir ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_8 \subseteq Y$,

$Z_7 \subseteq Y'$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri de sağlanır. O halde $D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, \breve{D}\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D_1')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D_1')$ elde edilir.

Benzer olarak $Z_7 \subseteq Y$ ve $Z_8 \subseteq Y'$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y \cup Y', Y_1\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_{13} ile D' α -izomorf olduklarından Teorem 4.5.1-(2) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')) \cup (Y_Z^\alpha \times Z)$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$ ve $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_7 \subseteq Y$, $Z_8 \subseteq Y'$ ve $\breve{D}$, D nin en büyük elemanı olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri de sağlanır. O halde $D_2' = \{Z_7, Z_8, Z_5, \breve{D}\} \in Q_{13}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D_2')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D_2')$ olarak bulunur. Sonuç olarak

$$
\begin{gathered}
R(D_4') \subseteq R(D_1'),\ R(D_6') \subseteq R(D_1'),\ R(D_7') \subseteq R(D_1'),\\
R(D_9') \subseteq R(D_1'),\ R(D_{11}') \subseteq R(D_1'),\ R(D_{13}') \subseteq R(D_1'),\\
R(D_{15}') \subseteq R(D_1'),\ R(D_{17}') \subseteq R(D_1'),\ R(D_{20}') \subseteq R(D_1'),\\
R(D_3') \subseteq R(D_2'),\ R(D_5') \subseteq R(D_2'),\ R(D_8') \subseteq R(D_2'),\\
R(D_{10}') \subseteq R(D_2'),\ R(D_{12}') \subseteq R(D_2'),\ R(D_{14}') \subseteq R(D_2'),\\
R(D_{16}') \subseteq R(D_2'),\ R(D_{18}') \subseteq R(D_2'),\ R(D_{19}') \subseteq R(D_2')
\end{gathered}
$$

bulunur. Bu durumda

$$R^*(Q_{13}) = R(D_1') \cup R(D_2')$$

olur.

Şimdi $R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ alalım. O zaman

$$
\begin{aligned}
\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') &\Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,\\
&\qquad Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing\\
&\Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Z_5 \neq \varnothing
\end{aligned}
$$

olur ki buda α nın quasinormal gösteriminde ki Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ dir. O halde

$$\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|$$

bulunur. D_1' ile D_2' arasında tam otomorfizma var olduğundan $\left|R\left(D_1'\right)\right|=\left|R\left(D_2'\right)\right|$ dır. Teorem 1.1.58 den

$$\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|=2\cdot 10\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha\in B_X\left(D\right)$ regüler elemanı Teorem 4.5.1-(3) koşulunu sağlasın. Bu durumda $T,T',Z,Z'\in D$, $T\cap T'=\varnothing$, $T\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\setminus T\neq\varnothing$ ve $T\cup T'\subset Z\subset Z'$ olmak üzere $V\left(D,\alpha\right)=Q_{14}=\left\{T,T',T\cup T',Z,Z'\right\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}Q_{14}\vartheta_{XI}=\Big\{&\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\\&\left\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\right\},\\&\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\right\}\Big\}\end{aligned}$$

olur. Böylece $\left|\Omega\left(Q_{14}\right)\right|=9$ bulunur. Ayrıca Q_{14} ün tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{14}}=\begin{pmatrix}T & T' & T\cup T' & Z & Z'\\ T & T' & T\cup T' & Z & Z'\end{pmatrix}\text{ ve }\theta=\begin{pmatrix}T & T' & T\cup T' & Z & Z'\\ T' & T & T\cup T' & Z & Z'\end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{14}\right)\right|=2$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}&D_1'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_2,\breve{D}\right\},\ D_2'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_2,\breve{D}\right\},\ D_3'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},\\&D_4'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_5'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\},\ D_6'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\},\\&D_7'=\left\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\ D_8'=\left\{Z_4,Z_8,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\ D_9'=\left\{Z_8,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\\&D_{10}'=\left\{Z_4,Z_8,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_{11}'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2\right\},\ D_{12}'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_3,Z_2\right\},\\&D_{13}'=\left\{Z_6,Z_7,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\ D_{14}'=\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\ D_{15}'=\left\{Z_6,Z_7,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\\&D_{16}'=\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_{17}'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1\right\},\ D_{18}'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_3,Z_1\right\}\end{aligned}$$

ile gösterirsek

$$R^*\left(Q_{14}\right)=\bigcup_{i=1}^{18}R\left(D_i'\right)$$

olur.

Lemma 4.5.4 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*(Q_{14})\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \left|R(D_4')\right| + \left|R(D_5')\right| + \left|R(D_6')\right|$$
$$-\left|R(D_1')\cap R(D_5')\right| - \left|R(D_2')\cap R(D_6')\right| - \left|R(D_3')\cap R(D_5')\right| - \left|R(D_4')\cap R(D_6')\right|$$

olur.

İspat: $Z_8 \subseteq Y$, $Z_7 \subseteq Y'$ ve $Y_1 \in \{Z_3, Z_2, Z_1\}$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\} \in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Buradan Q_{14} ile D' tam α -izomorf olduklarından Teorem 4.5.1-(3) den α nın quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T)\cup(Y_{T'}^\alpha \times T')\cup(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T\cup T'))$ $\cup(Y_Z^\alpha \times Z)\cup(Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_1$, $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_8 \subseteq Y$, $Z_7 \subseteq Y'$ olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$ olur. O halde $D'' = \{Z_8, Z_7, Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\}$ dersek $D'' = \{Z_8, Z_7, Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\} \in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D'')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D'')$ elde edilir.

Benzer olarak $Z_7 \subseteq Y$, $Z_8 \subseteq Y'$ ve $Y_1 \in \{Z_3, Z_2, Z_1\}$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\} \in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D')$ olsun. Bu durumda Q_{14} ile D' tam α -izomorf olduklarından Teorem 4.5.1-(3) den α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $\alpha = (Y_T^\alpha \times T)\cup(Y_{T'}^\alpha \times T')\cup(Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T\cup T'))\cup(Y_Z^\alpha \times Z)\cup(Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ biçiminde olur ve $Y_T^\alpha \supseteq Y$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Y'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_1$, $Y_Z^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing$ ve $Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Öte yandan $Z_7 \subseteq Y$, $Z_8 \subseteq Y'$ olduğundan $Y_T^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$ olur. O halde $D'' = \{Z_7, Z_8, Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\}$ dersek $D'' = \{Z_7, Z_8, Y\cup Y', Y_1, \breve{D}\} \in Q_{14}\vartheta_{XI}$ ve $\alpha \in R(D'')$ olur. Buradan $R(D') \subseteq R(D'')$ elde edilir.

Sonuç olarak

$$R(D_7') \subseteq R(D_1'),\ R(D_8') \subseteq R(D_2'),\ R(D_9') \subseteq R(D_3'),\ R(D_{10}') \subseteq R(D_4'),$$
$$R(D_{11}') \subseteq R(D_5'),\ R(D_{12}') \subseteq R(D_6'),\ R(D_{13}') \subseteq R(D_1'),\ R(D_{14}') \subseteq R(D_2'),$$
$$R(D_{15}') \subseteq R(D_3'),\ R(D_{16}') \subseteq R(D_4'),\ R(D_{17}') \subseteq R(D_5'),\ R(D_{18}') \subseteq R(D_6')$$

olarak bulunur. O halde

$$R^*(Q_{14}) = \bigcup_{i=1}^{6} R(D'_i)$$

olur. Şimdi bu kümelerden arakesitleri boş küme olanları belirleyelim.

$R(D'_1) \cap R(D'_2) \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $\alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2)$ alalım. O zaman

$$\begin{aligned} \alpha \in R(D'_1) \cap R(D'_2) \Rightarrow\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2, \\ & Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing, \\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2, \\ & Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \\ \Rightarrow\ & Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Z_5 = Z_5 \neq \varnothing \end{aligned}$$

olur. Buda Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. Dolayısıyla $R(D'_1) \cap R(D'_2) = \varnothing$ olur.

Benzer olarak $R(D'_1) \cap R(D'_3) = \varnothing$, $R(D'_1) \cap R(D'_4) = \varnothing$, $R(D'_1) \cap R(D'_6) = \varnothing$, $R(D'_2) \cap R(D'_3) = \varnothing$, $R(D'_2) \cap R(D'_4) = \varnothing$, $R(D'_2) \cap R(D'_5) = \varnothing$, $R(D'_3) \cap R(D'_4) = \varnothing$, $R(D'_3) \cap R(D'_6) = \varnothing$, $R(D'_4) \cap R(D'_5) = \varnothing$, $R(D'_5) \cap R(D'_6) = \varnothing$ oldukları görülür.

Buradan

$$\begin{aligned} \left|R^*(Q_{14})\right| =\ & \left|R(D'_1)\right| + \left|R(D'_2)\right| + \left|R(D'_3)\right| + \left|R(D'_4)\right| + \left|R(D'_5)\right| + \left|R(D'_6)\right| \\ & - \left|R(D'_1) \cap R(D'_5)\right| - \left|R(D'_2) \cap R(D'_6)\right| - \left|R(D'_3) \cap R(D'_5)\right| - \left|R(D'_4) \cap R(D'_6)\right| \end{aligned}$$

olarak bulunur.■

Lemma 4.5.5 $Y = Y_1$, $Y'_1 = Y'$ ve $Y'_2 \supseteq Y_2$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y \cup Y', Y_2, \breve{D}\}$, $D'' = \{Y_1, Y'_1, Y_1 \cup Y'_1, Y'_2, \breve{D}\} \in \{D'_1, D'_2, ..., D'_6\}$ ve $D' \neq D''$ olsun. Ayrıca $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi $T, T', Z, Z' \in D$, $T \cap T' = \varnothing$, $T \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus T \neq \varnothing$ ve $T \cup T' \subset Z \subset Z'$ olmak üzere $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T\cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$ $\cup (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$ biçiminde olsun. O zaman $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ olması için gerek ve yeter koşul

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1 \cup Y'_1,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y'_2,\ Y_Z^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing \text{ ve } Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$

olmasıdır.

İspat: $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ olsun. Bu durumda Teorem 4.5.1-(3) den

$$\begin{aligned}
\alpha \in R(D') \cap R(D'') &\Leftrightarrow \alpha \in R(D') \text{ ve } \alpha \in R(D'') \\
&\Leftrightarrow Y_T^\alpha \supseteq Y,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Y',\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_2,\ Y_Z^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing, \\
&\quad Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \text{ ve} \\
&\quad Y_T^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_2',\ Y_Z^\alpha \cap Y_2' \neq \varnothing, \\
&\quad Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1 \cup Y_1',\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Y_2',\ Y_Z^\alpha \cap Y_2 \neq \varnothing, \\
&\quad Y_{Z'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing
\end{aligned}$$

olarak bulunur.■

Lemma 4.5.6 $Y = Y_1$, $Y_1' = Y'$ ve $Y_2' \supseteq Y_2$ olmak üzere $D' = \{Y, Y', Y \cup Y', Y_2, \breve{D}\}$ ve $D'' = \{Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1', Y_2', \breve{D}\} \in \{D_1', D_2', ..., D_6'\}$, $D' \neq D''$ ve X sonlu olsun. O halde

$$\left|R(D') \cap R(D'')\right| = 9 \cdot 4^{\left|Y_2' \setminus (Y_2 \cup Y_1 \cup Y_1')\right|} \left(4^{\left|Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right|} - 3^{\left|Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Y_2'\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Y_2'\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: Lemma 4.2.6. da uygulanan adımlar benzer şekilde uygulandığında

$$\left|R(D') \cap R(D'')\right| = 9 \cdot 4^{\left|Y_2' \setminus (Y_2 \cup Y_1 \cup Y_1')\right|} \left(4^{\left|Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right|} - 3^{\left|Y_2 \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right|}\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Y_2'\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Y_2'\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olarak elde edilir.■

Lemma 4.5.7 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R(D_1') \cap R(D_5')\right| = 9 \cdot 4^{|Z_2 \setminus Z_3|} \cdot \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

$$\left|R(D_2') \cap R(D_6')\right| = 9 \cdot 4^{|Z_2 \setminus Z_3|} \cdot \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

$$\left|R(D_3') \cap R(D_5')\right| = 9 \cdot 4^{|Z_1 \setminus Z_3|} \cdot \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

$$\left|R(D_4') \cap R(D_6')\right| = 9 \cdot 4^{|Z_1 \setminus Z_3|} \cdot \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: $D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, \breve{D}\}$, $D_2' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_2, \breve{D}\}$, $D_3' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1, \breve{D}\}$, $D_4' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_1, \breve{D}\}$, $D_5' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, \breve{D}\}$ ve $D_6' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_3, \breve{D}\}$ XI -alt yarılatisleri için Lemma 4.5.6 uygulandığında sonuç açıktır.■

Teorem 4.5.8 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right| &= 2\cdot 9\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_5|}-3^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}\\ &+2\cdot 9\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_5|}-3^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}\\ &+2\cdot 9\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}\\ &-2\cdot 9\cdot 4^{|Z_2\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}\\ &-2\cdot 9\cdot 4^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: Lemma 4.5.4, Teorem 1.1.58 ve Lemma 4.5.7 den istenen elde edilir.■

$\alpha\in B_X\left(D\right)$ ikili bağıntısının Teorem 4.5.1-(4) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda

$$V\left(D,\alpha\right)=Q_{15}=\left\{Z,Z',Z_5,Z_3,T,\breve{D}\right\}$$

olduğundan

$$Q_{15}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\right\}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\left|\Omega\left(Q_{15}\right)\right|=2$ olur. Ayrıca Q_{15} in tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{15}}=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D}\\ Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D}\end{pmatrix} \text{ ve } \theta=\begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D}\\ Z' & Z & Z_5 & Z_3 & T & \breve{D}\end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{15}\right)\right|=2$ olur. Ayrıca

$$D_1'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\ D_2'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},$$

$$D_3'=\left\{Z_8,Z_7,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\quad D_4'=\left\{Z_7,Z_8,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$$

ile gösterilirse $R^*\left(Q_{15}\right)=\bigcup_{i=1}^{4}R\left(D_i'\right)$ olarak bulunur.

Lemma 4.5.9 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right| &= 2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_3|}-4^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &2\cdot 2\cdot\left(4^{|Z_3\setminus Z_5|}-3^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_3|}-4^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

olur.

İspat: $R^*(Q_{15}) = \bigcup_{i=1}^{4} R(D_i')$ olduğundan birleşimde yer alan XI-alt yarılatislerin arakesitlerini inceleyelim.

$R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$ olsun. $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') \Rightarrow & Y_Z^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3, \\
& Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing, \\
& Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing, \\
& Y_Z^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3, \\
& Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing, \\
& Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \\
\Rightarrow & Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5 \\
& Y_Z^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_Z^\alpha \cap Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Z_5 = Z_5 \neq \varnothing
\end{aligned}$$

olur. Bu da Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ olur.

Benzer olarak

$$R(D_1') \cap R(D_3') = \varnothing,\ R(D_1') \cap R(D_4') = \varnothing,\ R(D_2') \cap R(D_3') = \varnothing,$$

$$R(D_2') \cap R(D_4') = \varnothing \text{ ve } R(D_3') \cap R(D_4') = \varnothing$$

oldukları görülür. O halde

$$|R(Q_{15})| = |R(D_1')| + |R(D_2')| + |R(D_3')| + |R(D_4')|$$

olarak bulunur.

Ayrıca D_1' ile D_2' ve D_3' ile D_4' arasında tam otomorfizma var olduğundan $|R(D_1')| = |R(D_2')|$ ve $|R(D_3')| = |R(D_4')|$ olur. Teorem 1.1.58 kullanılarak

$$\begin{aligned}
|R^*(Q_{15})| = & 2 \cdot 2 \cdot \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 4^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& 2 \cdot 2 \cdot \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 4^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.5.1-(5) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D, \alpha) = Q_{16} = \{T, T', T \cup T', Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ olduğundan

$$Q_{16}\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\right\}$$

olarak bulunur. Böylece $|\Omega(Q_{16})| = 3$ olur. Ayrıca Q_{16} nın tam otomorfizmleri

$$id_{Q_{16}} = \begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ T' & T & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ T & T' & T\cup T' & Z_1 & Z_2 & \breve{D} \end{pmatrix} \text{ ve } h = \begin{pmatrix} T & T' & T\cup T' & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ T & T' & T\cup T' & Z_1 & Z_2 & \breve{D} \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{16}\right)\right| = 4$ bulunur. Ayrıca

$$D_1' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_2' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\}, D_3' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},$$

$$D_4' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_5' = \left\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_6' = \left\{Z_8, Z_4, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},$$

$$D_7' = \left\{Z_4, Z_8, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_8' = \left\{Z_4, Z_8, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_9' = \left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},$$

$$D_{10}' = \left\{Z_6, Z_7, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_{11}' = \left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_{12}' = \left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\}$$

ile gösterilirse

$$R^*\left(Q_{16}\right) = \bigcup_{i=1}^{12} R\left(D_i'\right)$$

olarak bulunur.

Lemma 4.5.10 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right| = 3\cdot 4\cdot 3^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|} - 3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|} - 3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{16}\right) = \bigcup_{i=1}^{12} R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan kümelerden birbirini kapsayanları ve arakesitleri boş küme olanları belirleyelim. $\alpha \in R\left(D_5'\right)$ olsun. Bu durumda

$$\alpha \in R\left(D_5'\right) \Rightarrow Y_T^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T\cup T'}^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1,$$
$$Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$$

olur. $Z_4 \supset Z_7$ olduğundan $Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_7$ elde edilir. Böylece $\alpha \in R\left(D_1'\right)$ olur. O halde $R\left(D_5'\right) \subseteq R\left(D_1'\right)$ olarak elde edilir. Benzer olarak

$$R\left(D_6'\right) \subseteq R\left(D_2'\right),\ R\left(D_7'\right) \subseteq R\left(D_3'\right),\ R\left(D_8'\right) \subseteq R\left(D_4'\right),\ R\left(D_9'\right) \subseteq R\left(D_1'\right),$$

$$R\left(D_{10}'\right) \subseteq R\left(D_2'\right),\ R\left(D_{11}'\right) \subseteq R\left(D_3'\right),\ R\left(D_{12}'\right) \subseteq R\left(D_4'\right)$$

oldukları görülür. O halde

$$R^*(Q_{16}) = \bigcup_{i=1}^{4} R(D_i')$$

olur.

D_2', D_3' ve D_4' XI -alt yarılatisleri D_1' XI -alt yarılatisine otomorf olduklarından

$$\left|R(D_1')\right| = \left|R(D_2')\right| = \left|R(D_3')\right| = \left|R(D_4')\right|$$

olur. O halde Teorem 1.1.70 den dolayı

$$\left|R^*(Q_{16})\right| = 3 \cdot 4 \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_5|} \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak bulunur.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.5.1-(6) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{17} = \{Z, Z', Z_5, Z_3, T, T', \breve{D}\}$ olduğundan

$$Q_{17}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$$

olarak bulunur. Böylece $\left|\Omega(Q_{17})\right| = 1$ olur. Ayrıca Q_{17} nin otomorfizmleri

$$id_{Q_{17}} = \begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \\ Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \\ Z' & Z & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \\ Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T' & T & \breve{D} \end{pmatrix} \text{ ve } h = \begin{pmatrix} Z & Z' & Z_5 & Z_3 & T & T' & \breve{D} \\ Z' & Z & Z_5 & Z_3 & T' & T & \breve{D} \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi(Q_{17})\right| = 4$ olur.

Lemma 4.5.11 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*(Q_{17})\right| = 4 \cdot 4^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 4^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(5^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 4^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olur.

İspat: Q_{17} ile $D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ tam α -izomorf olduklarından Teorem 3.2.7 den

$$\left|R^*(Q_{17})\right| = 4 \cdot 1 \cdot 4^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3|} \cdot \left(4^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 3^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(5^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 4^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot \left(5^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 4^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak bulunur.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.5.1-(7) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{18} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3\}$ olduğundan

$$Q_{18}\vartheta_{XI} = \{\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\}\}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $|\Omega(Q_{18})| = 2$ olur. Ayrıca Q_{18} in tam otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $|\Phi(Q_{18})| = 1$ olur.

O halde $Q_{18}\vartheta_{XI}$ ın elemanlarını $D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3\}$, $D_2' = \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3\}$ ile gösterirsek

$$R^*(Q_{18}) = R(D_1') \cup R(D_2')$$

olarak bulunur.

Lemma 4.5.12 X sonlu olsun. O zaman

$$|R^*(Q_{18})| = 2 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_3|} + 2 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_3|}$$

olur.

İspat: $R^*(Q_{18}) = R(D_1') \cup R(D_2')$ olduğunu biliyoruz.

$R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$ olsun. $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') &\Rightarrow Y_Z^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_4,\ Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing, \\ &\quad Y_Z^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing \\ &\Rightarrow Y_Z^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_Z^\alpha \cap Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_5 \cap Z_5 = Z_5 \neq \varnothing \end{aligned}$$

olur bu ise α ikili bağıntısının quasinormal gösterimindeki Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ olur. O halde

$$|R(Q_{18})| = |R(D_1')| + |R(D_2')|$$

olarak bulunur.

Teorem 1.1.66 dan

$$|R^*(Q_{18})| = 2 \cdot 1 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_3|} + 2 \cdot 1 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_3|}$$

olarak bulunur.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.5.1-(8) deki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D, \alpha) = Q_{19} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z''\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} Q_{19}\vartheta_{XI} = \{&\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\}, \\ &\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\}\} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\left|\Omega\left(Q_{19}\right)\right| = 6$ olur. Ayrıca Q_{19} un otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{19}\right)\right| = 1$ olur. Böylece

$$D_1' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\right\},\ D_2' = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, \breve{D}\right\},$$

$$D_3' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\right\},\ D_4' = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1\right\},$$

$$D_5' = \left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\right\},\ D_6' = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2\right\}$$

ile gösterirsek

$$R^*\left(Q_{19}\right) = \bigcup_{i=1}^{6} R\left(D_i'\right)$$

olur.

Lemma 4.5.13 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{19}\right)\right| = 6\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|} + 6\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-5^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{19}\right) = \bigcup_{i=1}^{6} R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan kümelerin arakesitlerini inceleyelim.

$\alpha \in R\left(D_3'\right)$ olsun. Q_{19} ile D_3' tam α-izomorf olduklarından $Y_Z^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$ ve $Y_{Z''}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ özellikleri sağlanır. Buradan $Z_1 \subseteq \breve{D}$ olduğundan $Y_{Z''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ olur. O halde $\alpha \in R\left(D_1'\right)$ olur. Dolayısıyla $R\left(D_3'\right) \subseteq R\left(D_1'\right)$ olarak bulunur.

Benzer olarak $R\left(D_4'\right) \subseteq R\left(D_2'\right)$, $R\left(D_5'\right) \subseteq R\left(D_1'\right)$, $R\left(D_6'\right) \subseteq R\left(D_2'\right)$ oldukları elde edilir. O halde

$$R^*\left(Q_{19}\right) = R\left(D_1'\right) \cup R\left(D_2'\right)$$

olur.

Şimdi bu iki kümenin arakesitini inceleyelim.

$R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_2'\right) \neq \varnothing$ olsun. $\alpha \in R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_2'\right)$ alalım. Buradan

$$\begin{aligned}\alpha \in R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_2'\right) &\Rightarrow Y_Z^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_4,\ Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_{Z''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,\\ &\qquad Y_Z^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_8,\ Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_{Z''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing\\ &\Rightarrow Y_Z^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_Z^\alpha \cap Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_5 \neq \varnothing\end{aligned}$$

olur. Bu da α nın quasinormal gösteriminde Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ olur. Buradan

$$\left|R^*(Q_{19})\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right|$$

olur. Teorem 1.1.66 dan

$$\left|R^*(Q_{19})\right| = 6 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|} + 6 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 5^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.5.1-(9) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{20} = \{Z, Z', Z \cup Z', T, Z_3, Z'', \breve{D}\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} Q_{20}\vartheta_{XI} = \Big\{ & \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \\ & \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}\Big\}. \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\left|\Omega(Q_{20})\right| = 4$ bulunur. Ayrıca Q_{20} nin otomorfizmi sadece birim dönüşüm olduğundan $\left|\Phi(Q_{20})\right| = 1$ olur. Öte yandan

$$D_1' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\},\ D_2' = \{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},$$

$$D_3' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_6, Z_3, Z_1, \breve{D}\} \text{ ve } D_4' = \{Z_7, Z_8, Z_5, Z_6, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$$

ile gösterirsek

$$R^*(Q_{20}) = \bigcup_{i=1}^{4} R(D_i')$$

olur.

Lemma 4.5.14 X sonlu olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \left|R^*(Q_{20})\right| = {} & 4 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(7^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 6^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ & 4 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(7^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 6^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ & 4 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 5^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(7^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 6^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ & 4 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(6^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 5^{|Z_2 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(7^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 6^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|} \end{aligned}$$

olur.

İspat: $R^*(Q_{20}) = \bigcup_{i=1}^{4} R(D_i')$ olduğundan birleşimde yer alan kümelerin ara kesitlerini inceleyelim.

$R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$ olsun. O zaman $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$ vardır. Buradan $\alpha \in R(D_1')$ ve $\alpha \in R(D_2')$ olur. $\alpha \in R(D_1')$ olduğundan $Y_Z^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşulları sağlanır. Aynı zamanda $\alpha \in R(D_2')$ olduğundan $Y_Z^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_{Z''}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$ koşulları da sağlanır. Bu koşullar irdelendiğinde $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha \supseteq \breve{D}$ ve $\left(Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha\right) \cap Y_0^\alpha \supseteq \breve{D} \cap Y_0^\alpha \neq \varnothing$ elde edilir. Bu ise α nın quasinormal gösteriminde Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$ olur. Benzer olarak

$$R(D_1') \cap R(D_3') = \varnothing,\ R(D_1') \cap R(D_4') = \varnothing,\ R(D_2') \cap R(D_3') = \varnothing,$$
$$R(D_2') \cap R(D_4') = \varnothing,\ R(D_3') \cap R(D_4') = \varnothing$$

oldukları görülür. Sonuç olarak

$$\left|R^*(Q_{20})\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \left|R(D_4')\right|$$

olur. Teorem 1.1.66 dan

$$\begin{aligned}
\left|R^*(Q_{20})\right| = {} & 4\cdot 1\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|} + \\
& 4\cdot 1\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|} + \\
& 4\cdot 1\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_3|}-5^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|} + \\
& 4\cdot 1\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_3|}-5^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus \breve{D}|}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının Teorem 4.5.1-(10) daki gibi quasinormal gösterimi var olsun. Bu durumda $V(D,\alpha) = Q_{21} = \left\{Z, Z', Z\cup Z', T, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$, olduğundan

$$Q_{21}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$$

olur. Dolayısıyla $\left|\Omega(Q_{21})\right| = 2$ bulunur. Ayrıca Q_{21} in otomorfizmleri

$$id_{Q_{21}} = \begin{pmatrix} Z & Z' & Z\cup Z' & T & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ Z & Z' & Z\cup Z' & T & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \end{pmatrix} \text{ ve } h = \begin{pmatrix} Z & Z' & Z\cup Z' & T & Z_3 & Z_2 & Z_1 & \breve{D} \\ Z & Z' & Z\cup Z' & T & Z_3 & Z_1 & Z_2 & \breve{D} \end{pmatrix}$$

olduğundan $\left|\Phi\left(Q_{21}\right)\right| = 2$ olur. Ayrıca

$$D_1' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_2' = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},$$

$$D_3' = \left\{Z_7, Z_8, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_4' = \left\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\}$$

ile gösterirsek

$$R^*\left(Q_{21}\right) = \bigcup_{i=1}^{4} R\left(D_i'\right)$$

olur.

Lemma 4.5.15 X sonlu olsun. O zaman

$$\left|R^*\left(Q_{21}\right)\right| = 2\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 8^{|X\setminus\breve{D}|} +$$
$$2\cdot 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 8^{|X\setminus\breve{D}|}$$

olur.

İspat: $R^*\left(Q_{21}\right) = \bigcup_{i=1}^{4} R\left(D_i'\right)$ olduğundan birleşimde yer alan kümelerin arakesitlerini inceleyelim.

$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right) \neq \varnothing$ olsun. O zaman $\alpha \in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)$ vardır. Buradan $\alpha \in R\left(D_1'\right)$ ve $\alpha \in R\left(D_2'\right)$ olur. $\alpha \in R\left(D_1'\right)$ olduğundan $Y_Z^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ olur.

Aynı zamanda $\alpha \in R\left(D_2'\right)$ olduğundan $Y_Z^\alpha \supseteq Z_8$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_{Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z\cup Z'}^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ ve $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$ olur. O halde $Y_Z^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_Z^\alpha \cap Y_{Z'}^\alpha \supseteq = Z_5 \neq \varnothing$ olur. Bu ise α nın quasinormal gösteriminde Y_T^α ların ayrık olması ile çelişir. O halde $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right) = \varnothing$ olur. Benzer olarak $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right) = \varnothing$, $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_4'\right) = \varnothing$, $R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_3'\right) = \varnothing$, $R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_4'\right) = \varnothing$, $R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_4'\right) = \varnothing$ oldukları görülür. O halde

$$\left|R^*\left(Q_{21}\right)\right| = \left|R\left(D_1'\right)\right| + \left|R\left(D_2'\right)\right| + \left|R\left(D_3'\right)\right| + \left|R\left(D_4'\right)\right|$$

olur. Teorem 3.3.7 den

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_{21}\right)\right| = {} & 2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 8^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ & 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 8^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ & 2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 8^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ & 2\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 5^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_3|}\cdot\left(6^{|Z_1\setminus Z_2|}-5^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(6^{|Z_2\setminus Z_1|}-5^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 8^{|X\setminus \breve{D}|}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.■

Teorem 4.5.16 X sonlu bir küme olsun. Birleşimlerin tam X -yarılatisi D ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X\left(D\right)$ nin $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ koşulları altında regüler elemanlarınının sayısı

$$|R| = \sum_{i=1}^{21}\left|R^*\left(Q_i\right)\right|$$

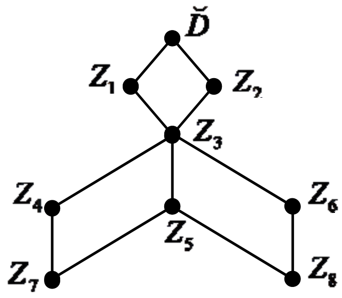
olur.

İspat: X sonlu olsun. D X -yarılatisi ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X\left(D\right)$ nin, $Z_8 \cap Z_7 = \varnothing$, $Z_8 \cap Z_4 = \varnothing$ ve $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ koşulları altında regüler elemanlarınının sayısının Teorem 1.1.30 dan

$$|R| = \sum_{D'\in\Sigma_{XI}}\left|R\left(D'\right)\right| = k_0 + \sum_{i=11}^{21}\left|R^*\left(Q_i\right)\right|$$

olarak bulunur.■

Örnek 4.5.17 $X = \{1,2,3,4,5\}$ ve X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir aile $D = \{\{3\},\{5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{3,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$ olsun. D kümesinin elemanlarını $\breve{D} = \{1,2,3,4,5\}$, $Z_1 = \{2,3,4,5\}$, $Z_2 = \{1,3,4,5\}$, $Z_3 = \{3,4,5\}$, $Z_4 = \{4,5\}$, $Z_5 = \{3,5\}$, $Z_6 = \{3,4\}$, $Z_7 = \{5\}$ ve $Z_8 = \{3\}$ ile gösterirsek D nin diyagramı yandaki gibidir. D nin her alt kümesinin kapsama bağıntısına göre bir en küçük üst sınırı olduğundan D kümelerdeki kapsama bağıntısı ile bir üst yarılatisdir. Ayrıca D kümelerdeki birleşme işlemine



göre kapalı olduğundan tam X -yarılatisdir ve en büyük elemanı $\breve{D}$ olur. Üstelik

$$Z_8 \cap Z_7 = \{3\} \cap \{5\} = \varnothing \ ,$$

$$Z_8 \cap Z_4 = \{3\} \cap \{4,5\} = \varnothing ,$$

$$Z_7 \cap Z_6 = \{5\} \cap \{3,4\} = \varnothing$$

olduğundan Teorem 3.5.13 den $B_X(D)$ nin idempotent elemanların sayısı, $\left|I^*(Q_1)\right| = 9$, $\left|I^*(Q_2)\right| = 220$, $\left|I^*(Q_3)\right| = 379$, $\left|I^*(Q_4)\right| = 118$, $\left|I^*(Q_5)\right| = 8$, $\left|I^*(Q_6)\right| = 38$, $\left|I^*(Q_7)\right| = 38$, $\left|I^*(Q_8)\right| = 4$, $\left|I^*(Q_9)\right| = 17$, $\left|I^*(Q_{10})\right| = 4$, $\left|I^*(Q_{11})\right| = 2$, $\sum_{i=12}^{21}\left|I^*(Q_i)\right| = 331$, olup $\left|I_D\right| = 1168$ olarak bulunur.

Ayrıca Teorem 4.5.16 dan $B_X(D)$ nin regüler elemanların sayısı

$$|R| = \sum_{i=1}^{21}\left|R^*(Q_i)\right| = 6979$$

olarak bulunur.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Tez dört ana bölüm altında toplanmış olup bu bölümlerde aşağıda özet olarak belirttiğimiz sonuçlar elde edilmiştir.

Birinci bölümde, ilk olarak tez boyunca kullanılmış olan temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Bu bölümün son kısmında ise birleşimlerin tam X-yarılatisleri ve ikili bağıntıların tam yarıgrupları ile ilgili tanım, özellik ve iyi bilinen teoremler verilmiştir. Ayrıca ikili bağıntıların tam yarıgruplarının sağ birim, idempotent ve regüler elemanlarının yapısı ve bu elemanlar arasındaki ilişkiler ile ilgili teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere elemanları

$$
\begin{aligned}
&Z_7 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\\
&Z_7 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_7 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\\
&Z_8 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_5 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\\
&Z_8 \subset Z_6 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_8 \subset Z_6 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset \breve{D},\\
&Z_8 \setminus Z_7 \neq \varnothing,\ Z_7 \setminus Z_8 \neq \varnothing, Z_6 \setminus Z_5 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_6 \neq \varnothing,\\
&Z_6 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_6 \neq \varnothing,\ Z_5 \setminus Z_4 \neq \varnothing,\ Z_4 \setminus Z_5 \neq \varnothing,\\
&Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\ Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing
\end{aligned}
$$

koşullarını sağlayan $D = \left\{ Z_8,\ Z_7,\ Z_6,\ Z_5,\ Z_4,\ Z_3,\ Z_2,\ Z_1,\ \breve{D} \right\}$ birleşimlerin tam X-yarılatisinin özellikleri incelenmiştir. Dolayısıyla D ye tam izomorf olan birleşimlerin tam X-yarılatislerinin sınıfı $\Sigma_2(X,9)$ olmak üzere bu sınıfın elemanları karakterize edilmiştir. D nin tam X-alt yarılatisleri bulunmuştur. Bu tam X-alt yarılatislerin hangi koşullar altında XI-alt yarılatis oldukları belirlenmiştir. Bu koşullar altında $B_X(D)$ nin sağ birim, idempotent ve regüler elemanlarının yapısının incelenmesi gerektiği elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, birleşimlerin tam X-yarılatisi olan D ye tam izomorf olan X-yarılatislerin sınıfı $\Sigma_2(X,9)$ olduğundan bu sınıftan alınan herhangi bir X-yarılatis ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarı grubunun sağ birim ve idempotent elemanlarının yapısı $B_X(D)$ nin sağ birim ve idempotent elemanları yardımıyla karakterize edilmiştir. $B_X(D)$ nin sağ birim ve idempotent elemanlarının yapısı ve ayrıca X sonlu bir küme iken $B_X(D)$ nin idempotent elemanlarının sayısını veren formül bulunmuştur. Dolayısıyla X sonlu bir küme iken $\Sigma_2(X,9)$ sınıfının yarılatisleri ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının idempotent elemanlarının sayısınının bu formül yardımıyla hesaplanabileceği elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, $\Sigma_2(X,9)$ sınıfının yarılatisleri ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının regüler elemanlarının yapısı $B_X(D)$ nin regüler elemanları yardımıyla tarif edilmiştir. Bununla birlikte X sonlu bir küme iken $\Sigma_2(X,9)$ sınıfının yarılatisleri ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının regüler elemanlarının sayısını veren formül elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Clifford A. ve Preston G., 1977. *Algebraic Theory of Semigroups*. American Mathematical Society. Mathematical Surveys Number: 7.

Davey B. A. ve Priestley H. A., 2001. *Introduction to Lattices and Order.* Cambridge. ISBN-10: 0521784514. 248 p.

Diasamidze Y. I. ve Makharadze S.,1999. Right zeros of complete semigroups of binary relations. *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 159 (3): 376-378.

Diasamideze Y. I., 2000. *Complete Semigroups of Binary Relations*. Ajara Publ. House. Batumi (in Russian). 176 p.

Diasamidze Y. I., 2001a. Divisibility of Elements in Complete Semigroups of Binary Relations. *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 164 (2): 225-227.

Diasamidze Y. I., 2001b. Right Units and Idempotent Elements of Complete Semigroups of Binary Relations. *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 164 (3): 443-446.

Diasamidze Y. I., 2003. Complete Semigroups of Binary Relations. *Journal of Mathematical Sciences*, 117 (4): 4271-4319.

Diasamidze Y. I, Makharadze S., Partenadze G. ve Givradze O., 2007. On Finite X - Semilattices of Unions. *Journal of Mathematical Sciences*, 141 (2): 1134-1181.

Diasamidze Y. I. ve Makharadze S., 2010. Complete Semigroups of Binary Relations Defined by X-Semilattices of Unions. *Journal of Mathematical Sciences*, 166 (5): 615-633.

Diasamidze Y. I. ve Makharadze S., 2013. *Complete Semigroups of Binary Relations.* Kriter Yayınevi, ISBN: 978-605-4613.

Givradze O., 2003. Some Properties of a Semigroup $B_X\left(D\right)$ Defined by a Semilattice of a Class $\sum_1\left(X,4\right)$. *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 167 (1): 43-46.

Howie J. M., 2003. *Fundamentals of Semigroup Theory.* Clarendon Press, Oxford.

Hungerford T. W. 1997. *Abstract Algebra.* Saunders College Pub. 588 p.

Liapin E. S. 1963. *Semigroups.* American Mathematical Society Providence (3d ed.), Rhode Island. 519 p.

Riguet J., 1948. Relations, Binaires, Fermetures, Correspondances. *de Galois, Buletin de Socit Mathematique de France,* 79: 114-155.

Riguet J., 1950. Quelques Propriety's des Relations Difonctionnelles. *Comptes Renlus Heb-Modaires des Seances de Academie des Sciences*, Vol. 230.

Schröder E., 1966. *Algebra der Logik* (*1890–1910),* Vols. I–III (reprint), Chelsea.

Zaretskii K. A., 1958. Abstract Characterization of the Semigroup of All Binary Relations. *Trans. A. I. Herzen Leningrad State Polytechn. Inst.*, 183: 251-263.

Zaretskii K. A., 1959. Representation of Ordered Semigroups of Binary Relations. *Izv. Vish. Uchebn. Zaved. Matematika*, 6: 48-50.

Zaretskii K. A., 1962. Regular Elements of the Semigroup of Binary Relations. *Uspekhi Mat, Nauk*, 17 (3): 177-189.

Zaretskii K. A., 1963. A Semigroup of Binary Relations. *Matem. Sbornik*, 61 (3): 291-305.

Zaretskii K. A., 1967. Abstract Characterization of the Class of Semigroups of Partially Reflective Binary Relations. *Sibirsk. Mat. Zh*., 8 (6).

Whitehead A.N. ve Russell B., 1925. *Principia Mathematica*. Vol. 1 (2nd ed.), Cambridge University Press.

ŞEKİLLER **Sayfa No**

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Didem YEŞİL SUNGUR

Doğum Yeri: Kayseri

Doğum Tarihi: 16/07/1983

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

1- Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, 2006-Devam ediyor

İLETİŞİM

E-posta adresi: dyesil@comu.edu.tr