T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BULANIK METRİK UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖKAY KARABACAK

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

ÇANAKKALE – 2022

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BULANIK METRİK UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖKAY KARABACAK

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

ÇANAKKALE – 2022

ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Gökay Karabacak
10/06/2022

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer hocam, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR'a hayata ve matematiğe ilişkin öğrendiğim ve öğreneceğim her şey için en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca her konuda destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşım Araş. Gör. Sevcan BULUT'a teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, maddi manevi her konuda beni sonuna kadar destekleyen, çalışmalarım süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen, hayatımın her evresinde bana destek olan ve borçlarını asla ödeyemeceğim sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Gökay Karabacak

Çanakkale, Haziran 2022

ÖZET

BULANIK METRİK UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK

Gökay Karabacak
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR
10/06/2022, 38

Bu tez çalışmasında, ilk olarak, reel sayı dizilerinde istatistiksel yakınsaklık, metrik uzaylarda ideal yakınsaklık ve bulanık metrik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramları sunuldu. Ardından, bulanık metrik uzaylarda ideal yakınsaklık (I-yakınsaklık), ideal Cauchy ($I-$Cauchy) dizisi, I^*-yakınsaklık, I^*-Cauchy dizisi kavramları tanımlandı. Ayrıca, çalışılan bu kavramların bulanık metrik uzaylardaki alışılmış kavramlardan daha genel olduğu gösterildi. Daha sonra, bir bulanık metrik uzaydaki bir dizinin ideal limit (I-limit) ve ideal yığılma ($I-$yığılma) noktaları kavramları tanımlandı ve bu kavramların bazı temel özellikleri incelendi. Son olarak, gelecek çalışmalar için bir araştırmaya yer verildi.

Anahtar sözcükler: İdeal Yakınsaklık, İdeal Cauchy Dizileri, İdeal Limit Noktaları, İdeal Yığılma Noktaları, Bulanık Metrik Uzaylar

ABSTRACT

IDEAL CONVERGENCE IN FUZZY METRIC SPACES

Gökay Karabacak
Çanakkale Onsekiz Mart University
School of Graduate Studies
Master of Science Thesis in Departmant of Mathematics
Advisor: Asst. Prof. Dr. Aykut OR
06/10/2022, 38

This thesis, firstly, presents the concepts of statistical convergence in real number sequences, ideal convergence in metric spaces, and statistical convergence in fuzzy metric spaces. Afterwards, it defines the concepts of ideal convergence (I-convergence), ideal Cauchy ($I-$Cauchy) sequences, I^*-convergence, I^*-Cauchy sequences in fuzzy metric spaces. This study has shown that these studied concepts are more general than ordinary concepts in fuzzy metric spaces. Then, it defines the concepts of ideal limit (I-limit) and ideal cluster ($I-$cluster) points of a sequence in these spaces and examines some basic properties of these concepts. Finally, this study discusses future research.

Keywords: Ideal Convergence, Ideal Cauchy Sequences, Ideal Limit Points, Ideal Cluster Points, Fuzzy Metric Spaces

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$A \sim B$	A ile B kümesinin simetrik farkı sonlu
$\lvert A \rvert$	A kümesinin kardinalitesi
(X,d)	Metrik uzay
l_∞	Tüm sınırlı diziler uzayı
S	Tüm istatistiksel yakınsak diziler uzayı
Γ_x	(x_n) dizisinin tüm yığılma noktaları kümesi
Λ_x	(x_n) dizisinin tüm limit noktaları kümesi
$*$	t-norm
$(M,\mu,*)$	Bulanık metrik uzay
$D(x,\varepsilon,u)$	Bulanık metrik uzayda açık yuvar
$\mu(\Gamma_x)$	Bulanık metrik uzaylarda bir (x_n) dizisinin tüm yığılma noktalarının kümesi
$\mu(\Lambda_x)$	Bulanık metrik uzaylarda bir (x_n) dizisinin tüm limit noktalarının kümesi

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

Dizilerin yakınsaklığı kavramı matematikte her zaman ilgi çeken bir konudur. Ancak, bilindiği üzere her dizi bir limit noktasına sahip olmayabilir. Bundan dolayı, 20. yüzyılın ortalarında birbirinden bağımsız olarak Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır ve yakınsak olmayan bazı dizilerin istatistiksel anlamda yakınsak olduğu gösterilmiştir. İstatististiksel yakınsaklık kavramıyla ilişkili olan asimptotik yoğunluk kavramı Niven (1951) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra, istatistiksel yakınsaklık kavramı Schoenberg (1959) tarafından bir toplanabilme yöntemi olarak çalışılmıştır. Ardından, Salat (1980) istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımını asimptotik yoğunluk kavramıyla tanımlanmıştır ve bir dizinin bir alt dizisi ve bu alt diziye ait bir indis kümesinin yoğunluğu yardımıyla istatistiksel yakınsaklık kavramının önemli bir karakterizasyonunu elde etmiştir. Fridy (1985) Cauchy dizisi kavramını istatistiksel olarak çalışmıştır ve istatistiksel yakınsak dizilerle istatistiksel Cauchy dizilerinin birbirine denk olduğunu göstermiştir. Fridy (1993) bir dizinin limit noktası kavramından farklı olan istatistiksel limit noktası ve istatistiksel yığılma noktası kavramlarını alt dizilerin yoğunluğunu kullanarak tanımlamıştır. Ayrıca, istatistiksel yakınsaklık kavramı, toplanabilme teorisi (Freedman ve Sember, 1981), yerel konveks dizi uzayları (Maddox, 1970), trigonometrik seriler (Zygmund, 1939), sayı teorisi (Erdos ve Tenenbaum, 1989) ve ölçü teorisi (Miller, 1995) gibi alanlarda çalışılmıştır.

Pozitif tamsayılar kümesi üzerinde bir I ideali aracılığıyla Kostryko vd. (2000) yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık kavramlarının bir genelleştirmesi olan $I-$yakınsaklık kavramını tanımlanmıştır. Buna ek olarak, aynı çalışmada ideal yakınsaklık ($I-$yakınsaklık) kavramıyla yakından ilişkili olan I^*-yakınsaklık kavramını ve istatistiksel limit noktası ve istatistiksel yığılma noktası kavramlarının bir doğal genellemesi olan $I-$limit noktası ve $I-$yığılma noktası kavramlarını çalışılmıştır. Ayrıca, Dems (2004) istatistiksel Cauchy dizisi (Fridy, 1985) kavramını ideallere genişletmiştir ve $I-$Cauchy dizisi kavramına giriş yapmıştır. Nabiev vd. (2007) I^*-Cauchy dizisi kavramını çalışmıştır ve $I-$Cauchy ve I^*-Cauchy diziler arasındaki ilişkileri araştırmıştır.

Zadeh (1965) çeşitli uygulama bilimlerinde matematiksel modelleme ve insan bilgisini bağdaştırmak amacıyla bulanık kümeler kavramını ortaya atmıştır. Bulanık kümeler kavramı, tıptan finansa, insan davranışı analizinden tüketici ürünlerine, makine kontrolünden hesaplamalı dilbilime kadar birçok alana uygulanmıştır. Aynı zamanda, mantık, kategori teorisi, topoloji, fonksiyonel analiz, cebir, çizge teorisi, genelleştirilmiş ölçü teorisi ve integral vb. teorilerin bulanık versiyonlarını geliştirmek için kapsamlı araştırmalar yapılmıştır. Metrik uzaylar teorisi matematik, fizik, bilgisayar bilimi, istatistik vb. alanlarda temel öneme sahiptir. Bulanık kümelerle ilgili literatürde bir çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalaradan biri de, Kramosil ve Michalek (1975) tarafından olasılıksal metrik uzay kavramını bulanık duruma genişleterek bulanık metrik kavramını ortaya atılmasıdır. Ancak, Kramosil ve Michalek (1975) anlamındaki bir bulanık metrik uzayın doğuracağı topoloji Hausdorff olmadığından dolayı, bulanık metrik uzay üzerinde bir Hausdorff topoloji elde etmek için bu tanıma George ve Veeramani (1994) daha güçlü koşullar ekleyerek yeni bir bulanık metrik tanımı ileri sürmüştür. Bu sayede bulanık metrik uzaylar üzerinde bir Hausdorff topolojisi elde etmişler ve bu uzayların bazı önemli topolojik özelliklerini incelemişler. Bu tez çalışması boyunca da George ve Veeramani (1994) anlamında bulanık metrik uzay tanımı kullanılmıştır. Son 20 yılda bu alanda yapılan çalışmalarda, topoloji ve fonksiyonel analizin temel kavramlarının ve özelliklerinin bulanık versiyonlarının incelenmesi öne çıkmıştır. Aynı zamanda, bulanık metrik kavramının kuantum parçacık fiziğindeki, özellikle hem sicim hem de e^{∞} teorisi açısından ve renkli görüntü işleme tekniklerindeki göz ardı edilemeyecek uygulamaları göz önünde bulundurulduğunda, bu uygulama alanlarının çeşitliliği, bulanık metrik uzayların önemini ve kullanışlılığını göstermektedir. Bunlara ek olarak, son yıllarda bulanık metrik uzaylarda birçok yakınsaklık türü tanımlanmıştır. Bu yakınsaklıklar arasında literatürde önemli bir yeri olan istatistiksel yakınsaklık kavramı Li vd. (2020) tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, çalışmada kullanılacak kavramlara ait genel bilgiler verildi. Üçüncü bölümde, bulanık metrik uzaylarda $I-$yakınsaklık, $I-$Cauchy dizisi, I^*-yakınsaklık ve I^*-Cauchy dizisi kavramları tanımlandı ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelendi. Dördüncü bölümde, bulanık metrik uzaylarda $I-$limit noktası ve $I-$yığılma noktası kavramları tanımlandı ve bu kavramlarla ilgili özellikler incelenerek aralarındaki ilişki verildi. Sonuç ve öneriler bölümünde bulanık metrik uzaylarda farklı yakınsaklık türlerinin çalışılabileceği ifade edildi.

İKİNCİ BÖLÜM

GENEL KAVRAMLAR

2.1. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde, yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramları incelendi. Ayrıca, istatistiksel yakınsaklık kavramının yoğunluk kavramıyla yakından ilişkili olan tanımına ve bir alt dizisi yardımıyla karakterizasyonuna yer verildi. Bunlara ek olarak, istatistiksel Cauchy dizisi kavramı tanıtılarak reel sayılar uzayında istatistiksel yakınsaklık ile bu kavramın denk olduğu ifade edildi. Son olarak, istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktaları kavramlarına ve bu kavramların bazı temel özelliklerine ilişkin bilgilere yer verildi.

Tanım 2.1. (Niven, 1951) $k \in \mathbb{N}$ için $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$ olmak üzere $A = (n_k)$ dizisinin alt yoğunluğu $\underline{\delta}(A)$ ve üst yoğunluğu $\overline{\delta}(A)$ sırasıyla

$$\underline{\delta}(A) := \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

ve

$$\overline{\delta}(A) := \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $A(n)$ n'den daha büyük olmayan A'nın tamsayılarının sayısını belirler. Eğer, $\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A)$ sağlanıyorsa A yoğunluğa sahiptir denir ve

$$\delta(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

biçimindedir.

Tanım 2.2. (Freedman ve Sember, 1981) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $P(\mathbb{N})$ doğal sayıların kuvvet kümesi olmak üzere bir $\underline{\delta} : P(\mathbb{N}) \to [0,1]$ fonksiyonu her $A, B \in P(\mathbb{N})$ için

i. $A \sim B \Rightarrow \underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B)$

ii. $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq \underline{\delta}(A \cup B)$

iii. $\underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq 1 + \underline{\delta}(A \cap B)$

iv. $\underline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$

koşullarını sağlıyorsa $\underline{\delta}$'ya bir alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu denir. Burada, $A \sim B$ ile A ve B kümelerinin simetrik farkının sonlu olduğu ifade edilmiştir.

Tanım 2.3. (Freedman ve Sember, 1981) $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $\underline{\delta}$ bir alt yoğunluk fonksiyonu olsun. O halde,

$$\overline{\delta}(A) := 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N} \setminus A)$$

biçiminde tanımlanan $\overline{\delta}$ fonksiyonuna bir üst asimptotik yoğunluk fonksiyonu denir.

Tanım 2.4. (Freedman ve Sember, 1981) $\underline{\delta}$ bir alt yoğunluk ve $\overline{\delta}$ bir üst yoğunluk fonksiyonu olsun. Eğer, $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta(A) = \underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A)$ oluyorsa δ fonksiyonuna asimptotik yoğunluk (kısaca yoğunluk) fonksiyonu denir. $\delta(A)$, A kümesinin yoğunluğu olarak ifade edilir.

Örnek 2.5. (Freedman ve Sember, 1981) $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in A : k \leq n\}|}{n}$$

biçiminde tanımlanan δ bir yoğunluk fonksiyonudur.

Örnek 2.6.

i. $A = \{1,2,3,\dots\}$ olsun. O halde, $|\{k \in A : k \leq n\}| = n$ olduğundan

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \in A : k \leq n\}| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$$

olur. Dolayısıyla, $\delta(A) = \delta(\mathbb{N}) = 1$ elde edilir.

ii. $A = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ olsun. O halde,

$$|\{k \in A : k \leq n\}| := \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{eğer } n \text{ çift ise,} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{eğer } n \text{ tek ise} \end{cases}$$

biçimindedir. Dolayısıyla,

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \in A : k \leq n\}| = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Benzer biçimde, $B = \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ ise

$$\delta(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \in B : k \leq n\}| = \frac{1}{2}$$

iii. $A = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$ olsun. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|\{k \in A : k \leq n\}| \leq \sqrt{n}$$

ve

$$0 \leq \delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \in A : k \leq n\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt{n} = 0$$

olduğundan $\delta(A) = 0$ biçimindedir.

Tanım 2.7. (Fast, 1951) (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}|}{n} = 0$$

oluyorsa (x_n) dizisi x_0 sayısına istatistiksel yakınsıyor denir ve $st - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ biçiminde gösterilir. Ayrıca, tüm istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile tanımlanır.

Not 2.8. Eğer, (x_n) dizisi 0 sayısına istatistiksel yakınsıyorsa bu diziye istatistiksel sıfır dizisi denir.

Tanım 2.9. (Zygmund, 1939) Eğer, bir $P(n)$ özelliği sıfır yoğunluklu bir küme haricinde sağlanıyorsa P özelliği hemen her n için sağlanır denir ve h.h.n ile gösterilir.

Tanım 2.10. (Buck, 1953) (x_n) bir reel sayı dizisi, $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $\delta(A) = 0$ olsun. Eğer, $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \geq N(\varepsilon)$ ve her $n \notin A$ için $|x_n - x_0| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi x_0 sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

Ayrıca, Fridy (1985) çalışmasında istatistiksel yakınsaklık kavramını yoğunluk kavramıyla tanımladı.

Tanım 2.11. (Fridy, 1985) (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}) = 0$$

oluyorsa (x_n) dizisi x_0 sayısına istatistiksel yakınsıyor denir.

İstatistiksel yakınsaklığın tanımından görüldüğü üzere eğer bir (x_n) dizisi bir $x_0 \in \mathbb{R}$ elemanına istatistiksel anlamda yakınsıyorsa x_0 elemanının keyfi bir ε komşuluğunda dizinin sonsuz elemanı varken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinde bulunan elemanların yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla, yine sonsuz sayıda eleman bulunabilir. Yakınsaklıkta bir N_ε'dan sonraki tüm terimlerin x_0'ın bir ε komşuluğuna düştüğünden bu komşuluk dışında kalan terimler sonlu sayıdadır ve yoğunluk tanımı gereği sonlu kümelerin yoğunluğu sıfır olduğundan yakınsak her dizinin istatistiksel yakınsak olduğu açıktır. Ancak, istatistiksel yakınsak her dizinin yakınsak olmadığı Örnek 2.12'dan görülür.

Örnek 2.12.

$$x_n := \begin{cases} n, & \exists k \in \mathbb{N} \ni n = k^2 \\ 0, & \forall k \in \mathbb{N}, n \neq k^2 \end{cases}$$

dizisi tanımlansın. O halde,

$$A = \{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{k \leq n : x_k \geq \varepsilon\} = \{k \leq n : x_k \neq 0\} = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$$

olmak üzere, Örnek 2.6 iii'den $\delta(A) = 0$ ve Tanım 2.7'den

$$st - \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

elde edilir. Ancak, bu dizi yakınsak değildir.

Ayrıca, yakınsaklık sınırlılığı gerektirirken Örnek 2.12'dan istatistiksel yakınsak bir dizinin sınırlı olması gerekmediği görülmektedir. Dolayısıyla, istatistiksel yakınsaklık sınırsız ıraksak dizileri de limitleyebilir. Öte yandan, $(x_n) = ((-1)^n)$ dizisi sınırlı bir dizi olmasına rağmen istatistiksel yakınsak bir dizi değildir. Bu nedenle, tüm sınırlı dizilerin uzayı olan l_∞ ile S uzayı birbirini kapsamazlar. Ancak,

$$x_n := \begin{cases} 5, & \exists k \in \mathbb{N} \ni n = k^2 \\ 0, & \forall k \in \mathbb{N}, n \neq k^2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan dizi ele alınırsa bu iki dizi uzayının arakesitinin boş olmadığı görülür.

Teorem 2.13. (Fridy, 1985) (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, $st - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ oluyorsa x_0 sayısı teklikle belirlidir.

Teorem 2.14. (Salat, 1980) (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. (x_n) dizisinin x_0 sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(A) = 1$ ve $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ olacak biçimde bir

$$A = \{n_k : t > k, n_k < n_t\} \subseteq \mathbb{N}$$

kümesi vardır.

Lemma 2.15. (Salat, 1980) (x_n) ve (y_n) reel sayı dizileri ve $x_0, y_0, \lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, $st - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ve $st - \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ ise

i. $st - \lim\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda x_0$

ii. $st - \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x_0 + y_0$

biçimindedir.

Tanım 2.16. (Fridy, 1985) (x_n) bir reel sayı dizisi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}|}{n} = 0$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine $\mathbb{R}$ üzerinde bir istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.17. (Fridy, 1985) (x_n) bir reel sayı dizisi olsun. O halde, aşağıdakiler denktir.

i. (x_n) dizisi istatistiksel yakınsaktır

ii. (x_n) dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir

iii. h.h.n için $x_n = y_n$ olacak biçimde yakınsak bir (y_n) dizisi vardır

Teorem 2.18. (Connor, 1988) (x_n) bir reel sayı dizisi, $x_0 \in \mathbb{R}$ ve $st - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ olsun. O halde, $x_n = y_n + z_n$ olacak biçimde x_0 elemanına yakınsak bir (y_n) dizisi ve istatistiksel sıfır (z_n) dizisi vardır.

Sonuç 2.19. (Salat, 1980; Fridy, 1985; Connor, 1988) (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, $st - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise (x_n) dizisi x_0 sayısına yakınsak bir alt diziye sahiptir.

Tanım 2.20. (Fridy, 1993) (x_n) bir reel sayı dizisi, (x_{n_k}), (x_n) dizisinin bir alt dizisi ve $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ olsun. Eğer, $\delta(A) = 0$ ise (x_{n_k}), (x_n) dizisinin zayıf (thin) alt dizisi olarak adlandırılır. Eğer, $\delta(A) \neq 0$ ise (x_{n_k}), (x_n) dizisinin zayıf olmayan (nonthin) alt dizisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.21. (Fridy, 1993) $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, (x_n) dizisi λ sayısına yakınsak olan ve zayıf olmayan bir alt diziye sahipse λ sayısına (x_n) dizisinin istatistiksel limit noktası denir ve (x_n) dizisinin tüm istatistiksel limit noktalarının kümesi Λ_x ile gösterilir.

Örnek 2.22.

$$x_n = \begin{cases} 1, & \exists k \in \mathbb{N} \ni n = k^2 \\ 0, & \forall k \in \mathbb{N}, n \neq k^2 \end{cases}$$

dizisi tanımlansın. O halde,

$$A = \{n_k \in \mathbb{N} : |x_{n_k} - 0| \geq \varepsilon\} = \{n_k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \geq \varepsilon\} = \{n_k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \neq 0\} = \{n_k^2 : n_k \in \mathbb{N}\}$$

olduğundan Örnek 2.6 iii'den $\delta(A) = 0$ biçimindedir. Yoğunluk tanımından

$$\delta(\{n_k \in \mathbb{N} : \forall t \in \mathbb{N}, n_k \neq t^2\}) \neq 0$$

ve

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = 0$$

olduğundan 0 elemanı (x_n) dizisinin bir istatistiksel limit noktasıdır. Kabul edelim ki $0 \neq a \in \mathbb{R}$, (x_n) dizisinin bir istatistiksel limit noktası olsun.

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = a$$

olacak biçimde bir tek $a = 1$ sayısı vardır. Ancak, bu alt dizisinin indis kümesinin yoğunluğu Örnek 2.12'den sıfırdır. Sonuç olarak, $\Lambda_x = \{0\}$ olur.

Tanım 2.23. (Fridy, 1993) $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $\gamma \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \gamma| < \varepsilon\}) \neq 0$ ise γ sayısına (x_n) dizisinin istatistiksel yığılma (cluster) noktası denir ve (x_n) dizisinin tüm yığılma noktalarının kümesi Γ_x ile gösterilir.

Lemma 2.24. (Fridy, 1993) $x = (x_n)$ reel sayı dizisi için $\Lambda_x \subseteq \Gamma_x$ biçimindedir.

Lemma 2.25. (Fridy, 1993) $x = (x_n)$ reel sayı dizisi için Γ_x kapalı bir kümedir.

2.2. İdeal Yakınsaklık

Bu bölümde, Kostryko vd. (2000) tarafından tanıtılan, yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık kavramlarının bir genelleştirmesi olan, ideal yakınsaklık kavramı ve Nabiev vd. (2007) tarafından tanıtılan ideal Cauchy dizisi kavramı incelendi. Ayrıca, ideal yakınsak her dizinin ideal Cauchy dizisi olduğu ifade edildi. Bunlara ek olarak, I^*-yakınsaklık, I^*-Cauchy kavramları verilerek bu kavramlar arasındaki ilişkiye bakıldı ve ideal yakınsak diziyle I^*-yakınsak dizi ve ideal Cauchy dizisiyle I^*-Cauchy dizisi arasındaki ilişkiye yer verildi. Son olarak, ideal limit ve ideal yığılma noktası kavamları ifade edildi.

Tanım 2.26. (Kostryko vd., 2000) X boştan farklı bir küme ve $I \subseteq P(X)$ olsun. Eğer,

i. $\emptyset \in I$

ii. $T, S \in I \Rightarrow T \cup S \in I$

iii. $(T \in I \wedge S \subseteq T) \Rightarrow S \in I$

koşulları sağlanıyorsa I ailesine X üzerinde bir ideal denir.

Tanım 2.27. (Kostryko vd., 2000) I, X üzerinde bir ideal olsun.

i. Eğer, $I \neq \emptyset$ ve $X \notin I$ oluyorsa I idealine bir aşikar olmayan (öz) ideal denir.

ii. Eğer, I bir öz ideal ve $\{\{x\} : x \in X\} \subseteq I$ oluyorsa I idealine bir uygun (admissible) ideal denir.

Örnek 2.28. (Kostryko vd., 2000)

I. $\mathbb{N}$ kümesinin sonlu altkümelerinin sınıfı

$$I_f = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ sonlu bir kümedir}\}$$

admissible idealdir. Gerçekten,

i. $\emptyset$ sonlu olduğundan $\emptyset \in I_f$

ii. $T, S \in I_f$ olsun. Sonlu iki kümenin birleşimleri sonlu olur. Yani, $T \cup S \in I_f$

iii. $T \in I_f$ ve $S \subset T$ olsun. Sonlu kümenin altkümeleri de sonlu olduğundan $S \in I_f$ olur.

O halde, I_f, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible idealdir. $\mathbb{N}$ sayılabilir sonsuz olduğundan $\mathbb{N} \notin I_f$. Dolayısıyla, I_f, $\mathbb{N}$ kümesinde bir öz idealdir.

II. Benzer şekilde,

$$I_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$$

bir admissible idealdir.

Örnek 2.29. (Kostryko vd., 2000) Her $k \in \mathbb{N}$ için T_k bir sonsuz küme olmak üzere $\{T_k : k \in \mathbb{N}\}$ ailesi $\mathbb{N}$'nin bir ayrışımı olsun. O halde,

$$K = \{A \subset \mathbb{N} : k \in \mathbb{N} \ni A \subseteq T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k\}$$

ailesi bir admissible idealdir.

Tanım 2.30. (Kostryko vd., 2000) I bir admissible ideal ve (P_i) I üzerinde bir küme dizisi olsun. Ayrıca, her $i \in \mathbb{N}$ için P_i sayılabilir ve her $i, j \in \mathbb{N}$ için $i \neq j$ iken $P_i \cap P_j = \emptyset$ olsun. Eğer, her $i \in \mathbb{N}$ için $P_i \Delta R_i$ sonlu ve $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} R_i \in I$ şartlarını sağlayan bir I üzerinde bir (R_i) küme dizisi varsa I ideali toplamsallık özelliğini (TÖ) sağlar denir.

Not 2.31. (Kostryko vd., 2000) $R = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} R_i \in I$ olmak üzere her $i \in \mathbb{N}$ için $R_i \subset R$ ve I bir ideal olduğundan $R_i \in I$ sağlanır.

Tanım 2.32. (Kostryko vd., 2000) X boştan farklı bir küme ve $\emptyset \neq F \subseteq P(X)$ olsun. Eğer,

i. $\emptyset \notin F$,

ii. $T, S \in F \Rightarrow T \cap S \in F$,

iii. $(S \in F \wedge S \subseteq T) \Rightarrow T \in F$.

koşulları sağlanıyorsa F ailesine X üzerinde bir süzgeç denir.

Not 2.33. (Kostryko vd., 2000) I, X üzerinde bir öz ideal olmak üzere

$$F(I) = \{X \setminus S : S \in I\}$$

kümesi X üzerinde bir süzgeçtir ve I idealine karşılık gelen süzgeç olarak adlandırılır.

Önerme 2.34. (Nabiev vd., 2007) $I \subseteq P(\mathbb{N})$ (TÖ) koşulunu sağlayan bir admissible ideal, (P_i), $P(\mathbb{N})$ üzerinde bir küme dizisi ve her $i \in \mathbb{N}$ için $P_i \in F(I)$ olsun. O halde, her $i \in \mathbb{N}$ için $P_i \Delta P$ sonlu ve $P \in F(I)$ şartlarını sağlayan bir $P \subset \mathbb{N}$ vardır.

Tanım 2.35. (Kostryko vd., 2000) (X,d) bir metrik uzay, (x_n) X'de bir dizi, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir öz ideal ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_0) \geq \varepsilon\} \in I$$

koşulu sağlanıyorsa (x_n) dizisi x_0 elemanına ideal yakınsaktır ($I-$yakınsaktır) denir ve $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $x_n \xrightarrow{I} x_0$ biçiminde gösterilir.

Not 2.36. (Kostryko vd., 2000) Eğer, I bir admissible ideal ise yakınsaklık $I-$yakınsaklığı gerektirir.

Teorem 2.37. (Kostryko vd., 2000) (X,d) bir metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal, (x_n) X'de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun.

i. Her sabit $(x_0, x_0, ..., x_0, ...)$ dizisi x_0 noktasına I-yakınsaktır.

ii. Eğer $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ve $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_1$ ise $x_0 = x_1$ dir.

iii. Eğer, I bir sonsuz küme içeriyorsa $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ iken (x_n) dizisinin x_0 sayısına $I-$yakınsak olmayan bir (y_n) alt dizisi vardır.

Örnek 2.38. (Kostryko vd., 2000)

i. Eğer,

$$I = I_f = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ sonlu bir kümedir}\}$$

seçilirse I_f, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal olur ve $I-$yakınsaklık yakınsaklığa denk olur.

ii. Eğer,

$$I = I_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$$

seçilirse I_δ, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal olur ve $I-$yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa denk olur.

Teorem 2.39. (Nabiev vd., 2007) I, (TÖ) koşulunu sağlayan bir ideal ve $x = (x_n)$, X'de bir dizi olsun. O halde, aşağıdaki koşullar denktir.

i. $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

ii. $x = y + z$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ ve $\operatorname{supp}(z) = \{n \in \mathbb{N} : z_n \neq \theta_X\} \in I$ şartlarını sağlayan $y = (y_n), z = (z_n) \subset X$ dizileri vardır.

Tanım 2.40. (Nabiev vd., 2007) (X, d) bir metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal ve (x_n) X'de bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_N) \geq \varepsilon\} \in I$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine X üzerinde bir ideal Cauchy ($I-$Cauchy) dizisi denir.

Örnek 2.41. (Nabiev vd., 2007)

i. Eğer,

$$I = I_f = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ sonlu bir kümedir}\}$$

seçilirse I_f, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal olur ve $I-$Cauchy dizisi Cauchy dizisine denk olur.

ii. Eğer,

$$I = I_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$$

seçilirse I_δ, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal olur ve $I-$Cauchy dizisi istatistiksel Cauchy dizisine denk olur.

Teorem 2.42. (Nabiev vd., 2007) I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal olsun. O halde, her $I-$yakınsak dizi bir $I-$Cauchy dizisidir.

Tanım 2.43. (Kostryko vd., 2000) (X,d) bir metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir öz ideal, (x_n) X'de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer,

$$\lim_{h_k \to \infty} x_{h_k} = x_0$$

olacak biçimde

$$H = \{h_k : t > k,\, h_k < h_t\} \in F(I)$$

kümesi varsa (x_n) dizisi x_0 elemanına I^*-yakınsak denir ve $I^* - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $x_n \xrightarrow{I^*} x_0$ biçiminde gösterilir.

Teorem 2.44. (Kostryko vd., 2000) (X,d) bir metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal, (x_n) X'de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. O halde, $I^* - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ iken $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ dır.

Teorem 2.45. (Kostryko vd., 2000) (X,d) bir metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal, (x_n) X'de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun.

i. Eğer, I ideali (TÖ) koşulunu sağlıyorsa $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ iken $I^* - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ olur.

ii. Eğer, X en az bir yığılma noktasına sahipse ve $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ iken $I^* - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ oluyorsa I ideali (TÖ) koşulunu sağlar.

Teorem 2.46. (Kostryko vd., 2000) (X,d) bir metrik uzay ve I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal olsun. Eğer, X kümesi bir yığılma noktasına sahip değilse I ve I^*-yakınsaklık denktir.

Tanım 2.47. (Kostryko vd., 2000) (X,d) bir metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal ve (x_n) X'de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{h_k, h_p \to \infty} d(x_{h_k}, x_{h_p}) = 0$$

olacak biçimde bir

$$H = \{h_k : t > k, h_k < h_t\} \in F(I)$$

kümesi varsa (x_n) dizisine X üzerinde bir I^*-Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.48. (Nabiev vd., 2007) (X,d) bir metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal ve (x_n) X'de bir dizi olsun. Eğer, (x_n) dizisi I^*-Cauchy dizisiyse $I-$Cauchy dizisidir.

Teorem 2.49. (Nabiev vd., 2007) (X,d) bir metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal ve (x_n) X'de bir dizi olsun. O halde, (x_n) dizisi $I-$Cauchy dizisi iken I^*-Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul I idealinin (TÖ) koşulunu sağlamasıdır.

Tanım 2.50. (Kostryko vd., 2000) (X,d) bir metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal ve (x_n) X'de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = x_0$$

olacak biçimde bir

$$H = \{n_k : t > k, n_k < n_t\} \notin I$$

kümesi varsa x_0 elemanına (x_n) dizisinin bir $I-$limit noktası denir ve (x_n) dizisinin tüm $I-$limit noktalarının kümesi $I(\Lambda_x)$ ile gösterilir.

Tanım 2.51. (Kostryko vd., 2000) (X,d) bir metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal ve (x_n) X'de bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : d(x_k, x_0) < \varepsilon\} \notin I$$

oluyorsa x_0 elemanına (x_n) dizisinin bir $I-$yığılma noktası denir ve (x_n) dizisinin tüm $I-$yığılma noktalarının kümesi $I(\Gamma_x)$ ile gösterilir.

2.3. Bulanık Metrik Uzaylar

2.3.1. Genel Bilgiler

Bu bölümde, ilk olarak t-norm ve bulanık küme tanımları verildi. Ardından, Kramosil ve Michalek (1975) ve George ve Veeramani (1994) anlamında bulanık metrik tanımları verilerek bazı bulanık metrik örnekleri incelendi. Son olarak bulanık metrik uzaylarda açık yuvar, yakınsaklık ve Cauchy dizisi kavramlarına yer verildi.

Tanım 2.52. (George ve Veeramani, 1994) $* : [0,1]^2 \to [0,1]$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $x_1, x_2, x_3 \in [0,1]$ için

i. $*(x_1,x_2) = *(x_2,x_1)$

ii. $*(x_1,*(x_2,x_3)) = *(*(x_1,x_2),x_3)$

iii. $x_2 \leq x_3 \Rightarrow *(x_1,x_2) \leq *(x_1,x_3)$

iv. $*(x_1,1) = *(1,x_1) = x_1$

koşulları sağlanıyorsa $*$ fonksiyonuna bir üçgensel norm (t-norm) denir.

Örnek 2.53. (George ve Veeramani, 1994) Aşağıdaki fonksiyonlar birer t-normdur:

(1) $a * b = ab$ (Çarpım t-normu)

(2) $a * b = \min\{a,b\}$ (Minimum t-normu)

Tanım 2.54. (Zadeh, 1965) E boştan farklı bir küme ve $\mu : E \to [0,1]$ bir fonksiyon olsun. O halde, μ'nün grafiği olan $\{(x,\mu(x)) : x \in E\}$ kümesine E üzerinde bir bulanık küme denir.

Tanım 2.55. (Kramosil ve Michalek, 1975) M keyfi bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve μ, $M^2 \times [0,\infty)$ üzerinde bir bulanık küme olsun. O halde, her $u,v > 0$ ve $x_1,x_2,x_3 \in M$ için *i.* $\mu(x_1,x_2,0)=0$

ii. $\mu(x_1,x_2,u)=1 \Leftrightarrow x_1=x_2$

iii. $\mu(x_1,x_2,u)=\mu(x_2,x_1,u)$

iv. $\mu(x_1,x_3,u+v)\geq \mu(x_1,x_2,u)*\mu(x_2,x_3,v)$

v. Her $u\in[0,\infty)$ için $(\mu)_{x_1x_2}=\mu(x_1,x_2,u)$ biçiminde tanımlanan $(\mu)_{x_1x_2}:[0,\infty)\to[0,1]$ fonksiyonu soldan süreklidir

koşulları sağlanıyorsa $(M,\mu,*)$ üçlüsüne bir bulanık metrik uzay denir.

Not 2.56. $\mu(x_1,x_2,u)$ değerine u parametresine göre x_1 ve x_2 noktaları arasındaki mesafe olarak bakılabilir. Bu durum, $u>0$ için x_1 ve x_2 arasındaki mesafenin sıfır (yani $x_1=x_2$) olması $\mu(x_1,x_2,u)=1$ biçiminde, x_1 ve x_2 arasındaki mesafenin sonsuz olması ise $\mu(x_1,x_2,u)=0$ biçiminde ifade edilebilir. Kramosil ve Michalek (1975) anlamındaki bir bulanık metrik uzayın oluşturacağı topoloji Hausdorff topoloji olmadığından, bu durumu ortadan kaldırmak için Tanım 2.55 değiştirilerek George ve Veeramani (1994) tarafından aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 2.57. (George ve Veeramani, 1994) M keyfi bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve μ, $M^2\times(0,\infty)$ üzerinde bir bulanık küme olsun. O halde, her $u,v>0$ ve $x_1,x_2,x_3\in M$ için

i. $\mu(x_1,x_2,u)>0$

ii. $\mu(x_1,x_2,u)=1 \Leftrightarrow x_1=x_2$

iii. $\mu(x_1,x_2,u)=\mu(x_2,x_1,u)$

iv. $\mu(x_1,x_3,u+v)\geq \mu(x_1,x_2,u)*\mu(x_2,x_3,v)$

v. Her $u>0$ için $(\mu)_{x_1x_2}(u)=\mu(x_1,x_2,u)$ biçiminde tanımlanan $(\mu)_{x_1x_2}:(0,\infty)\to(0,1]$ fonksiyonu süreklidir koşulları sağlanıyorsa $(M,\mu,*)$ üçlüsüne bir bulanık metrik uzay denir. Ayrıca, $(\mu,*)$ ikilisine, M üzerinde bir bulanık metrik denir.

Örnek 2.58. (George ve Veeramani, 1994) $M=\mathbb{R}$ olsun ve $a*b=ab$ t-normu göz önüne alınsın. O halde, her $u>0$ ve $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ için

$$\mu(x_1,x_2,u)=\frac{1}{e^{\frac{|x_1-x_2|}{u}}}$$

olmak üzere $(M,\mu,*)$ üçlüsü George ve Veeramani (1994) anlamında bir bulanık metrik uzaydır.

Örnek 2.59 her metriğin bir bulanık metrik ürettiğini ve dolayısıyla da bulanık metrik uzay kavramının metrik uzay kavramının bir genellemesi olduğunu gösterir.

Örnek 2.59. (George ve Veeramani, 1994) (M,d) bir metrik uzay olsun ve $a*b=ab$ t-normu göz önüne alınsın. O halde, $x_1,x_2\in M$ ve $k,m,n,u>0$ için

$$\mu(x_1,x_2,u)=\frac{ku^n}{ku^n+md(x_1,x_2)}$$

olmak üzere $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzaydır ve $(\mu,*)$ bulanık metriğine d metriğinin ürettiği bulanık metrik denir.

Tanım 2.60. (Kaleva ve Seikkala, 1984) $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0\in M$ olsun. Her $\varepsilon\in(0,1)$ ve $u>0$ için $n\geq N(\varepsilon)$ iken

$$\mu(x_n,x_0,u)>1-\varepsilon$$

olacak biçimde bir $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ varsa veya denk olarak

$$\lim_{n\to\infty}\mu(x_n,x_0,u)=1$$

sağlanıyorsa (x_n) dizisi x_0 elemanına yakınsaktır denir.

Tanım 2.61. (George ve Veeramani, 1994) $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay ve $x_1 \in M$ olsun. O halde, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$D(x_1,\varepsilon,u) = \{x_2 \in M : \mu(x_1,x_2,u) > 1-\varepsilon\}$$

kümesi x_1 civarında $\varepsilon-$açık yuvar (açık yuvar) olarak adlandırılır.

Tanım 2.62. (Kaleva ve Seikkala, 1984) $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n) M'de bir dizi olsun. Her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için $n,m \geq N(\varepsilon)$ iken

$$\mu(x_n,x_m,u) > 1-\varepsilon$$

olacak biçimde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa veya denk olarak

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu(x_n,x_m,u) = 1$$

sağlanıyorsa (x_n) dizisine M üzerinde bir Cauchy dizisi denir.

2.3.2. Bulanık Metrik Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde, Li vd. (2020) tarafından tanımlanan bulanık metrik uzaylarda yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramı ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 2.63. (Li vd., 2020) $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n) M'de bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : \mu(x_n,x_0,u) \leq 1-\varepsilon\}|}{n} = 0$$

veya

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \mu(x_n,x_0,u) \leq 1-\varepsilon\}) = 0$$

oluyorsa (x_n) dizisi bir $x_0 \in M$ elemanına istatistiksel yakınsıyor denir ve $sts-\lim\limits_{n\to\infty} \mu(x_n,x_0,u) = 1$ biçiminde gösterilir.

Teorem 2.64. (Li vd., 2020) $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n) M'de bir dizi olsun. Eğer, (x_n) dizisi yakınsaksa (x_n) istatistiksel yakınsaktır.

Örnek 2.65. (Li vd., 2020) $M=[1,3]$ olsun ve $a*b=ab$ t-normu verilsin. Her $u>0$ ve $x_1,x_2\in M$ için

$$\mu(x_1,x_2,u)=\frac{u}{u+|x_1-x_2|}$$

olmak üzere $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzaydır. Ayrıca, M kümesinde

$$x_n:=\begin{cases} 2, & \exists m\in\mathbb{N}\ni n=\frac{m(m+3)}{2} \\ 1, & \text{diğer durumlar}\end{cases}$$

ile tanımlı (x_n) dizisi göz önüne alınsın. (x_n) yakınsak değildir. Ancak, (x_n) 1 sayısına istatistiksel yakınsaktır. Gerçekten, $\varepsilon\in(0,1)$ ve $u>0$ için

$$A(\varepsilon,u):=\{n\in\mathbb{N}:\mu(x_n,1,u)>1-\varepsilon\}$$

kümesini göz önüne alalım. $\varepsilon\in\left(\frac{1}{u+1},1\right)$ olması durumunda her $m\in\mathbb{N}$ için $n\neq\frac{m(m+3)}{2}$ iken

$$\mu(x_n,1,u)=1>1-\varepsilon$$

ve bazı $m\in\mathbb{N}$ için $n=\frac{m(m+3)}{2}$ iken

$$\mu(x_n,1,u)=\frac{u}{u+1}=1-\frac{1}{u+1}>1-\varepsilon$$

elde edilir. Buradan, her $n\in\mathbb{N}$ için $\mu(x_n,1,u)>1-\varepsilon$ olur. Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|A(n)|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$$

elde edilir. Ayrıca, $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{u+1}\right]$ olması durumunda her $m\in\mathbb{N}$ için $n\neq\frac{m(m+3)}{2}$ iken

$$\mu(x_n,1,u)=1>1-\varepsilon$$

ve bazı $m\in\mathbb{N}$ için $n=\frac{m(m+3)}{2}$ iken

$$\mu(x_n,1,u)=\frac{u}{u+1}=1-\frac{1}{u+1}\leq 1-\varepsilon$$

elde edilir. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $n = \frac{m_0(m_0+3)}{2}$ olacak biçimde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ varsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A(n)|}{n} = \lim_{m_0\to\infty} \frac{\frac{m_0(m_0+3)}{2} - m_0}{\frac{m_0(m_0+3)}{2}} = \lim_{m_0\to\infty} \frac{m_0+1}{m_0+3} = 1$$

bulunur. Ayrıca, eğer her $m \in \mathbb{N}$ için $n \neq \frac{m(m+3)}{2}$ oluyorsa $n = \frac{m_1(m_1+3)}{2} - i$ olacak biçimde $i \in \mathbb{N}$ için $1 \leq i \leq m_1$ şartını sağlayan bir $m_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan,

$$1 \leq i \leq m_1 \Rightarrow \frac{i}{m_1^2} \leq \frac{1}{m_1^2} \leq \frac{1}{m_1}$$

olduğundan $\lim\limits_{m_1\to\infty} \frac{i}{m_1^2} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, her $m \in \mathbb{N}$ için $n \neq \frac{m(m+3)}{2}$ şartını sağlayan n için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A(n)|}{n} = \lim_{m_1\to\infty} \frac{\frac{m_1(m_1+3)}{2} - i - (m_1 - 1)}{\frac{m_1(m_1+3)}{2} - i} = \lim_{m_1\to\infty} \frac{m_1^2 + m_1 - 2i + 2}{m_1^2 + 3m_1 - 2i} = 1$$

elde edilir. Sonuç olarak, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, 1, u) > 1 - \varepsilon\}) = 1$$

bulunur. Yani, (x_n) dizisi istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 2.66. (Li vd., 2020) $(M, \mu, *)$ bir bulanık metrik uzay, (x_n) M'de bir dizi ve $x_1, x_2 \in M$ olsun. Eğer, (x_n) dizisi x_1 ve x_2 elemanlarına istatistiksel yakınsaksa $x_1 = x_2$ biçimindedir.

Teorem 2.67. (Li vd., 2020) $(M, \mu, *)$ bir bulanık metrik uzay, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0 \in M$ olsun. O halde, (x_n) dizisi x_0 elemanına istatistiksel yakınsaktır gerek ve yeter koşul $\delta(A) = 1$ ve $\lim\limits_{n_k\to\infty} \mu(x_{n_k}, x_0, u) = 1$ olacak biçimde bir

$$A = \{n_k : t > k,\, n_k < n_t\} \subseteq \mathbb{N}$$

kümesi vardır.

Tanım 2.68. (Li vd., 2020) $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n) M'de bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \mu(x_k, x_N, u) \leq 1-\varepsilon\}) = 0$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisi bir istatistiksel Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

Teorem 2.69. (Li vd., 2020) $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n) M'de bir dizi olsun. Eğer, (x_n) dizisi istatistiksel yakınsaksa (x_n) bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 2.70. (Li vd., 2020) $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n) M'de bir dizi olsun. O halde, (x_n) dizisi bir istatistiksel Cauchy dizisidir gerek ve yeter koşul $\delta(A) = 1$ ve $\lim\limits_{n_k,n_p\to\infty} \mu(x_{n_k}, x_{n_p}, u) = 1$ olacak biçimde bir

$$A = \{n_k : t > k,\, n_k < n_t\} \subseteq \mathbb{N}$$

kümesi vardır.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

BULANIK METRİK UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK VE İDEAL CAUCHY DİZİLERİ

Bu bölümde, bulanık metrik uzaylarda ideal yakınsaklık, ideal Cauchy dizisi, I^*-yakınsaklık ve I^*-Cauchy dizisi kavramları tanımlandı. İdeal yakınsaklık kavramının yakınsaklığın sağladığı bazı özellikleri sağlayıp sağlamadığı araştırıldı. Bunlara ek olarak, bu uzaylarda ideal yakınsaklık ile ideal Cauchy dizisi ve I^*-yakınsaklık ile I^*-Cauchy dizisi arasındaki ilişkilere yer verildi. Son olarak, ideal yakınsaklık ile I^*-yakınsaklık ve ideal Cauchy dizisi ile I^*-Cauchy dizisi arasındaki ilişki incelendi.

Tanım 3.1. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir öz ideal, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0 \in M$ olsun. Eğer, (x_n) dizisi her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$A(u,\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n,x_0,u) \leq 1-\varepsilon\} \in I$$

koşulunu sağlıyorsa (x_n) dizisi x_0 elemanına $\mu(I)-$yakınsak denir ve

$$\mu(I) - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

veya $x_n \xrightarrow{\mu(I)} x_0$ biçiminde gösterilir. Burada, x_0, (x_n) dizisinin bir $\mu(I)-$limit noktası olarak adlandırılır.

Not 3.2. Eğer, I admissible bir ideal ise bulanık metrik uzaylarda yakınsaklık $\mu(I)-$yakınsaklığı gerektirir.

Örnek 3.3.

i. Eğer,

$$I = I_f = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ sonlu bir kümedir}\}$$

seçilirse I_f, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal olur ve $\mu(I)-$yakınsaklık bulanık metrik uzaylardaki yakınsaklığa denk olur.

ii. Eğer,

$$I = I_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$$

seçilirse I_δ, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal olur ve $\mu(I)-$yakınsaklık bulanık metrik uzaylardaki istatistiksel yakınsaklığa denk olur.

Teorem 3.4. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0, x_1 \in M$ olsun. O halde,

i. Her sabit $(x_0, x_0, \ldots, x_0, \ldots)$ dizisi x_0 noktasına $\mu(I)$-yakınsaktır.

ii. Eğer, $\mu(I) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ve $\mu(I) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_1$ ise $x_0 = x_1$ dir.

iii. Eğer, I bir sonsuz küme içeriyorsa $\mu(I) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ iken (x_n) dizisinin x_0 sayısına $\mu(I)-$yakınsak olmayan bir (y_n) alt dizisi vardır.

KANIT. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0, x_1 \in M$ olsun.

i. Kabul edelim ki, $(x_n) = (x_0, x_0, x_0, \ldots, x_0, \ldots)$ olsun. Her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$\mu(x_n, x_0, u) = \mu(x_0, x_0, u) = 1 > 1 - \varepsilon$$

olduğundan (x_n) dizisi yakınsaktır. Ayrıca, I bir admissible ideal olduğundan (x_n) dizisi $\mu(I)-$yakınsak olur.

ii. Kabul edelim ki, (x_n), $\mu(I)-$yakınsak iken yakınsadığı nokta tek olmasın. Yani, $\mu(I) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\mu(I) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_1$ ve $x_0 \neq x_1$ olsun. $u > 0$ ve $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $(n = 2, 3, \ldots)$ seçelim. O halde, Not 2.33'dan

$$\mathbb{N} \setminus A = \{n : \mu(x_n, x_0, u) > 1 - \varepsilon\},\ \ \mathbb{N} \setminus B = \{n : \mu(x_n, x_1, u) > 1 - \varepsilon\} \in F(I)$$

kümeleri vardır. Bu durumda, $(\mathbb{N} \setminus A) \cap (\mathbb{N} \setminus B) \in F(I)$ olur. Dolayısıyla, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$\mu(x_m, x_0, u) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \mu(x_m, x_1, u) > 1 - \varepsilon$$

olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan, $\mu(x_0, x_1, u) = 1$ bulunur. Bu ise $x_0 \neq x_1$ olmasıyla çelişir. O halde, (x_n) $\mu(I)-$yakınsak iken yakınsadığı nokta tektir.

iii. Kabul edelim ki, $A = \{n_k : t > k, n_k < n_t\} \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz kümesi I idealine ait olsun.

$$B = \mathbb{N} \setminus A = \{m_k : t > k, m_k < m_t\}$$

alalım. I bir admissible ideal olduğundan B kümesi de sonsuz çoklukta elemana sahiptir.

$$x_n := \begin{cases} x_0, & n \in A \\ x_1, & n \in B \end{cases}$$

biçiminde bir dizi tanımlansın ve $x_0 \neq x_1$ olsun. $\mu(I) - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ olduğu açıktır. Ayrıca, $(x_{m_k}) = (x_1, x_1, \ldots, x_1, \ldots)$, (x_n) dizisinin sabit bir alt dizisi olup $\mu(I) - \lim_{m_k\to\infty} x_{m_k} = x_1$. Dolayısıyla, I bir sonsuz küme içeriyorsa $\mu(I) - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ iken (x_n) dizisinin x_0 sayısına $\mu(I)-$yakınsak olmayan bir (y_n) alt dizisi vardır.

□

Tanım 3.5. $(M, \mu, *)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal ve (x_n) M'de bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$A(u, \varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, x_N, u) \leq 1 - \varepsilon\} \in I$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisine M üzerinde bir $\mu(I)-$Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.6. $(M, \mu, *)$ bir bulanık metrik uzay ve I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal olsun. O halde, her $\mu(I)-$yakınsak dizi $\mu(I)-$Cauchy dizisidir.

KANIT. Kabul edelim ki $(M, \mu, *)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal ve $\mu(I) - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ olsun. O halde, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$A(u, \varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, x_0, u) \leq 1 - \varepsilon\} \in I$$

olur. Admissible ideal tanımından $N \notin A(u,\varepsilon)$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır.

Kabul edelim ki,

$$B = \{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, x_N, u) \leq \delta(\varepsilon)\}$$

olsun. O halde,

$$\mu(x_n, x_N, u) \geq \mu\left(x_n, x_0, \frac{u}{2}\right) * \mu\left(x_N, x_0, \frac{u}{2}\right)$$

eşitsizliğinden her $n \in B$ için

$$\delta(\varepsilon) \geq (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon) \geq \mu\left(x_n, x_0, \frac{u}{2}\right) * \mu\left(x_N, x_0, \frac{u}{2}\right)$$

olur. Ayrıca, $N \notin A(u,\varepsilon)$ olduğundan $\mu(x_N, x_0, u) > 1-\varepsilon$ sağlanır. Dolayısıyla, $\mu(x_n, x_0, u) \leq 1-\varepsilon$ ve $n \in A(u,\varepsilon)$ olur. Bu durumda, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için $B \subseteq A(u,\varepsilon) \in I$ elde edilir. Sonuç olarak, (x_n) dizisi $\mu(I)-$Cauchy dizisidir. □

Tanım 3.7. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0 \in M$ olsun. Eğer,

$$\lim_{h_k \to \infty} \mu(x_{h_k}, x_0, u) = 1 \tag{3.1}$$

olacak biçimde bir

$$H = \{h_k : t > k,\, h_k < h_t\} \in F(I)$$

kümesi varsa (x_n) dizisi x_0 elemanına $\mu(I^*)-$yakınsaktır denir ve $\mu(I^*) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $x_n \xrightarrow{\mu(I^*)} x_0$ biçiminde gösterilir.

Teorem 3.8. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0 \in M$ olsun. Eğer, $\mu(I^*) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise $\mu(I) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ dır.

KANIT. Kabul edelim ki, I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal ve $\mu(I^*) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ olsun. O halde,

$$H = \mathbb{N} \setminus K = \{h_k : t > k,\, h_k < h_t\}$$

olacak biçimde (3.1) şartını sağlayan bir $K \in I$ kümesi vardır. $u > 0$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ için (3.1) ifadesinden $n > k_0$ iken $\mu(x_n, x_0, u) > 1-\varepsilon$ olacak biçimde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$A(u,\varepsilon) = \{n : \mu(x_n, x_0, u) \leq 1-\varepsilon\}$$

alınırsa

$$A(u,\varepsilon) \subseteq K \cup \{h_1, h_2, \ldots, h_{k_0}\}$$

elde edilir. I bir admissible ideal ve $K \in I$ olduğundan

$$K \cup \{h_1, h_2, \ldots, h_{k_0}\} \in I$$

olur ve dolayısıyla $A(u,\varepsilon) \in I$ olur. Yani, $\mu(I) - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ elde edilir. □

Örnek 3.9. Örnek 2.59'da $(\mathbb{R}, |.|)$ metrik uzayı, $a*b = ab$ t-normu ve $k = m = n = 1$ için

$$\mu(x_1, x_2, u) = \frac{u}{u + |x_1 - x_2|}$$

bulanık metriğini ve Örnek 2.29'de verilen $I = K$ idealini alalım. Kabul edelim ki, x_0 $\mathbb{R}$'nin bir yığılma noktası olsun. x_0 yığılma noktası olduğundan $\lim_{n\to\infty} \mu(x_n, x_0, u) = 1$ olacak biçimde $\mathbb{R}$'de bir (x_n) dizisi vardır. $j = 1, 2, \ldots$ için $n \in T_j$ ise $y_n = x_j$ olacak biçimde bir (y_n) dizisi tanımlansın. $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için $\frac{1}{m} < \varepsilon$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ seçilsin. O halde,

$$A(u,\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \mu(y_n, x_0, u) \leq 1-\varepsilon\} \subseteq T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_m$$

olur. Dolayısıyla, ideal tanımından $A(u,\varepsilon) \in I$ ve buradan $\mu(I) - \lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ elde edilir. Varsayalım ki $\mu(I^*) - \lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ olsun. O zaman

$$H = \{m_k : t > k,\, m_k < m_t\} \in I$$

olacak biçimde bir $\lim_{n\to\infty} \mu(y_n, x_0, u) = 1$ vardır. İdealin tanımından,

$$H \subseteq T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_s$$

olacak biçimde bir $s \in \mathbb{N}$ vardır. Ancak, $T_{s+1} \subseteq \mathbb{N} \setminus H$ ve sonsuz sayıdaki k'lar için $y_{m_k} = \frac{1}{s+1}$ biçimindedir. Bu yüzden, $\lim_{m_k\to\infty} \mu(y_{m_k}, x_0, u) = 1$ gerçeklenmez.

Teorem 3.10. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0 \in M$ olsun.

i. Eğer, I ideali (TÖ) koşulunu sağlıyorsa $\mu(I)-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ iken $\mu(I^*)-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ olur.

ii. Eğer, M en az bir yığılma noktasına sahipse ve $\mu(I)-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ iken $\mu(I^*)-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ oluyorsa I ideali (TÖ) koşulunu sağlar.

KANIT. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0 \in M$ olsun.

i. Kabul edelim ki, $x_n \xrightarrow{\mu(I)} x_0$ ve I, (TÖ) koşulunu sağlasın. O halde, her $u>0$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ için

$$A(u,\varepsilon)=\{n\in\mathbb{N} : \mu(x_n,x_0,u)\leq 1-\varepsilon\}\in I$$

olur. Öte yandan,

$$P_1=\left\{n\in\mathbb{N} : \mu(x_n,x_0,u)\leq \frac{1}{2}\right\}$$

$$P_k=\left\{n\in\mathbb{N} : \frac{k-1}{k}<\mu(x_n,x_0,u)\leq \frac{k}{k+1}\right\},\ k\geq 2$$

olacak biçimde ki her bir $P_j\in I$ $(j=1,2,\dots)$ ve $i\neq j$ için $P_i\cap P_j=\emptyset$ olur. I, (TÖ) koşulunu sağladığı için $P_j\Delta R_j$ $(j=1,2,\dots)$ sonlu bir küme ve $R=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} R_j\in I$ olacak biçimde $R_j\subseteq\mathbb{N}$ kümeleri vardır. $H=\mathbb{N}\setminus R$ olmak üzere

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in H}} x_n = x_0 \tag{3.2}$$

olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

$\mu\in(0,1)$ ve $u>0$ olsun. $\frac{1}{m}<\mu$ olmak üzere bir $m\in\mathbb{N}$ seçilsin. O halde,

$$\{n\in\mathbb{N} : \mu(x_n,x_0,u)\leq 1-\mu\}\subseteq\left\{n\in\mathbb{N} : \mu(x_n,x_0,u)\leq 1-\frac{1}{m}\right\}\subseteq\bigcup_{j=1}^{m+1} P_j$$

elde edilir. $\bigcup_{j=1}^{m+1} P_j \in I$ olduğundan $\{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, x_0, u) \leq 1-\mu\} \in I$ olur. Ayrıca, $P_j \Delta R_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ sonlu olduğundan,

$$\bigcup_{j=1}^{m+1} R_j \cap (n_\varepsilon, \infty) = \bigcup_{j=1}^{m+1} P_j \cap (n_\varepsilon, \infty)$$

olacak biçimde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer, $n > n_\varepsilon$ için $n \notin R$ seçilirse $n \notin \bigcup_{j=1}^{m+1} R_j$ ve dolayısıyla $n \notin \bigcup_{j=1}^{m+1} P_j$ olur. O halde,

$$\{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, x_0, u) \leq 1-\mu\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m+1} P_j$$

olduğundan $n \in \{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, x_0, u) > 1-\mu\}$ elde edilir. Sonuç olarak, (3.2) sağlanır.

ii. Kabul edelim ki x_0, M'in bir yığılma noktası ve $\mu(I) - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ iken $\mu(I^*) - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ sağlansın. x_0 yığılma noktası olduğundan $\lim_{n\to\infty} \mu(x_n, x_0, u) = 1$ olacak biçimde M'de bir (x_n) dizisi vardır. $\{P_1, P_2, \ldots\}$, I idealinin ayrık alt kümelerinin bir sınıfı olsun. $j = 1, 2, \ldots$ için $n \in P_j$ ise $y_n = x_j$ olacak biçimde bir (y_n) dizisi tanımlansın. $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için $\frac{1}{m} < \varepsilon$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ seçilsin. O halde,

$$A(u, \varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \mu(y_n, x_0, u) \leq 1-\varepsilon\} \subseteq P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_m$$

olur. Dolayısıyla, ideal tanımından $A(u, \varepsilon) \in I$ ve buradan $\mu(I) - \lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ elde edilir. Bu yüzden

$$\mu(I^*) - \lim_{n\to\infty} y_n = x_0$$

olur ki $\mu(I^*)-$yakınsaklık tanımından $R \in I$ ve $\mathbb{N} \setminus R = \{m_k : t > k,\, m_k < m_t\}$ için

$$\lim_{\substack{m_k\to\infty \\ m_k \in \mathbb{N}\setminus R}} y_{m_k} = x_0 \tag{3.3}$$

olur. $R_j = P_j \cap R$ $(j = 1, 2, \ldots)$ alalım. Her $j \in \mathbb{N}$ için

$$(P_j \cap R) \subset P_j \in I$$

olup $R_j \in I$ elde edilir. Üstelik,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (R \cap P_j) = R \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \subseteq R$$

elde edilir, $R \in I$ olduğundan $\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \in I$ olmasını gerektirir. $\lim_{m_k \to \infty} \mu(y_{m_k}, x_0, u) = 1$ olduğundan limit tanımı gereğince her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$\{m_k \in \mathbb{N} : \mu(y_{m_k}, x_0, u) \leq 1 - \varepsilon\} \subset \mathbb{N} \setminus R$$

kümesi sonlu elemana sahiptir.

$$A(u,\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \mu(y_n, x_0, u) \leq 1 - \varepsilon\} \subseteq P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_m$$

ifadesinden $\mathbb{N} \setminus R$ kümesi ile P_j sadece sonlu sayıda ortak elemana sahiptir. Buradan,

$$P_j \subset (P_j \cap R) \cup \{m_1, m_2, \ldots\}$$

olacak biçimde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Son olarak, her $j \in \mathbb{N}$ için

$$R_j \setminus P_j = R_j \cap R_j^c = (P_j \cap R) \cap P_j^c = \emptyset$$

olduğundan

$$P_j \Delta R_j = (P_j \setminus R_j) \cup (R_j \setminus P_j) = P_j \cap (\mathbb{N} \setminus R)$$

olup $P_j \Delta R_j$ sonlu olur. Bu ise I idealinin (TÖ) şartını sağladığını gösterir.

□

Teorem 3.11. $(M, \mu, *)$ bir bulanık metrik uzay ve I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal olsun. Eğer, M yığılma noktasına sahip değilse $\mu(I)$ ve $\mu(I^*)-$ yakınsaklık denktir.

KANIT. I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal, M bir bulanık metrik uzay, $x_0 \in M$ ve $x_n \xrightarrow{\mu(I)} x_0$ olsun. Teorem 3.8'den dolayı, $x_n \xrightarrow{\mu(I^*)} x_0$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. M

yığılma noktasına sahip olmadığı için

$$D(x_0,\varepsilon,u)=\{x\in M:\mu(x,x_0,u)>1-\varepsilon\}=\{x_0\}$$

olacak biçimde bir $\varepsilon\in(0,1)$ ve $u>0$ vardır. Kabulden, $\{n\in\mathbb{N}:\mu(x_n,x_0,u)\leq 1-\varepsilon\}\in I$ olur. Dolayısıyla,

$$\{n\in\mathbb{N}:\mu(x_n,x_0,u)>1-\varepsilon\}=\{n\in\mathbb{N}:x_n=x_0\}\in F(I)$$

ve $x_n\xrightarrow{\mu(I^*)}x_0$ elde edilir. □

Teorem 3.12. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ üzerinde (TÖ) koşulunu sağlayan bir ideal, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0\in M$ olsun. O halde, aşağıdaki koşullar denktir:

i. $\mu(I)-\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$

ii. $x=y+z$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(y_n,x_0,u)=1$ ve $\operatorname{supp}(z)=\{n\in\mathbb{N}:z_n\neq\theta_M\}\in I$ olmak üzere $y=(y_n),z=(z_n)\in M$ dizileri vardır.

KANIT. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ üzerinde (TÖ) koşulunu sağlayan bir ideal, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0\in M$ olsun.

$(\Rightarrow:)$ Kabul edelim ki, $\mu(I)-\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ olsun. Bu durumda, Teorem 3.10 den, $\lim\limits_{h_k\to\infty}\mu(x_{h_k},x_0,u)=1$ olacak biçimde bir $H=\{h_k:t>k,\,h_k<h_t\}\in F(I)$ kümesi vardır.

$$y_n:=\begin{cases}x_n, & n\in H\\ x_0, & n\in\mathbb{N}\setminus H\end{cases}\tag{3.4}$$

biçiminde bir dizi tanımlansın. Dolayısıyla, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(y_n,x_0,u)=1$ olur. Ayrıca, $n\in\mathbb{N}$ için $z_n=x_n-y_n$ olsun. O halde, (y_n) dizisinin tanımından

$$\{k\in\mathbb{N}:x_k\neq y_k\}\subset\mathbb{N}\setminus H\in I$$

olur. Dolayısıyla, $\operatorname{supp}(z)=\{k\in\mathbb{N}:z_k\neq\theta_M\}\in I$ ve (3.4)'den her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n=y_n+z_n$

dir.

($\Leftarrow$:) Şimdi tersine, $y = (y_n)$ ve $z = (z_n)$, M kümesi üzerinde iki dizi olsun. Bu diziler, $x = y + z$, $\lim_{n\to\infty} \mu(y_n, x_0, u) = 1$ ve $\text{supp}(z) \in I$ sağlasın.

$$\mu(I) - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \tag{3.5}$$

olduğu ispatlansın. Kabul edelim ki, $H = \{h_k \in \mathbb{N} : z_{h_k} = 0\} \subset \mathbb{N}$ olsun. $\text{supp}(z) = \{h_k \in \mathbb{N} : z_{h_k} \neq 0\} \in I$ olduğundan, $H \in F(I)$ vardır. Dolayısıyla, $n \in H$ iken $x_n = y_n$ elde edilir. Bu yüzden,

$$\lim_{h_k\to\infty} \mu(x_{h_k}, x_0, u) = 1$$

olacak biçimde bir $H = \{h_k : t > k,\, h_k < h_t\} \in F(I)$ kümesi olduğu elde edilir. Teorem 3.10'den (3.5) sağlanır. □

Tanım 3.13. $(M, \mu, *)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal ve (x_n) M'de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{h_k, h_p\to\infty} \mu(x_{h_k}, x_{h_p}, u) = 1$$

olacak biçimde bir

$$H = \{h_k : t > k,\, h_k < h_t\} \in F(I)$$

kümesi varsa (x_n) dizisine M üzerinde $\mu(I^*)-$Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.14. $(M, \mu, *)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal ve (x_n) M'de bir dizi olsun. Eğer, (x_n) $\mu(I^*)$-Cauchy dizisiyse $\mu(I)$-Cauchy dizisidir.

KANIT. Kabul edelim ki (x_n) bir $\mu(I^*)$-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $u > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$ ve $k, p > k_0$ için $\mu(x_{h_k}, x_{h_p}, u) > 1 - \varepsilon$ olacak biçimde bir

$$H = \mathbb{N} \setminus K = \{h_k : t > k,\, h_k < h_t\} \in F(I)$$

kümesi vardır. $N = h_{k_0+1}$ seçilsin. O halde, her $u > 0$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ için

$$\mu(x_{h_k}, x_N, u) > 1 - \varepsilon,\ k > k_0$$

vardır.

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, x_N, u) \leq 1 - \varepsilon\} \subset K \cup \{h_1 < h_2 < \ldots < h_{k_0}\}$$

için $K \in I$ olduğundan

$$K \cup \{h_1 < h_2 < \ldots < h_{k_0}\} \in I$$

olur ve I idealinin tanımından $A \in I$ elde edilir. Dolayısıyla, (x_n) $\mu(I)-$Cauchy dizisidir. □

Teorem 3.15. $(M, \mu, *)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal ve (x_n) M'de bir dizi olsun. Eğer, I ideali (TÖ) koşulunu sağlıyorsa (x_n) dizisi $\mu(I)-$Cauchy dizisi iken $\mu(I^*)-$Cauchy dizisi olur.

KANIT. Kabul edelim ki (x_n) M üzerinde bir $\mu(I)-$Cauchy dizisi ve I, (TÖ) koşulunu sağlayan admissible bir ideal olsun. O halde, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, x_N, u) \leq 1 - \varepsilon\} \in I$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $m_i = N(\frac{i-1}{i})$ olacak biçimde $i = 1, 2, \ldots$ için

$$S_i = \left\{ n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, x_{m_i}, u) > \frac{i-1}{i} \right\}$$

seçilsin. $i = 1, 2, \ldots$ için $S_i \in \mu(I)$ olduğu açıktır. I ideali (TÖ) koşulunu sağladığından dolayı, Önerme 2.34 den $S \in \mu(I)$ ve tüm i indisleri için $S \setminus S_i$ sonludur. Kabul edelim ki $k > \frac{1}{\varepsilon}$ olmak üzere $\varepsilon \in (0,1)$, $u > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer, $n, m \in S$ ise, $S \setminus S_k$ sonlu bir kümedir. Dolayısıyla, her $m, n > j(k)$ için $m \in S_k$ ve $n \in S_k$ olan $j = j(k)$ vardır. Bu yüzden, her $n, m > j(k)$ için $\mu(x_n, x_{m_k}, u) > \frac{k-1}{k}$ ve $\mu(x_m, x_{m_k}, u) > \frac{k-1}{k}$ olur. Bu durumda, $m, n > j(k)$ için

$$\mu(x_n, x_m, u) \geq \mu\left(x_n, x_{m_k}, \frac{u}{2}\right) * \mu\left(x_m, x_{m_k}, \frac{u}{2}\right) > (1 - \varepsilon) * (1 - \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\lim_{\substack{n,m \to \infty \\ n,m \in S}} \mu(x_n, x_m, u) = 1$$

olur. $\square$

Teorem 3.16. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal ve (x_n) M'de bir dizi olsun. Eğer, (x_n) dizisi $\mu(I^*)-$ yakınsak ise (x_n) dizisi $\mu(I^*)-$Cauchy dizisidir.

KANIT. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal, (x_n) M'de bir dizi ve $x_n \xrightarrow{\mu(I^*)} x_0$ olsun. O zaman,

$$\lim_{h_k\to\infty} \mu(x_{h_k},x_0,u) = 1$$

olacak biçimde bir

$$H = \{h_k : t > k,\, h_k < h_t\} \in F(I)$$

kümesi vardır.

$$\mu(x_{h_k},x_{h_p},u) \geq \mu\left(x_{h_k},x_0,\frac{u}{2}\right) * \mu\left(x_{h_p},x_0,\frac{u}{2}\right) > (1-\varepsilon)*(1-\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$$

eşitsizliği düşünülürse,

$$\lim_{h_k,h_p\to\infty} \mu(x_{h_k},x_{h_p},u) = 1$$

olur. Yani, (x_n) dizisi $\mu(I^*)-$Cauchy dizisidir. $\square$

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

$\mu(I)-$LİMİT NOKTALARI VE $\mu(I)$-YIĞILMA NOKTALARI

Bu bölümde, bulanık metrik uzaylarda $\mu(I)-$limit noktaları ve $\mu(I)$-yığılma noktaları kavramları tanımladı. Ayrıca, bu kavramlar arasındaki ilişki analiz edildi. Son olarak, $\mu(I)$-yığılma noktaları kümesinin kapalı bir küme olduğu gösterildi.

Tanım 4.1. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0 \in M$ olsun. Eğer,

$$\lim_{h_k \to \infty} \mu(x_{h_k}, x_0, u) = 1$$

olacak biçimde bir

$$H = \{h_k : t > k,\, h_k < h_t\} \notin I$$

kümesi varsa x_0 elemanına (x_n) dizisinin bir $\mu(I)-$limit noktası denir.

Tanım 4.2. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal, (x_n) M'de bir dizi ve $x_0 \in M$ olsun. Eğer, her $u > 0$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, x_0, u) > 1-\varepsilon\} \notin I$$

sağlanıyorsa x_0 elemanına (x_n) dizisinin bir $\mu(I)-$yığılma noktası denir.

$x = (x_n)$ dizisinin tüm $\mu(I)-$limit noktaları ve $\mu(I)-$yığılma noktaları kümeleri, sırasıyla, $\mu(I)(\Lambda_x)$ and $\mu(I)(\Gamma_x)$ biçiminde gösterilir.

Önerme 4.3. $(M,\mu,*)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal ve $x = (x_n)$ M'de bir dizi olsun. O halde, $\mu(I)(\Lambda_x) \subseteq \mu(I)(\Gamma_x)$ sağlanır.

KANIT. I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible ideal, $x = (x_n)$, M'de bir dizi ve $x_0 \in \mu(I)(\Lambda_x)$ olsun. O halde,

$$\lim_{h_k \to \infty} \mu(x_{h_k}, x_0, u) = 1 \qquad (4.1)$$

olacak biçimde bir $H = \{h_k : t > k,\, h_k < h_t\} \notin I$ kümesi vardır. $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için (4.1) eşitliği dikkate alındığında $k > k_0$ için $\mu(x_{h_k}, x_0, u) > 1 - \varepsilon$ olacak biçimde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla,

$$H \setminus \{h_1, h_2, \ldots, h_{k_0}\} \subset \{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, x_0, u) > 1 - \varepsilon\}$$

olur ve bundan dolayı $\{n \in \mathbb{N} : \mu(x_n, x_0, u) > 1 - \varepsilon\} \notin I$ elde edilir. Yani, $x_0 \in \mu(I)(\Gamma_x)$ olur. □

Teorem 4.4. $(M, \mu, *)$ bir bulanık metrik uzay, I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal ve $x = (x_n)$ M'de bir dizi olsun. O halde, $\mu(I)(\Gamma_x)$ kümesi M üzerinde kapalıdır.

KANIT. I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir admissible ideal, $x = (x_n)$, M'de bir dizi, $x_2 \in \overline{\mu(I)(\Gamma_x)}$, $u > 0$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. O halde, $x_0 \in D(x_2, \varepsilon, u) \cap \mu(I)(\Gamma_x)$ olur. Kabul edelim ki

$$D(x_0, \delta, u) \subset D(x_2, \varepsilon, u)$$

olacak biçimde bir $\delta \in (0,1)$ ve $u > 0$ olsun. Dolayısıyla,

$$\{n \in \mathbb{N} : \mu(x_0, x_n, u) > 1 - \delta\} \subset \{n \in \mathbb{N} : \mu(x_2, x_n, u) > 1 - \varepsilon\}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\{n \in \mathbb{N} : \mu(x_2, x_n, u) > 1 - \varepsilon\} \notin I$ ve $x_2 \in \mu(I)(\Gamma_x)$ bulunur. □

BEŞİNCİ BÖLÜM
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, George ve Veeramani (1994) anlamında bulanık metrik uzay kavramı kullanarak, bulanık metrik uzaylarda yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan ideal yakınsaklık kavramı tanımlandı. Ayrıca, $\mu(I^*)-$yakınsaklık, $\mu(I)-$Cauchy dizileri, $\mu(I^*)-$Cauchy dizileri kavramları inceledi ve bu kavramların temel özellikleri analiz edildi. Bunlara ek olarak, bulanık metrik uzaylarda $\mu(I)$-limit noktaları ve $\mu(I)-$yığılma noktaları kavramları tanımlandı ve bu kavramlar arasındaki bağlantı incelendi.

Daha sonraki çalışmalarda, bulanık bir metrik uzayda Lacunary yakınsamanın burada sunulan kavramlar ve sonuçlar kullanılarak tanımlanabileceğine ve temel özelliklerinin çalışılabileceğine inanıyoruz.

KAYNAKLAR

Buck, R. C. (1953). "Generalized asymptotic density". *American Journal of Mathematics*, *75*, 335–346.

Connor, J. S. (1988). "The statistical and strong $p-$Cesăro convergence of sequences". *Analysis*, *8*, 47–63.

Dems, K. (2004). "On $I-$Cauchy sequences". *Real Analysis Exchange*, *30*, 123–128.

Erdos, P., ve Tenenbaum, G. (1989). "Sur les densities de certaines suites dentiers". *Proceedings of the London Mathematical Society*, *59*(3), 417–438.

Fast, H. (1951). "Sur la convergence statistique". *Colloquium Mathematicum*, *2*, 241–244.

Freedman, A. R., ve Sember, J. J. (1981). "Densities and summability". *Pacific Journal of Mathematics*, *95*, 293–305.

Fridy, J. A. (1985). "On statistical convergence". *Analysis*, *5*, 301–313.

Fridy, J. A. (1993). "Statistical limit points". *Proceedings of the American Mathematical Society*, *118*, 1187–1192.

George, A., ve Veeramani, P. (1994). "On some results in fuzzy metric spaces". *Fuzzy Sets and Systems*, *64*, 395–399.

Kaleva, O., ve Seikkala, S. (1984). "On fuzzy metric spaces". *Fuzzy Sets and Systems*, *12*, 215–229.

Kramosil, J., ve Michalek, J. (1975). "Fuzzy metric and statistical metric space". *Kybernetika*, *11*, 336–343.

Maddox, I. J. (1970). *"Elements of functional analysis"*. Cambridge.

Miller, H. (1995). "A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence". *Transactions of the American Mathematical Society*, *347*, 1811–1819.

Niven, I. (1951). "The asymptotic density of sequences". *Bulletin of the American Mathematical Society*, *57*(6), 420–434.

Salat, T. (1980). "On statistically convergent sequences of real numbers". *Mathematica Slovaca*, *30*, 139–150.

Schoenberg, I. J. (1959). "The integrability of certain functions and related summability methods". *The American Mathematical Monthly*, *66*, 361–375.

Steinhaus, H. (1951). "Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique". *Colloquium Mathematicum*, *2*, 73–74.

Zadeh, L. A. (1965). "Fuzzy sets". *Information and Control*, *8*, 338–353.

Zygmund, A. (1939). *"Trigonometrical series"*. Warsaw: M.L. Gostekhizdat.