T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATRİS VE BİMATRİS OYUNLARIN BAZI PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OKAN GALATA

Tez Danışmanı

DR. ÖĞR. ÜYESİ AYKUT OR

ÇANAKKALE – 2022

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATRİS VE BİMATRİS OYUNLARIN BAZI PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OKAN GALATA

Tez Danışmanı
DR. ÖĞR. ÜYESİ AYKUT OR

ÇANAKKALE – 2022

ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Okan GALATA

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR, çalışma süresince ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Okan GALATA

Çanakkale, Ocak 2022

ÖZET

MATRİS VE BİMATRİS OYUNLARIN BAZI PROBLEMLERİ

Okan GALATA
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR
27/01/2022, 51

Bu tez çalışmasında iki kişilik sıfır toplamlı oyunların değerleri ile getiri matrislerinin norm değerlerinin ilişkisi incelenmiştir. Bu kapsamda tezimizin giriş bölümünde oyun teorisinin tarihsel gelişimiyle birlikte literatürdeki çalışmaların bir özeti ifade edilmiştir. Oyun, oyuncu, strateji gibi temel oyun teorisi kavramlarının verildiği ikinci bölümde oyunlar sınıflandırılmış ve gösterim biçimleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, iki kişilik bir oyunda birinin kazancının diğerinin kaybına eşit olduğu sıfır toplamlı oyunlar (matris oyunlar) incelenmiştir.

Dördüncü bölümde iki kişilik sıfır toplamlı olmayan oyunlar (bimatris oyunlar) ve bu oyunlarda Nash dengesi kavramı verilmiştir.

Beşinci bölümde literatüre 2009 yılında kazandırılmış olan getiri matrisinin, matris normlarından oluşan bir yöntem ele alınmıştır. Ayrıca, Filbert, Hankel ve Hilbert matris tanımları verilmiştir. Söz konusu özel tanımlı matrisler yardımıyla ifade edilen oyunlar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matris oyunu, Bimatris oyun, Matris normu, Oyun değeri.

ABSTRACT

SOME PROBLEMS OF MATRIX AND BIMATRIX GAMES

Okan GALATA
Çanakkale Onsekiz Mart University
School of Graduate Studies
Master of Science Thesis in Mathematics
Advisor: Assist. Prof. Aykut OR
27/01/2022, 51

This thesis examines the relationship between the value of two-player zero-sum games and the norm values of the payoff matrices. In this context, the introduction chapter of the thesis contains an overview of the research in the literature as well as the historical evolution of game theory. In the second chapter, where basic game theory concepts such as game, player, and strategy are given, games are classified and their representations are given.

In the third chapter, a two-person zero-sum game in which one's gain is equal to the other's loss is investigated.

The fourth chapter introduces two-person non-zero-sum games known as bimatrix games, as well as the concept of Nash equilibrium in these games.

The final chapter considers an approach consisting of matrix norms of the reward matrix, which was introduced to the literature in 2009. Furthermore, Hilbert, Hankel, and Filbert matrix definitions are given. Again, the games stated using these custom-defined matrices are examined.

Keywords: Matrix game, Bimatrix game, Matrix norm, Game value

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

JÜRİ ONAY SAYFASI………………………………………………………………... i
ETİK BEYAN…………………………………………………………………………… ii
TEŞEKKÜR……………………………………………………………………….. iii
ÖZET …………………………………..……………………………….……….. iv
ABSTRACT ……………………………………………………………………….. v
İÇİNDEKİLER …………………………………………………………………..…… vi
SİMGELER ve KISALTMALAR……….........……………………………………… viii
ŞEKİLLER DİZİNİ……..………..………………………………………….….. ix

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ 1

İKİNCİ BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Oyun ve Oyuncular……………………………………......……………..... 3
2.2. Stratejiler ……………………………………………………..…...…… 4
2.3 Oyunların Sınıflandırılması……………………………………………………… 5
2.4. Oyunların Gösterimleri……………………………………..………………….. 6
2.4.1. Normal Biçimde Gösterilen Oyunlar ...………..……………..……….. 7
2.4.2. Yayvan Biçimde Gösterilen Oyunlar...………..……………………….….. 8
2.4.3. Karakteristik Fonksiyonlar...………..…………………………….…….. 9

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
İKİ KİŞİLİK SIFIR TOPLAMLI OYUNLAR 10

3.1. Saf Stratejiler ve Denge Noktası …………………………....………………..... 11
3.2 Karma Stratejiler ve Denge Noktası ……………………......………………..... 15
3.3. 2x2 Boyutlu Matris Oyunların Çözümü ……………………..……………….... 22

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM 26
İKİ KİŞİLİK SIFIR TOPLAMLI OLMAYAN OYUNLAR

4.1. Bimatris Oyunlar ....………………………………………..……….…..... 26
4.2. Bimatris Oyunlarda Baskınlık ……………………………..…………..…..... 33

BEŞİNCİ BÖLÜM 38
MATRİS NORMLARI VE OYUN DEĞERİ

5.1. Matris Normları ……………………………………………...…………..…..... 38
5.2. Özel Tanımlı Matrisler ve Normları ……………………….......…………..…..... 44
5.3 Matris Normları ve Oyun Değeri…………………………………………….. 47

ALTINCI BÖLÜM 49
SONUÇ ve ÖNERİLER

6.1. Sonuç ve Öneriler…………………………………………………………... 49
KAYNAKÇA ...…………………………………………………………………. 50
ÖZGEÇMİŞ ….………………………………………………….……………..... I

SİMGELER VE KISALTMALAR

v^-	Oyunun alt değeri
v^+	Oyunun üst değeri
$E(X,Y)$	Karma stratejilerde $I.$ oyuncunun getirisi
max	Maksimum
min	Minimum
y^T	y nin transpozu
∂	Kısmi türev
$\|A\|_2$	A matrisinin Spectral normu
$\|A\|_E$	A matrisinin Frobenius normu
(a_k)	a_k dizisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil No	**Şekil Adı**	**Sayfa No**
Şekil 1	Stratejik Oyunların Sınıflandırılması	18
Şekil 2	Oyun Ağacı	20

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

Oyun teorisi rekabetin bulunduğu ortamlarda, belirli bir amaca yönelik karar verme gücüne sahip unsurlardan oluşan karar verme aşamalarını matematiksel olarak inceleyen bir teori olarak ifade edilebilir.

Günlük hayatın akışı içerisinde farklı konular ile ilgili kararlar almaktayız. Bu kararlar bazen sadece kendimizi ilgilendirirken bazen de karşımızdaki kişi, kurum veya toplulukları etkileyebilmektedir. Uygulamada iki veya daha fazla karar vericinin içeresinde bulunduğu karar verme problemleriyle karşılaşmak mümkündür. Oyun teorisi bu tür karar ortamlarını açıklayan matematiksel bir disiplindir (Morris, 1994). Ayrıca birden fazla karar vericinin olduğu ve bu karar vericilerin hareketlerinin birbirlerini etkilemesi fikri oyun teorisinin en önemli özelliğidir. Eğer karar vericiler (oyuncular) arasında etkileşim olmazsa elimizdeki model sadece bir dizi bağımsız karar alma problemine döner (Yılmaz, 2009). Ayrıca karar teorisinin aksine, oyuncunun (karar vericinin) tercihini sonucu diğer oyuncunun kararlarına bağlıdır.

Birbiriyle rekabet eden ve her biri kazanmayı isteyen iki ya da daha fazla sayıda karar vericinin (oyuncunun) bulunduğu ortamlar oyun teorisinin uygulama alanları arasına girer. Özellikle açık arttırmalarda, ihale düzenlemelerinden rekabet analizlerine kadar birçok ekonomik uygulaması mevcuttur. Bunun yanında yapay zekâ yazılımlarının karar vermesini sağlayan algoritmalardan tarımda arazi uygunluğunun belirlenmesine kadar birçok bilim alanında kendisine yer edinmiştir. 1959 yılında Haywood, 2. Dünya savaşındaki incelemeleri sonucu oyun teorisi ile askeri gereklilikler arasındaki ilişkiyi anlatan bir çalışma ile askeri alana uygulamasını yapmıştır.

Modern oyun teorisinin 1928 yılında oyunların temel ilkeleri ile matematiksel yapısını birleştirdiği “Minimax” teoremi ile başladığı kabul edilir. Daha sonra bu alandaki ilk yazılı kitap olarak ta bilinen John Von Neumann ve Oskar Morgenstern’in 1944’te yayımlanan “Theory of Games and Economic Behaviour (Oyunlar teorisi ve ekonomik davranış)” çalışması oyun teorisinin temelini oluşturmuştur. Oyun teorisinin tarihsel gelişimi içerisinde ikinci en önemli nokta 1950-1953 yılları arasında yaptığı çalışmaları ile John Forbes Nash tarafından ortaya konulmuştur. Nash bu çalışmalarında hem rekabetçi hem de işbirlikçi oyunlarda bir denge noktası kavramını ortaya koymuştur. Nash dengesi olarak tanımlanan bu denge kavramıyla çalışmalarından yıllar sonra 1994 yılında kendisi Nobel Ekonomi ödülüne layık görülmüştür.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmuştur. İlk bölümde oyun teorisinin ne olduğu ve literatürdeki gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde oyun teorisinin oyun, oyuncu, strateji vb. temel kavramları verilmiştir. Oyuncular ve oyun teorisindeki yeri dikkate alınarak karar teorisinden farkları ortaya konmuştur. Yine birinci bölümde oyun teorisinin önemli kavramlarından biri olan oyunların sınıflandırılmalarının hangi parametrelere göre farklılaştığı verilmiştir. Temelde sınıflandırmanın oyuncular arasında iletişim ve iş birliğinin olduğu ve olmadığı şeklinde yapıldığı ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde oyun teorisinin kuruluşundan itibaren önemli bir yere sahip olan birinin kazancının diğerinin kaybına eşit olduğu iki kişili sıfır toplamlı oyunlar ve temel özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölüm iki kişilik ancak sıfır toplamlı olmayan oyunların ele alındığı bölümdür. İki kişilik sıfır toplamlı olmayan oyunlar bimatris oyunlar olarak bilinmektedir. Bi-matris oyunlarda denge noktasını veren denge stratejileri incelenmiştir. Söz konusu oyunlarda Nash dengesi olarak bilinen denge noktası ve denge stratejileri ile elde edilen denge ikilisi kavramları örnekler yardımıyla ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde literatüre 2009 yılında İzgi B. ve Özkaya M. tarafından kazandırılmış olan matris normları ve oyun değeri ilişkisi incelenmiştir. Getiri matrisinin matris normları yardımı kullanılarak herhangi bir çözüm yöntemi kullanmadan oyun değeri için yaklaşık çözümün nasıl yapıldığı ifade edilmiştir. İzgi ve Özkaya (2019) çalışmalarında getiri matrisinin satır ve sütun normlarını kullanarak elde ettikleri sonuçları spektral norm ve Frobenious norm kullanılarak da ifade edilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca, Hankel, Hilbert ve Filbert matrisler kullanılarak özel tanımlı matris oyunlar ifade edilmiştir.

Son bölümde tezimizin sonuçları ifade edilmiş ve bundan sonra yapılacak çalışmalar için önerilerden bahsedilmiştir.

İKİNCİ BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

Çalışmamızın bu bölümünde oyun teorisi ve genel özellikleri ile ilgili temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Bu kavramlar (Barron, 1991; Guseinov ve ark., 2012; Morris, 1994; Neumann ve Morngestern, 1944; Owen, 1995; Yılmaz, 2009;) çalışmalarından derlenerek verilmiştir.

2.1. Oyunlar ve Oyuncular

Genel olarak oyun, karşılıklı etkileşim ortamında karar vericilerin getirilerini ya da kayıplarını en iyileştirebilmek için sahip olduğu mümkün seçenekleri hangi sıklıkla ve nasıl kullanacağını tanımlayan kurallardan meydana gelen bir çatışma modelidir. Farklı yaklaşım ve ifadelerle sunulan bu teoride oyun kavramını aslında rekabet eden ve rasyonel bir şekilde getirilerini arttırmak isteyen en az iki karar vericinin (oyuncunun) bulunduğu karar ortamı şeklinde tanımlamak mümkündür.

Karar vericilerin oyuncular olduğu karar alma sürecinin bir oyun olarak değerlendirilebilmesi için şu özelliklere sahip olması gerekmektedir (Morris, 1994):

(i) Sınırlı sayıda oyuncu vardır

(ii) Her oyuncu kendisin ve diğer oyuncu veya oyuncuların sahip olduğu olası seçeneklerin kümesini bilir ancak karşıdaki oyuncunun hangi alternatifi kullanacağını bilmemektedir.

(iii) Oyuncuların çıkarları diğer oyuncularınkinden farklıdır.

(iv) Oyuncuların getirileri sadece kendi alacakları kararlar ile değil diğer oyuncuların da alacağı kararlara bağlıdır.

(v) Oyuncuların olası seçenekler kümesinden vereceği karalar neticesinde elde edilen sonuçlar hesaplanabilir olmalıdır.

Oyun içinde yer alan, kazançlarını maksimize etmek amacıyla bir tercih yapan ve bu tercihler sonucunda bir getiri (kazanç ya da kayıp) elde eden birey veya gruplara oyuncu denir. Oyunda oyuncunun stratejik olarak karar vermesindeki en önemli nokta, kendisinin verdiği kararların yanında rakibinin kararlarını da tahmin etmektir.

2.2. Stratejiler

Bir oyunda herhangi bir oyuncunun oyunun başından sonuna kadar ortaya çıkabilecek olası durumların tamamı için yapılan tercihleri belirten kuralların tamamına strateji denir. Strateji yapı bakımından şu 3 koşulu sağlamalıdır (Morris, 1994):

(i) Strateji oyun süresince oluşabilecek tüm durumlarda uygulanabilir olmalıdır.

(ii) Oyuncuların oyun sırasındaki hamleleri rassal değil oyunun kuralına göre belirlenmelidir.

(iii) Oyunun olası her durumu için yapılacak olan hamle şansa veya oyuncunun keyfi kararına göre değil alternatif seçimlerden oluşmalıdır.

Oyunda oyuncuların amacı, kendilerine en fazla getiriyi sağlayacak stratejiyi belirlemektir. Stratejiler farklı kriterlere göre sınıflandırılırlar. Oyun esnasında bilinçli olarak yapılan seçimler davranış stratejileri (satranç, dama oyunları) ve şansa bağlı ortaya çıkan şans stratejileri (zar oyunları) olarak adlandırılır. Ancak her iki strateji türünün bir arada karşımıza çıktığı, kağıt oyunları ve tavla oyunu, durumlar da söz konusu olabilir. Öte yandan oyuncular sahip oldukları strateji sayısı dikkate alındığında sonlu sayıda stratejiye sahip durumlarda sonlu oyun, sonsuz sayıda stratejiye sahip olduğu durumlarda sonsuz oyun olarak sınıflandırılırlar.

Oyuncuların oyun sırasında sahip olduğu stratejileri olasılık olayı içermeden seçtiği düşünüldüğünde, oyunun sonucunu tek bir strateji çiftinin oluşturması durumu saf (pür) strateji, oyunun sonucunu birden fazla strateji çiftinin belirlendiği yani strateji çiftlerinin olasılık değerleri ile ifade edildiği durum karma strateji olarak adlandırılır.

2.3. Oyunların Sınıflandırılması

Oyunların sınıflandırılmaları farklılık gösterse de temelde şans oyunları ve stratejik oyunlar olmak üzere ikiye ayrılırlar. Strateji oyunları belirsizlik içermesi ve uygulamada daha fazla karşılık bulması sebebiyle oyun teorisinde daha çok bu oyunlar üzerinde çalışmalar yapılmaktadır. Oyuncular oyun süresince rasyonel davrandıkları varsayımı gereği her zaman kendilerine en yüksek kazancı getiren seçeneği rakiplerinin tercihlerini de dikkate alarak oyunu belirlemektedir. Strateji oyunları, oyundaki oyuncuların sayısına, oyuncuların strateji kümelerinin sonlu olup olmamasına ve oyuncuların sahip olduğu bilgiye göre sınıflandırılmaktadır.

Strateji oyunları temelde işbirlikli (cooperative) ve işbirlikli olmayan (noncooperative) oyunlar olarak sınıflandırılırlar. İşbirlikli oyunlar, sabit toplamlı olmayan hemen her oyunda uygulanması mümkün olan ve oyuncuların kendi aralarında anlaşarak karar verebildikleri oyunlardır. Bu oyunlarda çözümler iş birliği içinde olan tüm grupları memnun edecek şekilde tasarlanmıştır.

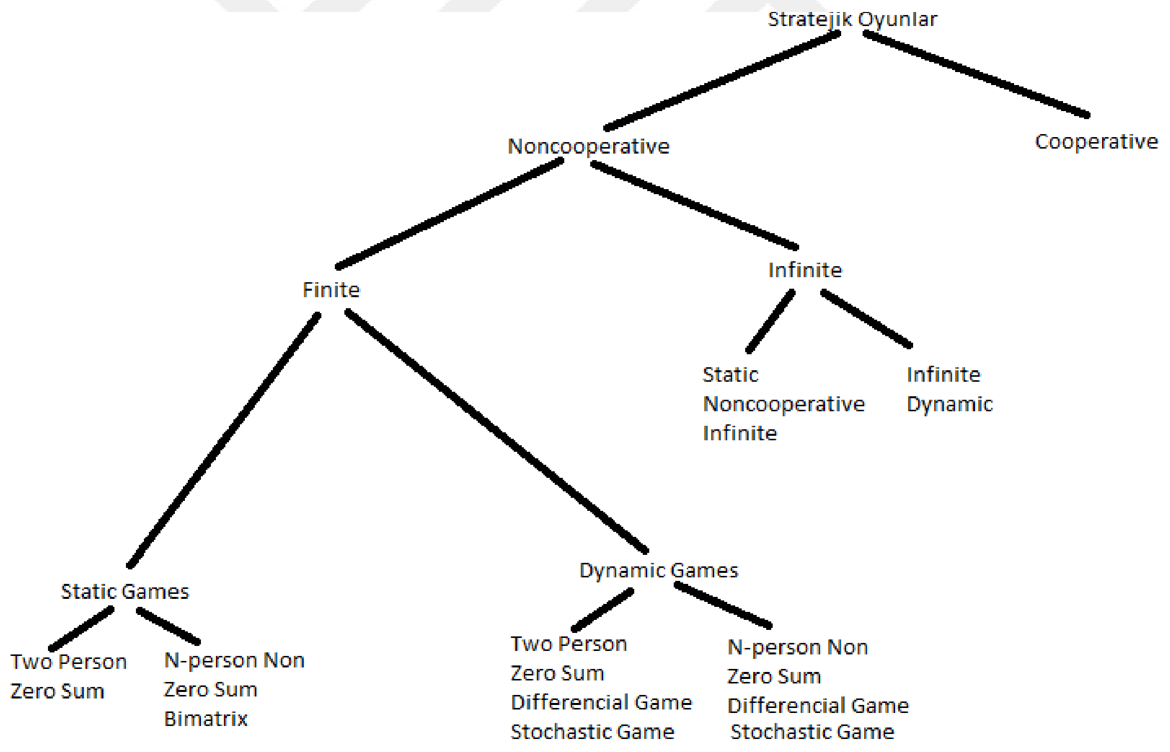
Oyuncuların rakibin kazancını düşünmeden kendi kazancını maksimalleştirme çabası içinde olduğu oyunlar işbirlikli olmayan (işbirliksiz) oyunlar olarak adlandırılır. İşbirliksiz oyunlar kendi içerisinde zaman açısından statik (eş zamanlı) veya dinamik (sıralı), bilgi açısından ise tam bilgili veya eksik bilgili oyunlar olarak sınıflandırılırlar (Yılmaz, 2009). Dinamik oyunlar yayvan biçimde gösterim daha yaygın olarak kullanılır. Bu gösterim bir oyun ağacı yardımı ile ifade edilir.

Statik oyunlar ise oyuncuların tam bilgi altında ve eş anlı (statik) olarak hareket ettikleri varsayılır. Tam bilgiden kasıt oyundaki her oyuncunun hamleleri sonucunda elde ettikleri kazançların tüm oyuncuların ortak bilgisi dahilinde olmasıdır. Bu oyunlarda zaman yoktur. Her oyuncu hareketini bir kez ve aynı anda seçer. Eş anlı denmesinin nedeni oyuncuların birbirlerinin hareketini gözlemleyememesini ifade eder. Ayrıca statik oyunlarda birinci oyuncu satır oyuncusu, ikinci oyuncu sütun oyuncusu olarak adlandırılır. Dolayısıyla bu oyunlar matrisle gösterilirler. Söz konusu oyunlar, oyuncu sayısına göre iki kişilik ya da $n \geq 2$ olmak üzere $n -$kişilik olarak adlandırılır.

Stratejik oyunlar sınıfında yer alan statik oyunlar oyunun getirilerine açısından, sabit toplamlı oyunlar veya sabit toplamlı olmayan oyunlar olarak iki farklı sınıfta yer almaktadır.

Sabit toplamlı oyunlarda oyuncular hangi stratejiyi kullanırsa kullansın getirileri toplamı sabittir. Getiri toplamı özel olarak sıfır alındığında sıfır toplamlı oyunlar elde edilir. Sıfır toplamlı olan oyunlar sabit toplamlı oyunların içinde en fazla çalışılanıdır. Sıfır toplamlı oyunlarda oyuncuların çıkarları birbirine tamamıyla zıttır. Çünkü, herhangi bir oyuncunun kazancındaki artış başka bir oyuncunun kazancında o kadar azalma demektir. Ancak sabit toplamlı olmayan oyunlarda oyuncuların çıkarları tamamıyla zıt değildir. Oyuncular birlikte hareket ederek çıkar sağlayabilirler. Dolayısıyla bu tanımlamalara göre iki kişilik sıfır toplamlı oyunlar (matris oyunlar) bir oyuncunun kazancının diğer oyuncunun kaybına eşit olduğu oyunlardır. İki kişili sıfır toplamlı olmayan (bimatris oyunlar) oyunlarda oyuncuların getirileri toplamı sıfır değildir. Oyuncular aynı anda kazanıp aynı anda kaybedebilirler.

Strateji oyunlarının bir başka sınıflandırması ise bölüm 2.2 de bahsedildiği gibi strateji sayılarına göre yapılabilir. Oyuncuların strateji kümeleri sonlu ise sonlu oyun, strateji sayısı belirsiz ise oyun sonsuz oyun olur.



Şekil 1. Oyunların sınıflandırılması

2.4. Oyunların Gösterimleri

Oyun teorisindeki çalışmaların farklılaştığı kavramlardan bir tanesi de oyunların gösterim şekilleridir. Oyunların gösterimleri, normal (stratejik) olarak, yayvan (extensive) olarak ve karakteristik fonksiyon yardımı ile gösterim olmak üzere temelde üç ana başlık altında toplanmaktadır. Oyunların sınıflandırılmaları göz önüne alındığında statik oyunlar normal biçimde, dinamik oyunlar yayvan biçimde ve işbirlikli oyunlar da karakteristik fonksiyon yardımı ile gösterilir.

2.4.1. Normal Biçimde Gösterilen Oyunlar

Oyun süresince, oyuncuların sahip oldukları strateji kümelerinden yaptıkları seçimler sonucu elde edilen getirilerin (kazançların) matris ile ifade edildiği oyunlar bu sınıfta yer almaktadır. Strateji seçimleri sonucu elde edilen getirilerin yazıldığı matrise getiri matrisi ya da ödemeler matrisi denir (Morris, 1994). Statik oyunlar, oyuncuların stratejilerini eş zamanlı ve birbirlerinden bağımsız bir şekilde seçtiği, çoğunlukla da normal biçimde gösterilen oyunlardır. Söz konusu biçimdeki oyunlarda oyunun sonucuna göre farklı getiri matrisi kullanımları bulunmaktadır. Yani iki kişilik sıfır toplamlı olmayan bir statik oyunun normal biçimde gösterimi aşağıdaki getiri matrisi ile verilmektedir.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} II_1 & \quad II_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_1 \end{array} & \begin{bmatrix} (a_1, b_1) & (a_3, b_2) \\ (a_2, b_3) & (a_4, b_4) \end{bmatrix} \end{array}$$

Getiri matrisinde, I. oyuncunun getirisi (kazanç ya da kayıp) sıralı ikililerin ilk bileşenine, II. oyuncunun getirisi (kazanç ya da kayıp) sıralı ikililerin ikinci bileşenine yazılmıştır.

İki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda oyuncuların getirileri toplamı sıfır olduğundan bimatris oyunundaki getiri matrisinde

$$a_{ij} + b_{ij} = 0, \qquad i, j = 1,2$$

olur. Dolayısıyla bu oyunlar bimatris ile değil sadece satır oyuncusunun getirilerinin gösterildiği

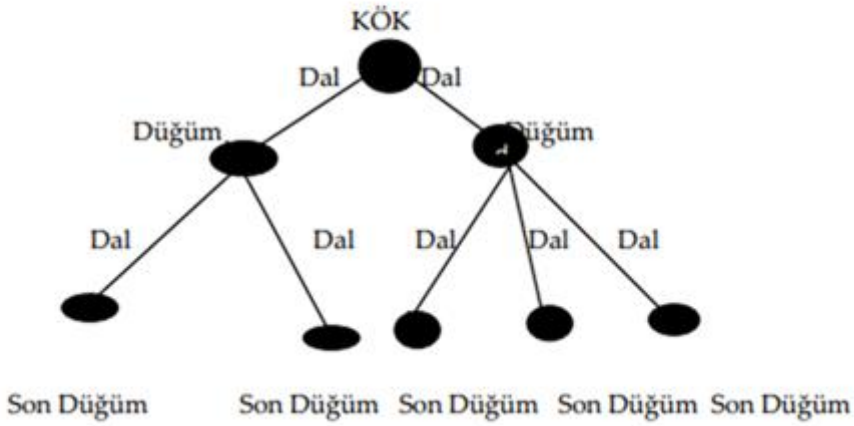
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_1 \end{array} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{array}$$

matris ile ifade edilir.

2.4.2. Yayvan Biçimde Gösterilen Oyunlar

Yayvan biçimde gösterilen oyunlar daha çok dinamik oyunlarda karşımıza çıkmaktadır. Dinamik oyunlar ardısal hareketlerin olduğu, oyuncuların birbirlerini gözlemlediği ve bu gözlemler sonucu hareket ettiği oyunlardır. Bu oyunlar oyun ağaçları kullanılarak gösterilir (YILMAZ, 2009). Bir oyun ağacı, oyunun herhangi bir aşamasında herhangi bir süre zarfında oyucuların oyunu oynaması aşamasında, stratejilerinin ne olacağını gösteren bir biçimli oyunlardır. Bu tür oyunların normal formdan en büyük farkı kurulan modellere zaman bileşeni eklenmesidir.

Bir oyun ağacında bu sebeple kök, dallar ve düğümler yer almaktadır. Bunların yanında oyunun oynanması için bir ilk harekete gerek vardır. Bu hareketlerin bulunduğu düğüme başlangıç düğümü, kök adı verilir. Her dal bir düğüme bir karara sahiptir. Bu nedenle her düğüm birden fazla stratejiye sahip olabilir. Bir düğüm dallara ayrılmıyorsa bu durumdaki düğüme son düğüm adı verilir (Uçan ve Aytekin, 2013). Statik oyunlardaki matris gösterimi dinamik oyunlar için pek elverişli değildir.



Şekil 2. Oyun ağacının gösterilme şeması

2.4.3. Karakteristik Fonksiyonlar

İşbirlikli (cooperative) oyunların gösteriminde karakteristik fonksiyonlar kullanılır. Oyuncu sayısının keyfi bir alt kümesi koalisyon olarak bilinir (Ahlatçıoğlu ve Tiryaki, 1998). Her bir K koleksiyonuna en büyük $v(K)$ ödemesini karşılık getiren v fonksiyonuna karakteristik fonksiyon denir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
İKİ KİŞİLİK SIFIR TOPLAMLI OYUNLAR

İki oyuncunun da getirileri toplamının sıfır olduğu oyunlara iki kişilik sıfır toplamlı oyun denir. Bu bölümde tam bilgili statik oyunlar sınıfında yer alan iki kişilik sıfır toplamlı oyunlar ele alınmıştır. İki kişilik sıfır toplamlı oyunlar getirileri matris ile ifade edilebildiği için matris oyunlar olarak da adlandırılırlar. Söz konusu oyunlarda en önemli unsur; her oyuncunun rakibinin kendisinin hangi stratejiyi seçeceği hakkında tam bilgiye sahip olmasının yanı sıra kendisi için maksimum kazancı getirecek olan stratejiyi seçme şansına sahip olmasıdır. Herhangi bir matris oyununda $I.$ oyuncunun m tane stratejisi $II.$ oyuncunun n tane stratejisi olduğu durumda oluşan mxn lik matrise oyunun getiri matrisi denir (Owen, 1995).

Getiri Matrisi

$I.$ oyuncunun m tane stratejisi $II.$ oyuncunun n tane stratejisi olduğu durumda bir oyununun getirisi mxn lik matris ile ifade edilir. $I.$ oyuncu keyfi $i.$ stratejisi olan I_i ve $II.$ oyuncu keyfi $j.$ stratejisi olan II_j ile oynadığında elde edilen getiri a_{ij} olur. Bu getiri $I.$ oyuncunun getirisini göstermektedir. Oyun sıfır toplamlı olduğundan $II.$ oyuncunun getirisi $-a_{ij}$ ile ifade edilir. Dolayısıyla $I.$ oyuncu $I_1, I_2, \dots, I_m$ stratejilerine $II.$ oyuncu $I_1, I_2, \dots, I_m$ stratejilerine sahip iken oyunun getiri matrisi

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & \cdots & II_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \end{bmatrix} \end{array}$$

olur. Getiri matrisi $I.$ oyuncunun getrilerini ifade etmektedir. Oyun sıfır toplamlı olduğu için $II.$ oyuncunun getirilerini gösteren matris $-A$ ile ifade edilir. Getiri matrisinin herhangi bir elemanı pozitifse, $II.$ oyuncu, $I.$ oyuncuya bu miktarda ödeme yapar. Matrisin herhangi bir elemanı negatif ise $I.$ oyuncu, $II.$ oyuncuya bu negatif elemanın mutlak değerine eşit miktarda ödemede yapar (Owen, 1995).

3.1. Saf Stratejiler ve Denge Noktası

Bölüm 2.2 de strateji kavramını, bir oyunda herhangi bir oyuncunun oyunun başından sonuna kadar ortaya çıkabilecek bütün durumlar için oyuncuların yaptığı seçimleri belirten kurallar bütününü strateji olarak tanımlamıştık. Oyun süresinde oyunculardan herhangi biri, diğer oyuncunun seçtiği stratejiyi dikkate almadan tek bir stratejiyi kullandığı yani diğer stratejilerini sıfır olasılıkla kullandığı stratejiler pür(saf) strateji olarak adlandırılır.

Bu kısımda saf stratejiler sınıfında denge noktası ve oyunun oynanma süreci ifade edilecektir.

Tanım 3.1.1 (Barron, 2008) A matrisinde i satır numarası , j sütun numarası olmak üzere (i, j) ikilisi matris oyununda bir durum belirlemektedir. $i = 1, \ldots\ldots, m$ ve $j = 1, \ldots\ldots, n$ için

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}, \forall \mathrm{i}$$

$$a_{i^*j} \geq a_{i^*j^*}, \forall j$$

eşitsizliğini sağlayan (i^*, j^*) durumu bir denge durumudur. Denge durumundaki $a_{i^*j^*}$ matris elemanına saf stratejiler sınıfında denge (eyer) noktası denir. Denge noktası tanımı dikkate alındığında $a_{i^*j^*}$ elemanı satırdaki en küçük sütundaki en büyük eleman olarak da ifade edilebilir. Aşağıda verilmiş olan getiri matrislerinde $a_{21} = -1$ A matrisinin, $b_{12} = 1$ ve $b_{33} = 1$ B matrisinin denge noktalarıdır. Ancak C matrisin bir denge noktası yoktur.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Denge noktasını veren stratejiler en iyi stratejilerdir. Denge durumunda ortaya çıkan değerler I. oyuncunun elde edeceği kazançların maksimumunu gösterirken, II. oyuncunun da kayıplarının minimumunu gösterir. Oyunculardan herhangi biri veya her ikisi denge stratejisini tercih etmediği zaman, oyuncuların kazançlarında azalma veya kayıplarında artma olur. Dolayısıyla denge stratejilerini seçmek rasyonel bir davranıştır.

Teorem 3.1.2 (Barron, 2008) $A=(a_{ij})$ getiri matrisinde a_{ij} ve a_{kl} denge noktaları ise bu durumda a_{il} ve a_{kj} değerleri de denge noktasıdır. Üstelik,

$$a_{ij}=a_{kl}=a_{il}=a_{kj}$$

dir.

Tanım 3.1.3 (Barron, 2008) Getiri matrisi $A=(a_{ij})$ olan bir matris oyununda

$$v^{-}=\max_{i=1,2,\dots,m}\ \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij}$$

değerine oyunun alt değeri,

$$v^{+}=\min_{j=1,2,\dots,n}\ \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$$

değerine oyunun üst değeri ve alt değerin üst değere eşit olduğu

$$v^{-}=v^{+}=v$$

v değerine de oyun değeri denir.

$I.$ oyuncunun kazançlarının alt sınırı v^{-}değeri, $II.$ oyuncunun kayıplarının üst sınırı v^{+}değeri ile ifade edilmektedir.

Bir matris oyununda $I.$ oyuncunun m tane $\{I_1, I_2, \dots \dots .., I_m\}$, $II.$ oyuncunun n tane $\{II_1, II_2, \dots \dots ., II_n\}$ saf stratejisi olduğunu kabul edelim. Oyunda her iki oyuncu da stratejilerini kullanarak kazançlarını(getirilerini) maksimalleştirmeye çalışacaklardır. Oyun sıfır toplamlı olduğundan $I.$ oyuncunun kazancını maksimalleştirmesi, $II.$ oyuncunun kaybını minimalleştirmesine denk olur. $I.$ oyuncunun I_i stratejisini seçtiğini varsayalım. Bu durumda $II.$ oyuncunun seçeceği en iyi strateji,

$$a_{ij_*}=\min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij}$$

eşitsizliğini sağlayacak II_{j_*}stratejisi olur. Bunun üzerine $I.$ oyuncu kazancını maksimalleştirmek için

$$\max_{i=1,2,\dots,m}\ \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij}=\min_{j=1,2,\dots,n} a_{i_*j}$$

olacak biçimdeki I_{i_*} stratejisidir. Benzer biçimde $II.$ oyuncunun II_{j*} stratejisini seçtiğini varsayalım. Bu durumda $I.$ oyuncunun seçeceği en iyi strateji,

$$a_{i_* j} = \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$$

eşitliğini sağlayan I_{i_*} stratejisi olur. Buna karşı II. oyuncunun amacı getirileri minimalleştirmek olduğundan seçeceği en iyi strateji,

$$\min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij} = \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij_*}$$

eşitliğini sağlayacak II_{j_*} stratejisi olacaktır.

Teorem 3.1.4 (Barron, 2008) Getiri matrisi $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ olan oyunda

$$v^- \le v^+$$

dır.

İspat I. oyuncu I_{i_*} ve II. oyuncu II_{j_*} keyfi stratejilerini seçsinler ve bu durumda

$$\min_{j=1,2,\dots,n} a_{i_* j} \le a_{i_* j_*}$$

olur. Bu eşitsizlikte her sabitlenmiş $i_* = 1,2,\dots\dots,n$ için doğru olduğundan,

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} \le \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij_*}$$

olduğu bulunur. Son eşitsizlikte j_* keyfi sabitlenmiş olduğundan,

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} \le \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$$

yani,

$$v^- \le v^+$$

olduğu görülür.

Örnek 3.1.5 Getiri matrisi aşağıdaki şekilde verilmiş olan oyunun değerini bulalım.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 4 & 7 \\ 7 & -1 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v^- = \max_{i=1,\dots,4} \min_{j=1,\dots,5} a_{ij} = \max\{\min_j a_{1j}, \min_j a_{2j}, \min_j a_{3j}, \min_j a_{4j}\}$$

$$= \max\{1,0,4,-1\} = 4$$

$$v^+ = \min_{j=1,\dots,5} \max_{i=1,\dots,4} a_{ij} = \min\{\max_i a_{i1}, \max_i a_{i2}, \max_i a_{i3}, \max_i a_{i4}, \max_i a_{i5}\}$$

$$= \min\{7,6,4,6,7\} = 4$$

olur. Dolayısıyla $v^- = v^+ = 4$ olduğundan oyun değeri $v = 4$ olur.

Örnek 3.1.6 Okan ile Merve birbirlerinden saklı olarak (0,4) aralığından bir tam sayı seçip bir kâğıda yazıyorlar. Tutulan sayıların toplamı tek ise Okan, çiftse Merve kazanıyor. Kaybeden taraf, kazanan tarafa sayının toplamının karesi kadar para ödüyor. Oyun matrisini yazınız.

Çözüm Oyundaki oyuncelardam Okan'ın strateji kümesi $\{O_1, O_2, O_3\}$ Merve'nin strateji kümesi $\{M_1, M_2, M_3\}$ ile gösterilsin. Burada

$O_1 = (0,4)$ aralığından 1'i seçmesi

$O_2 = (0,4)$ aralığından 2'yi seçmesi

$O_3 = (0,4)$ aralığından 3'ü seçmesi

dir. Merve'nin de benzer seçimleri olduğu düşünülürse oyunun getiri matrisi

$$\begin{array}{cc} & MERVE \\ & \begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & M_3 \end{array} \\ OKAN \begin{array}{c} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -4 & 9 & -16 \\ 9 & -16 & 25 \\ -16 & 25 & -36 \end{pmatrix} \end{array}$$

olarak elde edilir. Satır minimumları sütun maksimumlarına eşit olmadığı için oyunda denge noktası yoktur.

Örnek 3.1.6 da olduğu gibi saf stratejiler sınıfında denge noktasına sahip olmayan oyunlar için bir sonraki bölümde farklı bir strateji tanımı verilecektir.

3.2 Karma Stratejiler ve Denge Noktası

Bir önceki bölümde saf stratejiler sınıfında denge noktasına sahip oyunların oyun değerinden bahsedildi. Matris oyunlarında saf stratejiler sınıfında her zaman bir oyun değeri olmayabilir (Owen, 1995). Bu gibi durumlarda oyuncular herhangi bir stratejisini seçerek denge noktasını elde edemez. Çünkü I. oyuncu sürekli I_1 stratejisini seçtiğinde $II.$ oyuncu bu durumu anladığında her zaman kendi en iyi stratejisini seçer. Dolayısıyla $II.$ oyuncu her zaman avantajlı duruma geçer. Benzer durum $I.$ oyuncu içinde geçerlidir. Dolaysıyla oyun hiçbir zaman dengeye ulaşmaz ve sonsuz bir tekrara girebilir. Ancak, oyuncular stratejilerini rastgele seçerlerse bu durum ortadan kalkmış olur. Bu durumda oyuncular rakibinin hangi stratejiyi seçtiğini tahmin edemez ama hangi sıklıkla seçtiğini tahmin edebilir (Morris, 1994). Bu bölümde oyuncuların, oyun esnasında stratejilerini rasgele seçtiği yani saf stratejilerin rasgele sıralanışından oluşan karma strateji tanımı verilecektir.

Tanım 3.2.1 (Owen, 1995) Oyuncuların saf stratejilerini seçme olasılıklarını gösteren rassal değişkenlere oyuncuların karma stratejileri denir. Dolayısıyla, $m \times n$ lik matris oyununda $I.$ oyuncunun karma stratejisi

$$x_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$$

ve

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

olacak biçimdeki $x = (x_1, x_2, \dots \dots .., x_m)$ vektörüdür. Dolayısıyla $I.$ oyuncunun karma stratejilerinin kümesi

$$X = \{x = (x_1, x_2, \dots \dots .., x_m) : \ x_i \geq 0, (i = 1, \dots .., m) \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$$

şeklinde gösterilir. Benzer şekilde $II.$ oyuncunun karma stratejiler kümesi

$$Y = \{y = (y_1, y_2, \dots \dots .., y_n) : \ y_j \geq 0, (j = 1, \dots .., n) \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}$$

ile gösterilir.

I. oyuncunun $x = (x_1, x_2, \dots \dots \dots, x_m)$ karma stratejisi ile oynaması I_1 saf statejisini x_1, I_2 saf stratejisini x_2 benzer şekilde I_m saf stratejisini x_m olasılığı ile oynadığı anlamına gelir. II. oyuncu içinde benzer durum söz konusudur. Öte yandan, I. oyuncu i. stratejisini 1 olasılıkla diğer tüm saf stratejilerini 0 olasılıkla seçtiğinde yani $X = \{0,0, \dots, 0,1,0, \dots, 0\}$ karma stratejisi ile oynadığında sadece i. saf stratejisi ile oynamış olur. Bundan dolayı mevcut saf stratejiler karma stratejilerin özel bir halidir.

Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

olan bir oyunda I. oyuncu $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ karma stratejisi ve II. oyuncu $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ karma stratejisini seçtiğinde I. oyuncunun beklenen kazancı;

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$$

biçiminde elde edilir. Söz konusu getirinin matris ile temsili;

$$E(X, Y) = XAY^T$$

biçiminde gösterilir. Burada y^T vektörü, $y^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y$ vektörünün transpozudur.

I. oyuncu $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ karma stratejisi ve II. oyuncu keyfi j saf stratejisini seçtiğinde, I. oyuncunun beklenen kazancı(getirisi)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}$$

olur. Benzer biçimde I. oyuncu keyfi i saf stratejisi ve II. oyuncu $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ karma stratejisini seçtiğinde I. oyuncunun beklenen kazancı(getirisi)

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j$$

olur.

Teorem 3.2.2 Matris oyuncularının karma stratejiler kümeleri kompakt ve konveks kümelerdir.

İspat (Guseionov ve ark., 2012) $(x_1, x_2, \dots \dots., x_m) \in X$ olsun.

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$$

dir. Yani keyfi $x \in X$ için $\|x\| \leq 1$ olur. Bu ise X kümesinin sınırlı olması demektir. Öte yandan, X kümesi kapalı küme olduğundan X kümesinin kompakt olduğu elde edilir. Öte yandan

$$x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots \dots., x_m^{(1)}\right) \in X \,, x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots \dots., x_m^{(2)}\right) \in X$$

ve $\alpha \in [0,1]$ olsun.

$\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)} = \alpha x_1^{(1)} + (1-\alpha)x_1^{(2)} + \alpha\, x_2^{(1)} + (1-\alpha)x_2^{(2)} + \cdots + \alpha x_m^{(1)} +$

$(1-\alpha)x_m^{(2)}$ dir. Hipotezden $i = 1,2, \dots, m$ için

$$x_i^{(1)} \geq 0, x_i^{(2)} \geq 0 \;\Rightarrow \alpha x_i^{(1)} + (1-\alpha)x_i^{(2)} \geq 0$$

olur. Ayrıca $\sum_{i=1}^{m} x_i^{(1)} = 1$ ve $\sum_{i=1}^{m} x_i^{(2)} = 1$ olduğu için

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha x_i^{(1)} + (1-\alpha)x_i^{(2)}\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{m}(1-\alpha)\, x_i^{(2)} = 1$$

elde edilir. Bu ise $\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)} \in X$ demektir. Yani X konvekstir.

Tanım 3.2.3 (Morris, 1994) $A = (a_{ij}),\ m \times n$ lik bir matris oyunu olsun. O halde,

$$V_r(A) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} E(X, Y)$$

sayısına karma stratejiler sınıfında oyunun **alt değeri**,

$$V_c(A) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} E(X, Y)$$

sayısına da karma stratejiler sınıfında oyunun **üst değeri** adı verilir.

$$V_r(A) = V_c(A) = v$$

ise oyunun değeri vardır ve v sayısına **oyun değeri** adı verilir.

Teorem 3.2.4 (Von Neumann, 1944) Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

olan iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunların karma stratejiler sınıfında her zaman oyun değeri vardır. Yani,

$$V_r(A) = V_c(A) = v$$

dir.

Tanım 3.2.5 (Barron, 2008) v oyun değeri olmak üzere,

$$\min_{y} E(X^*, Y) \max_{x} \min_{y} E(X, Y)$$

olacak biçimdeki X^* stratejisine $I.$ oyuncunun optimal stratejisi,

$$\max_{x} E(X, Y^*) \min_{y} \max_{x} E(X, Y)$$

olacak biçimdeki Y^* stratejisine $II.$ oyuncunun optimal stratejisi denir.

$I.$ oyuncu X^* optimal stratejisi ile oynadığında en az $v(A)$ değeri kadar kazanacağını garanti ederken $II.$ oyuncu da Y^* optimal stratejisi ile oynadığında en fazla $v(A)$ değeri kadar kaybedeceğini garanti etmiş olur.

Teorem 3.2.6 (Owen, 1995) $A = (a_{ij}),\ m \times n$ lik bir matris ve X^*, Y^* sırasıyla $I.$ ve $II.$ oyuncunun optimal stratejileri olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$V_r(M) \leq E(X^*, Y^*) \leq V_c(M)$$

Tanım 3.2.7 (Owen, 1995) I.oyuncunun X^* karma stratejisi, Y^*, II. oyuncunun karma stratejisi olmak üzere,

$$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y)$$

olacak biçimdeki (X^*, Y^*) ikilisine karma stratejiler sınıfında bir eyer(denge) noktası, X^* ve Y^* stratejilerine denge stratejileri denir.

Tanım 3.2.8 (Guseinov ve ark., 2012) $X^* \in X$, I. oyuncunun, $Y^* \in Y$, II. oyuncunun optimal karma stratejisi ve v oyun değeri olsun. O halde oyunun çözümü (X^*, Y^*, v) ile tanımlanmaktadır.

Tanım 3.2.9 (Barron, 2008) $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, I. oyuncunun optimal karma stratejisi olsun. Keyfi i için $x_i > 0$ olan I_i saf stratejisine I. oyuncunun aktif stratejisi benzer şekilde $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, II. oyuncunun optimal karma stratejisi olsun. Keyfi j için $y_j > 0$ olan II_j pür stratejisine II. oyuncunun aktif stratejisi denir.

Teorem 3.2.10 (Barron, 2008) (X, Y, v), getiri matrisi $(A)_{nxm}$ ile verilmiş bir oyunun çözümü ve mevcut pür stratejilerin hepsi aktif strateji ise bu takdirde,

$$E(X, j) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = v$$

ve

$$E(i, Y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = v$$

dir.

Matris oyunların çözümlerine katkı sağlayabilen üstünlük (baskınlık) stratejisi kavramını ifade edelim.

Tanım 3.2.11 (Barron, 2008) $A = (a_{ij})$, $m \times n$ lik bir matris olsun. Eğer

$$a_{ij} \geq a_{kj}\,, \qquad \forall j = 1,2, \dots, m$$

eşitsizliği sağlanıyor ise I. oyuncunun i. stratejisi k. stratejisine baskındır benzer şekilde

$$a_{ij} \leq a_{il}, \forall i = 1,2,\dots,n$$

ise II. oyuncunun II_j stratejisi II_l stratejisine baskındır denir. Bir matris oyununda bastırılan stratejiler silindikten sonra oyun sadeleşmiş olur.

I. oyuncunun I_i stratejisi I_k stratejisine baskın olsun. I. oyuncu I_i stratejisi ile oynadığında buna karşın II. oyuncunun strateji seçiminden bağımsız olarak I. oyuncu k. stratejisini seçtiği anda elde ettiği getiriden (kazançtan) daha fazlasına ulaşır. Dolayısıyla I. oyuncu I_k stratejisini kullanmaz. Benzer durum II. oyuncu içinde geçerlidir.

Örnek 3.2.12 Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

olan bir matris oyunu verilmiş olsun. Bu şekildeki bir matriste oyuncuların hiçbir stratejisi diğerine baskın değildir.

Örnek 3.2.13 Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

olan bir matris oyunu verilmiş olsun. Üstün stratejileri belirleyip oyunu sadeleştiriniz.

Çözüm Oyunun getiri matrisinde

$$a_{1j} > a_{3j}, \qquad \forall j = 1,2,3$$

olduğundan I. oyuncunun I_1 stratejisi I_3 stratejisine baskındır. Bu durumda I. oyuncu I_1 stratejisi ile oynadığında II. oyuncu hangi stratejisini seçerse seçsin I_3 stratejisinden fazla kazanacaktır. Bu koşullar altında rasyonel olduğu varsayılan I oyuncu hiçbir zaman I_3 strateji ile oynamak istemeyecek ve o strateji satırı matristen silinecektir. O halde

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

olur. A' matrisinde

$$a_{i2} < a_{i3}, \qquad \forall i = 1,2$$

olduğundan $II.$ oyuncunun II_2 stratejisi II_3 stratejisine baskındır. Bu durumda $I.$ oyuncu hangi stratejisini seçerse seçsin II oyuncu kayıplarını azaltmak için II_3 stratejisini tercih etmeyecek ve o strateji sütunu matristen silinerek

$$A'' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $I.$ oyuncu için kalan stratejiler dikkate alındığında

$$a_{1j} \geq a_{2j}\,, \qquad \forall j = 1,2$$

olduğundan $I.$ oyuncunun I_1 stratejisi I_2 stratejisine baskındır. Yukarıdaki açıklamalara benzer olarak basılan strateji silinerek

$$A''' = [2 \quad 4]$$

elde edilir. Yeni oluşan matrise göre I. oyuncunun tek alternatifi vardır. $II.$ oyuncu için II_2 stratejisini oynamak daha fazla kaybedeceği anlamına geldiği için $II.$ oyuncu için baskın strateji II_1 stratejisidir. Basılan strateji sütunu matristen silinerek

$$A''' = [2]$$

elde edilir. Yani $I.$ oyuncu I_1 stratejisi ve $II.$ oyuncu II_1 stratejisini seçerek oyun değerine ulaşmış olacaktır.

Baskın stratejiler silindikten sonra elde edilen yeni matris ile verilen oyun sadeleştirilmiş oyun olarak ifade edilir (Guseinov ve ark., 2011).

Teorem 3.2.14 (Guseinov ve ark., 2011) Sadeleştirilmiş oyunun çözümü verilen oyunun da çözümüdür.

Baskın stratejiler oyunun getiri matrisinden silinmektedir. Silinen stratejilerin optimal strateji olamayacağını aşağıdaki teoremler ile ifade edelim.

Teorem 3.2.15 (Ahlatçıoğlu ve Tiryaki, 1998) Getiri matrisi $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ ile verilmiş olan oyunda $I.$ oyuncunun keyfi I_i stratejisi, I_k stratejisine baskın ve I_k optimal ise I_i stratejisi de optimaldir. Benzer durum $II.$ oyuncu içinde geçerlidir.

3.3 2x2 Boyutlu Matris Oyunların Çözümü

$I.$ ve $II.$ oyuncunun ikişer tane pür stratejisinin olduğu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

getiri matrisli oyunu göz önüne alalım. Kabul edelim ki saf stratejilerde oyunun bir çözümü olmasın. Karma stratejilerde oyunun çözümünü bulalım. $X^* = (x^*, 1 - x^*)$ ve $Y^* = (y^*, 1 - y^*)$ sırasıyla $I.$ ve $II.$ oyuncunun optimal karma stratejileri olsun. Oyuncuların stratejileri arasında baskınlık olması durumunda basılan strateji optimal strateji olamayacağından bu durumda geriye kalan tek stratejiyi oynama olasılığı 1 olur ve bu da saf stratejilerde çözüm olması demektir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. Oyunculardan birinin stratejileri arasında denklik olması durumunda oyuncu denk stratejilerini istediği gibi kullanacağı için oyunun çözümü birden fazla denge noktasında oluşacaktır (Ahlatçıoğlu ve Tiryaki, 1998). Dolayısıyla her iki oyuncunun optimal stratejileri pür olmayacağından $0 < x^*, y^* < 1$ dir.

$I.$ ve $II.$ oyuncu sırasıyla $X^*\ ve\ Y^*$ karma stratejilerini seçtiklerinde $I.$ oyuncu için oyunun getirisi (kazancı)

$$\begin{aligned} E(X,Y) = XAY^T &= (x^*, 1 - x^*)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y^* \\ 1 - y^* \end{pmatrix} \\ &= y^*(x^*a_{11} + (1 - x^*)a_{21}) + (1 - y^*)(x^*a_{12} + (1 - x^*)a_{22}) \\ &= x^*[y^*(a_{11} - a_{21}) + (1 - y)(a_{12} - a_{22})] + a_{12} - a_{22} \end{aligned}$$

dir. X^* ve Y^* optimal stratejiler olduğundan $E(X,Y)$ ödeme fonksiyonu

$$E(X,Y^*) \leq E(X^*,Y^*) \leq E(X^*,Y)$$

eşitsizliğini sağlar. Bu da

$$\max_{\mathrm{x}} E(X,Y^*) = E(X^*,Y^*) = \min_{\mathrm{y}} E(X^*,Y)$$

demektir. Optimal pür strateji olmadığından son eşitlikteki maksimum ve minimuma (0,1) aralığında ulaşılır. Böylece, $E(X^*, Y^*)$ fonksiyonunun x ve y ye göre kısmi türevlerini alıp sıfıra eşitlersek tüm olası kritik noktaları elde edilir.

$$\frac{\partial E(X^*, Y^*)}{\partial x} = y\alpha + \beta = 0$$

$$\frac{\partial E(X^*, Y^*)}{\partial y} = x\alpha + \gamma = 0$$

eşitlikleri ile kritik noktalar elde edilir. Burada, $\alpha, \beta\ ve\ \gamma$ sayıları aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

$$\alpha = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \qquad \beta = a_{12} - a_{22}, \qquad \gamma = a_{21} - a_{22}$$

Eğer $\alpha = 0$ ve $\beta, \gamma \neq 0$ ise

$$\frac{\partial E(X^*, Y^*)}{\partial x} \neq 0, \frac{\partial E(X^*, Y^*)}{\partial y} \neq 0$$

dır. Bu durumda optimal saf stratejiler mevcuttur ancak bu mümkün olmadığından,

$$y\alpha + \beta = 0, \qquad x\alpha + \gamma = 0$$

şeklinde olacaktır. Yani,

$$x^* = -\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

$$y^* = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

(x^*, y^*) noktasının bir denge noktası(eyer noktası) olması için

$$H = \begin{vmatrix} E_{xx} & E_{xy} \\ E_{yx} & E_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} = -\alpha^2 < 0$$

dır. $\alpha = 0$ olmadığı taktirde bu determinant tanımsız olduğu için kritik nokta bir eğer noktasıdır. Oyun değeri ise

$$v = E(X^*, Y^*) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

olarak bulunur (Barron, 2008).

Örnek 3.3.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ getiri matrisi ile verilen oyununun oyun değeri ve optimal stratejilerini bulunuz.

Çözüm $X^* = (x, 1-x)$ I. oyuncunun optimal karma stratejisi olmak üzere bir önceki ifadeden,

$$x = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0} = \frac{1}{4}$$

dir. Yani $X^* = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ olur. Benzer yolla II. oyuncunun $Y^* = (y, 1-y)$ karma stratejisi de;

$$y = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0} = \frac{1}{2}$$

dir. Yani $Y^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olur. Dolayısıyla oyun değeri de;

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1}{4}$$

olarak bulunur. Bu sebeple verilen oyunun çözümü $(X^*, Y^*, v) = (\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{1}{4})$ olarak bulunmuş olur.

Teorem 3.3.2 (Owen, 1995) $A = \left(a_{ij}\right)_{2x2}$ ile verilen bir matris oyununda saf stratejilerde bir denge noktası olmasın. Oyunun çözümünü veren optimal stratejileri

$$(X, Y) = \left(\frac{JA^*}{JA^*J^T}, \frac{A^*J^T}{JA^*J^T}\right)$$

eşitliği ile ve oyun değeri v

$$v = \frac{\det A}{JA^*J^T}$$

ile bulunur (A^*, A matrisinin adjointi ve $J = (1,1)$).

Örnek 3.3.3 Getiri matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ile verilen oyunun çözümünü bulunuz.

Çözüm Verilen oyunda saf stratejiler sınıfında bir denge noktası yoktur. Teorem 3.3.2 den

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \det A = 2$$

dir. Dolayısıyla

$$JA^* = (1,1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (3,1)$$

$$A^*J^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2,2)$$

$$JA^*J^T = (1,1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

sonuçları kullanılarak oyunun çözümü

$$x = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), v = \frac{1}{2}$$

dir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

İKİ KİŞİLİK SIFIR TOPLAMLI OLMAYAN OYUNLAR

Günlük hayatta iki oyuncunun çıkarlarının tamamen zıt olması genelde doğru değildir. Oyuncular arasındaki işbirliğinin oyunun sonucuna etki etmesi ile oyuncuların her ikisi de kazanıp her ikisi de kaybedebilirler. Dolayısıyla bu şekilde iki kişilik sıfır toplamlı olmayan oyunlar bimatris oyunlar olarak bilinirler (Guseinov ve ark., 2011).

4.1. Bimatris Oyunlar

Tanım 4.1.1 (Ferguson, 2008) I. oyuncunun sonlu strateji kümesi $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ ve II. oyuncunun sonlu strateji kümesi $\{II_1, II_2, \dots, II_m\}$ olmak üzere (I_i, II_j) strateji ikilisi seçildiğinde, I. ve II. oyuncunun ödemeleri sırasıyla $a_{ij} = g_1(I_i, II_j)$ ve $b_{ij} = g_2(I_i, II_j)$ biçiminde olur. Burada g_1 ve g_2 getiri fonksiyonlarıdır. I. oyuncunun getiri matrisi A ve II. oyuncunun getiri matrisi B olmak üzere;

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} II_1 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array} \quad B = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} II_1 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

iken (A, B) matris çifti

$$(A, B) = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} II_1 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & \cdots & (a_{11}, b_{11}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}, b_{n1}) & \cdots & (a_{nm}, b_{nm}) \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.1}$$

biçiminde yazılabilir.

Tanım 4.1.2 (Ferguson, 2008) x ve y olasılık vektörleri olmak üzere

$$X_n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \; x_i \geq 0 \, , \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

$$Y_m = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_m) : \; y_j \geq 0 \,, \sum_{j=1}^{m} y_j = 1 \right\}$$

kümelerine sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri kümesi denir.

Tanım 4.1.3 (Ferguson, 2008) Getiri matrisi (4.1) ile verilmiş olan oyunda

$$H_I(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$$

$$H_{II}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i b_{ij} y_j$$

eşitlikleri sırasıyla, I. ve II. oyuncunun beklenen getirileridir.

Getiri bimatrisi (4.1) eşitliği ile verilen bir bimatris oyununda bimatrisin ilk bileşenlerinden oluşan birinci oyuncunun getirilerini ifade eden

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} II_1 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

getiri matrisli oyunun max-min değeri

$$v_A = \max_x \min_y H_I(x,y)$$

ile ikinci oyuncunun getirilerini ifade eden

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} II_1 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{array} & \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

getiri matrisli oyunun max-min değeri

$$v_B = \max_x \min_y H_{II}(x,y)$$

ile bulunurken (4.1) eşitliğinde verilen (A, B) bimatris oyununun max-min değeri de (v_A, v_B) ile tanımlıdır (Guseinov ve ark., 2011).

Tanım 4.1.4 (Guseinov ve ark., 2011) Getiri bimatrisi (4.1) ile verilen bimatris oyununda

$$v_A = \min_y H_I(x_0, y)$$

olacak şekildeki $x_0 \in X_n$ stratejisine I. oyuncunun,

$$v_A = \min_y H_{II}(x, y_0)$$

olacak şekildeki $y_0 \in Y_m$ stratejisine II. oyuncunun ve (x_0, y_0)' a da bimatris oyununun max-min stratejisi denir.

Örnek 4.1.5 Getiri bimatrisi

$$G = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1,-1) & (3,2) \\ (-2,3) & (7,5) \end{bmatrix} \end{array}$$

ile verilen oyunun max-min stratejilerini ve max-min değerlerini bulunuz.

Çözüm I. ve II. oyuncunun getiri matrislerini sırasıyla O_1 ve O_2 ile gösterelim. O halde

$$O_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

dir. O_1 getiri matrisli oyunda I. oyuncu kazancını arttırmak için oynarken II. oyuncu rakibinin kazancını azaltmak için oynar. Dolayısıyla oyunun baskın strateji kontrolü ile çözümünü inceleyecek olursak,

$$\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} II_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} II_1 \\ I_1 \; [1] \end{array}$$

şeklinde $(I_1, II_1, 1)$ elde ederiz. Yani G getiri bimatrisli oyunda I. oyuncunun max-min değeri $v_{O_1} = 1$ ve max-min stratejisi I_1 dir. Benzer işlemler II. oyuncu için de yapılarak,

$$\begin{array}{ccc} & II_1 & II_2 \\ I_1 & -1 & 2 \\ I_2 & 3 & 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & II_2 \\ I_1 & 2 \\ I_2 & 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & II_2 \\ I_1 & [3] \end{array}$$

olduğu gibi II. oyuncunun max-min değeri $v_{O_2} = 3$ ve max-min stratejisi II_2 dir. Sonuç olarak G getiri bimatrisli oyunda max-min değeri $(v_{O_1}, v_{O_2}) = (1,3)$ ve max-min stratejisi (I_1, II_2) dir.

Tanım 4.1.6 (Ferguson, 2008) x_0, y_0 sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri olsun. Bu durumda,

$$H_1(x, y_0) \leq H_1(x_0, y_0), \quad x \in X_n$$

$$H_2(x_0, y) \leq H_2(x_0, y_0), \quad y \in Y_m$$

eşitsizliklerini sağlayan (x_0, y_0) ikilisine oyunun denge ikilisi denir.

Bimatris oyunlar sınıfında denge ikilisinin varlığı kavramı çok önemlidir. Matris oyunlarında Teorem 3.2.4 ile verilen Von Neumann'ın meşhur denge noktasının varlığı bilgisinin bimatris oyunlarındaki karşılığı J.F. Nash (1951) de ifade ettiği Nash dengesi olarak da bilinen teoremi verelim.

Teorem 4.1.7 İki kişilik sonlu oyunun en az bir denge ikilisi (Nash dengesi) vardır.

Örnek 4.1.8 (Mahkumlar İkilemi) Polis göz altına aldığı iki suçluya soruşturma yapmaktadır. Ancak delil yetersizliği sebebiyle suçluları birbirlerinden ayrı hücrelerde tutup onlara bir anlaşma teklif etmektedir. Anlaşma şu şekildedir:

● Suçlulardan biri diğer suçlunun aleyhinde itirafta bulunur, diğer suçlu suskun kalırsa, itiraf eden ceza almayacak, susmayı tercih edene 10 yıl hapis cezası verilecektir.

● İki suçlu da karşı taraf aleyhinde itirafta bulunmaz ise her ikisine de 1 yıl hapis cezası verilecektir.

● İki suçlu da karşı taraf aleyhinde itirafta bulunur ise, her ikisine de 5 yıl hapis cezası verilecektir.

Bu durumda mahkumlar için en iyi davranış ne olur?

Çözüm Her iki mahkum için strateji kümesi iki elemanlı bir küme olacaktır. Mahkumlar birer oyuncu olarak görülürse I. mahkumun stratejileri kümesi $I = \{I_1, I_2\}$, $II.$ mahkumun stratejileri kümesi $II = \{II_1, II_2\}$ olmak üzere

I_1: İtiraf etmek, I_2: İnkar etmek

II_1: İtiraf etmek, II_2: İnkar etmek

dir. Önce $I.$ mahkum için ceza matrisini elde etmeye çalışalım. $I.$ sanık $II.$ sanığın itiraf edeceğini umarak kendisi için en iyi tercih suçu kabul etmek olacaktır. Ancak $I.$ mahkum, $II.$ mahkumun suçu inkar edeceğini düşünerek kendisi için en iyi tercih suçu kabul etmek olacaktır. Bu şekilde $I.$ mahkumun ceza matrisi

$II.$ Mahkûm

		İtiraf	İnkar
$I.$ Mahkûm	İtiraf	-5	0
	İnkar	-10	-1

olur. Benzer şekilde $II.$ mahkumun ceza matrisi

$II.$ Mahkûm

		İtiraf	İnkar
$I.$ Mahkûm	İtiraf	-5	-10
	İnkar	0	-1

olur. Bu iki ayrı ceza matrisleri bi-matris olarak ifade edilecek olursa

$II.$ Mahkûm

		İtiraf	İnkar
$I.$ Mahkûm	İtiraf	(-5,-5)	(0,-10)
	İnkar	(-10,0)	(-1,-1)

Bu bağlamda iki suçlu da itiraf etmek ya da suskun kalmak arasında bir seçim yapmak mecburiyetindedir. Suçlular soruşturma bitene kadar karşı tarafın kararını bilmeden seçim yapmak zorundadırlar. Böylece iletişim kuramayan suçlular rasyonel mi davranıp karar verecekler yoksa iyi niyetli mi yaklaşıp seçimlerini buna göre yapacaklardır ?

$I.$ mahkum $II.$ mahkumun itiraf ettiğini kabul eder ve kendi de itirafta bulunursa 5 yıl hapis yatacak ama $II.$ mahkum itirafta bulunup kendi inkar ederse 10 yıl hapis yatacaktır. Dolayısıyla $II.$ mahkum itiraf ettiyse $I.$ mahkum da mantıklı olanı yani itiraf etmeyi seçer.

$I.$ mahkum $II.$ mahkumun inkar ettiğini kabul eder ve kendi itiraf ederse mahkum olmayacak ama $II.$ mahkum gibi kendi de inkar ederse 1 yıla mahkum olacak. Dolayısıyla $II.$ mahkum inkar ettiyse $I.$ mahkum bir kere daha mantıklı olanı yani itiraf etmeyi seçer.

$II.$ mahkumun inkar ya da itiraf edip etmediğinden bağımsız olarak $I.$ mahkum itiraf etmeyi seçer. Benzer durumlar $II.$ mahkum için de geçerlidir ve o da itiraf etmeyi seçer. Rasyonel olarak tercih ettikleri bu stratejilere Nash dengesi denilir ve $(I_1, II_1) = (-5, -5)$ olarak elde edilir. Oysa genel olarak bakıldığında iki mahkumun da inkar ettiği optimal durum vardı $(I_2, II_2) = (-1, -1)$ ama iki mahkum da itirafta bulunup 5 yıl hapis yatıyorlar. Peki niye ikisi de inkar etmedi ?

Sorunun cevabı bu durumun kararlı olmamasıdır. İki mahkumdan biri tam da o anda kendi kararını değiştirip durumunu daha iyiye getirebilir.. $I.$ oyuncu $II.$ oyuncunun kesin olarak inkar ettiğini bilirse kararından vazgeçip itirafta bulunarak ceza almaz. Aynı şekilde $II.$ mahkum da $I.$ oyuncunun inkar ettiğini kesin bilirse o da itirafta bulunma durumuna geçerek sonuçları eşitler. Böyle düşündüklerinde $(-1, -1)$ yerine ceza almamaya gidebilirler ki bu da kararsız bir optimal senaryodur. Bu sebepten dolayı, Nash dengesi $(I_1, II_1) = (-5, -5)$ oldukça kararlı bir senaryodur. Karşı tarafın ne karar verdiğine bakmaksızın itiraf etmek kazançlı olan seçenektir.

İki suçlu da kısa süre hapiste kalmayı uzun sürelisine tercih edecek ve karşı tarafın alacağı cezayı kısaltmanın da kendisine bir fayda sağlamayacağını bildiğinden bu ikilem sıfır toplamlı olmayan oyunlara örnektir.

Tanım 4.1.9 (UTD, 2021) Getiri matrisi (4.1) ile verilmiş olan oyunda tanım 4.1.3 te verilen her iki oyuncunun $H_I(x,y)$ ve $H_{II}(x,y)$ getirileri $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$; $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ değişkenleri yardımıyla aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$x_n = 1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}), y_m = 1 - (y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1})$$

$$\frac{\partial H_I(x,y)}{\partial x_i} = 0, i = 1,2, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial H_{II}(x,y)}{\partial y_j} = 0, j = 1,2, \dots, m-1$$

sistemi çözülürse

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\, , x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leq 1\, , x_i \geq 0$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m)\, , y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1} \leq 1\, , y_j \geq 0$$

karma stratejilerde bir denge elde edilir.

Örnek 4.1.10 (UTD, 2021) Taş-Kağıt-Makas oyununda denge stratejilerini bulunuz.

	Makas	Kağıt	Taş	
Makas	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	y_1
Kağıt	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$	y_2
Taş	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	$1 - y_1 - y_2$
	x_1	x_2	$1 - x_1 - x_2$	

Çözüm Tanım 4.1.9 dan her iki oyuncunun getirileri aşağıdaki biçimde olur.

$$\begin{aligned} H_I(x,y) &= x_1y_2 - x_1(1 - y_1 - y_2) - x_2y_1 + x_2(1 - y_1 - y_2) + (1 - x_1 - x_2)y_1 - (1 - x_1 - x_2)y_2 \\ &= 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - x_1 + x_2 + y_1 - y_2 \end{aligned}$$

$$H_{II}(x,y) = -3x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_1 + x_2 - y_1 + y_2$$

$$\frac{\partial H_I}{\partial x_1} = 3y_2 - 1 = 0 \qquad \frac{\partial H_{II}}{\partial x_1} = 3x_2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial H_I}{\partial x_2} = -3y_2 + 1 = 0 \qquad\qquad \frac{\partial H_{II}}{\partial x_2} = -3x_1 + 1 = 0$$

çözümü $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{1}{3}$ iken

$$(x, y) = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$$

elde edilir.

4.2 Bimatris Oyunlarda Baskınlık

Klasik matris oyunlarında baskınlık uygulanırken I. oyuncunun stratejileri satır elemanları, II. oyuncunun stratejileri sütun elemanları olarak kabul edilirdi. Fakat bimatris oyunlarında mevcut iki oyuncunun getirileri ayrı ayrı matris halinde sunulduğundan baskınlık yöntemi kullanılırken, bu matrislerin ikisi kazanç ya da kayıp matrislerini ifade edebilirken birinin kazanç diğerinin de kayıp matrisini de gösterebilir. Bu yüzden incelenmesi gereken üç kriter bulunur (Savaşkan, 2018).

1.Kriter

Birinci kriterde I. oyuncu kendi kazancını maksimalleştirmeye çalışırken, II. oyuncunun kazancını minimal tutmaya çalışmaktadır. Burada etkin roldeki I. oyuncudur.

İlk aşamada, I. oyuncu rasyonel bağlamda daha fazla kazanç elde edeceği stratejiyi tutup, diğer stratejiyi eler. II. oyuncu için de bu yöntem uygulanıp getiri matrisinden o satır elenir.

İkinci aşamada ise, rakip oyuncunun kazancını minimal tutmak olduğundan, I. oyuncu II. oyuncu için daha çok kazanç sağlayacağı satırı getiri matrisinden eler.

Bu şekilde satır bakımından baskınlık sonlanıncaya dek sürer.

Örnek 4.2.1 (A, B) matris çifti ile verilen bimatris oyunu ele alalım.

$$(A,B) = \begin{bmatrix} (6,4) & (7,2) & (4,3) \\ (8,3) & (2,6) & (5,2) \\ (2,5) & (6,2) & (7,4) \\ (9,7) & (2,3) & (7,2) \end{bmatrix}$$

I. ve II. oyuncunun getiri matrisleri sırasıyla,

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \quad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

dir.

Çözüm 1.kritere göre A matrisinde baskınlığa uğrayan satır elenir. Bu yüzden, I. oyuncu için getiri matrisinde I_2 ile I_4 stratejileri karşılaştırıldığında 4. satırdaki tüm elemanlar 2. satırdaki tüm elemanlardan büyük veya eşittir, yani I_4 baskın kabul edilir. O halde I. oyuncunun getiri matrisindeki 2. satır elenir. Aynı anda II. oyuncunun matrisindeki 2. satır da elenir. I. ve II. oyuncunun getiri matrisleri sırasıyla,

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 7 \\ 9 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Yine II. oyuncu için getiri matrisinde I_1 ile I_2 stratejileri karşılaştırıldığında, 2. satırdaki tüm elemanlar, 1. satırdaki tüm elemanlardan büyük veya eşittir. Bu durumda II. oyuncunun getiri matrisinden 2. satır elenirr. I. oyuncunun getiri matrisindeki 2. satır da otomatikmen elenir.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 9 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir.

2.Kriter

İkinci Kriterde, I. ve II. oyuncu karşılıklı olarak diğerinin kazancını minimalleştirmeye çalışır. Kendisi için ne kazancı önemlidir ne de kaybı.

İlk aşamada, I. oyuncu tüm baskın stratejileri kullandığında işlevsiz satırlar II. oyuncu için getiri matrisinden elenir ve otomatik olarak I. oyuncunun getiri matrisinden de aynı satırlar elenir.

İkinci aşamada ise, II. oyuncu I. oyuncu için kazanç minimal olabilsin diye baskınlık yöntemini getiri matrislerinde sütunlar vasıtasıyla kullanır.

Örnek 4.2.2 Aşağıda verilen bimatris oyununu ele alalım.

$$(A,B)=\begin{bmatrix}(8,6) & (9,4) & (6,5)\\(10,5) & (4,8) & (7,4)\\(4,7) & (8,4) & (9,6)\end{bmatrix}$$

Her bir oyuncunun getiri matrisleri sırasıyla

$$A=\begin{bmatrix}8 & 9 & 6\\10 & 4 & 7\\4 & 8 & 9\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}6 & 4 & 5\\5 & 8 & 4\\7 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

dir.

Çözüm 2.kritere göre, II. oyuncunun 3.satırdaki tüm elemanlar 1. satırdaki tüm elemanlardan küçük olmadığından kazancı fazla olan II. oyuncunun matrisindeki 3. satır elenir. I. oyuncu için de otomatikmen 3. satır elenmiş olur. I. ve II. oyuncunun getiri matrisleri sırasıyla,

$$A=\begin{bmatrix}8 & 9 & 6\\10 & 4 & 7\end{bmatrix}\quad B=\begin{array}{c}I_1\\I_2\end{array}\begin{bmatrix}6 & 4 & 5\\5 & 8 & 4\end{bmatrix}$$

elde edilir. Yine A matrisinde 1. sütundaki tüm elemanlar 3. sütundaki tüm elemanlardan küçük olmadığından 1. sütun elenir. II. oyuncu için de getiri matrisinde aynı sütun elenir.

$$A=\begin{bmatrix}9 & 6\\4 & 7\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}4 & 5\\8 & 4\end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir ve baskınlık kalmadığı için çözüm sonlanır.

3.Kriter

Üçüncü kriterde, $I.$ ve $II.$ oyuncu karşılıklı olarak diğerinin kaybını maksimalleştirmeye çalışır. Bu sebeple oyuncuların getiri matrislerini kayıp matrisleri olarak düşünmeliyiz. O halde sütunlara ya da satırlara baskınlık uygulanacağı zaman kaybı az olanlar elenecektir. Baskın strateji kalmayana kadar devam eder.

Örnek 4.2.3 Aşağıda ele alınan bimatris oyunu bir önceki örnek ile aynıdır. $I.$ ve $II.$ oyuncunun getiri matrisleri sırasıyla,

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 6 \\ 10 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 4 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

verilmiştir.

Çözüm 3.kritere göre, $II.$ oyuncunun I_1 ve I_3 stratejileri karşılaştırıldığında 3. satırdaki tüm elemanlar 1. satırdaki tüm elemanlardan küçük kalmadığından $II.$ oyuncunun matrisinden 1. satır elenecektir. Aynı zamanda $I.$ oyuncunun matrisinden de 1. satır elenir.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

dir. Yine A matrisinde II_2 ve II_3 stratejileri karşılaştırıldığında 3. sütununun her bir elemanı 2. sütunundaki her bir elemandan büyüktür. Bu durumda 2. sütun her iki matristen de elenir.

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \quad , \quad B = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

matrisleri elde edilir ve çözüm sonlanır.

Sonuç 4.2.4 (Savaşkan, 2018) Baskınlık stratejisi ile elde edilmiş yeni sadeleştirilmiş matrisler yardımıyla bimatris oyunu için bir çözüm elde edilir.

BEŞİNCİ BÖLÜM
MATRİS NORMLARI VE OYUN DEĞERİ

Bu bölümde, matris normları ele alınarak, bu normların bazı özel tanımlı matrisler üzerinde uygulanışı incelenir. Ayrıca matris normların oyun değeri ile arasındaki ilişkiden bahsedilir.

5.1 Matris Normları

Tanım 5.1.1 (Horn ve Chonson, 1991) $\mathbb{C}$ kompleks ve $\mathbb{R}$ de reel sayılar olmak üzere $\|.\| : \mathbb{C}^{mxn} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ fonksiyonu için

1) $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2) $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\|cA\| = |c|\|A\|$

3) A ve B aynı mertebeden iki matris olmak üzere

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

4) A ve B çarpılabilir iki matris olmak üzere

$$\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$$

1-3 koşulları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna genelleştirilmiş matris normu, **1-4** koşulları sağlanıyorsa matris normu olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.2 (Meyer, 2000) A nxn lik matris ve y sütun vektörü olsun. O halde

$$\|A.y\| \leq \|A\|.\|y\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa matris normu ile vektör normu uyumludur denir.

Tanım 5.1.3 (Meyer, 2000) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin bazı normları:

- Sütun normu $\quad \|A\|_1 = \max_{j=1,2,..,n} \left[\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|\right]$

- Satır normu $\|A\|_\infty = \max_{i=1,2,..,m}\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right]$

- Frobenius (Euclideon) normu $\|A\|_E = \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right]^{1/2}$

- Spektral norm $\|A\|_2 = \max\left(\sqrt{\lambda}\ \ ;\ \ \lambda,\ \bar{A}^T\ A \text{ nın bir özdeğeridir.}\right)$

- $|A|_p = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{1/p}$

- Operatör norm $\|A\|_p = \max\left\{|Ax|_p\ :\ x \in \mathbb{C}^n,\ |x|_p = 1\right\}$

- $|A|_{p_q} = \left\{\sum_1^n\left(\sum_1^m|a_{ij}|^p\right)^{q/p}\right\}^{1/p}$

- $\|A\|_\Delta = max|a_{ij}|$

şeklinde tanımlıdır.

Not 5.1.4: Yukarıda ifade edilen matris normları için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir (Bozkurt ve ark., 2005).

- $\|A_2\| \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

- $\|A_\Delta\| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\Delta$

- $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$

- $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$

- $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$

Tanım 5.1.5 (Horn ve Chonson, 1991) A n-kare matris olsun. A matrisinin mutlak değerce en büyük öz değerine A nın spektral yarıçapı denir ve

$$\sigma(A) = \max_i\{|\lambda_i|\ :\ \lambda_i\ , A \text{ matrisinin özdeğeri}\ \}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 5.1.6

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -3\\ 0 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

matrisi verilsin. O halde,

$$\|A\|_1=\max\{3,6,6\}=6$$

$$\|A\|_\infty=\max\{6,5,4\}=6$$

$$\|A\|_\Delta=\max\{2,1,3,0,4,1,1,1,2\}=4$$

$$\|A\|_E=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2+\cdots+2^2}=\sqrt{37}$$

$$\|A\|_2=4.4336$$

Teorem 5.1.7 (İzgi ve Özkaya, 2009) A reel değerli mxn tipinde bir getiri matrisi ve v oyun değeri olmak üzere;

$$\frac{k}{\|A\|_\infty}\le v\le \|A\|_1,\ v>0$$

$$-\|A\|_1\le v\le \frac{k}{\|A\|_\infty},\ v<0$$

dir. Burada,

$$k=\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n} v\left|a_{ij}\right|$$

İspat Reel değerli mxn tipinde bir getiri matrisi

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

olsun.

$\boldsymbol{i})$ $\boldsymbol{v>0}$ için : $\|A\|_\infty=\sum_{j=1}^{n}\left|a_{pj}\right|$ ve p sabit iken,

$$\sum_{j=1}^{n}\left|a_{pj}\right|\ge \max_{1\le i\le m,\, i\ne p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

eşitsizliğini ∞- normu tanımından biliyoruz. Eğer,

$$m = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

şeklinde tanımlarsak,

$$\frac{m}{C} \le 1$$

tekrar yazıp

$$\frac{k}{\|A\|_\infty} \le v^+, \; (k = v^+ m)$$

olarak elde ederiz. Dahası,

$$v^+ = \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}, \text{ (keyfi } j \text{ için)}$$

olarak oyun değeri değerlendirilebilir. Açıktır ki,

$$v^+ \le \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \; , p \in [0,1]$$

tüm keyfi j leri karşılar. Her iki tarafın maksimumu alınırsa da,

$$v^+ \le \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \|A\|_1$$

olur.

***ii*) $\boldsymbol{v < 0}$ için :** $v > 0$ için $\frac{m}{\|A\|_\infty} \le 1$ i elde etmiştik.

$$k = v^- m, \; m = \max_{1 \le i \le m, i \ne p} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

iken negatif oyun değeri için üst sınır

$$\frac{k}{\|A\|_\infty} \ge v^-$$

dır. v^- için alt sınır elde etmek amacıyla;

$$v^- = \sum_{i=1}^{m} p_i a_{it}, \text{ (keyfi t)}$$

ve öte yandan

$$-|a_{ij}| p_i \ge -|a_{ij}|, \; 0 \le p_i \le 1$$

yazılabilir. Bu yüzden eşitsizlik,

$$\sum_{i=1}^{m} |a_{it}| \le \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \|A\|_1$$

iken

$$v^- \geq \sum_{i=1}^{m}(-p_i|a_{it}|) \geq -\sum_{i=1}^{m}|a_{it}| \geq -\|A\|_1$$

yazılabilir. Sonuç olarak,

$$-\|A\|_1 \leq v^- \leq \frac{k}{\|A\|_\infty}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.7 de görüldüğü üzere k, v oyun değerine bağlıdır. Sonuç 5.1.8'de oyun değerini k dan bağımsız bir şekilde elde etmek için birtakım yaklaşımlar geliştirilir.

Sonuç 5.1.8 (İzgi ve Özkaya, 2019) A reel değerli mxn tipinde bir getiri matrisi ve v oyun değeri olmak üzere,

$$\frac{m}{\|A\|_\infty} \leq v \leq \|A\|_1 \quad , \quad v \geq 1$$
$$-\|A\|_1 \leq v \leq -\frac{m}{\|A\|_\infty} \quad , \quad v \leq -1$$

dir. Burada, $m = \max\limits_{1\leq i\leq m\ ,i\neq p} \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

Bir sonraki teorem yukarıda açıkladığımız tüm yaklaşımların genelleştirilmesidir. Aşağıdaki teoremin temel amacı, sadece getiri matrisinin ilgili matris normlarını hesaplayarak oyun değerinin sınırlarını vermektir.

Teorem 5.1.9 (İzgi ve Özkaya, 2019) A reel değerli 2x2 tipinde bir getiri matrisi ve v oyun değeri olmak üzere,

$$\frac{|c|+|d|}{\|A\|_\infty} \leq |v| \leq \|A\|_1 \quad , \quad |v| \geq 1$$
$$\frac{1}{\|A\|_1} \leq |v| \leq \frac{\|A\|_\infty}{|c|+|d|} \quad , \quad |v| \leq 1$$

dir.

İspat

$$v > 0 \Rightarrow v \leq \|A\|_1$$

$$v < 0 \Rightarrow -\|A\|_1 \leq v$$

olduğunda,

$$\|A\|_\infty = |a| + |b|$$

ve

$$\frac{|c| + |d|}{\|A\|_\infty}$$

vardır.

$\boldsymbol{a}$) $\boldsymbol{v > 0}$ $\boldsymbol{i}$) $\boldsymbol{v \geq 1} \Rightarrow \frac{|c|+|d|}{\|A\|_\infty} \leq v \leq \|A\|_1$

$\boldsymbol{ii}$) $\boldsymbol{0 < v \leq 1} \Rightarrow k^{-1} = v$, $k = \frac{1}{v} \geq 1$ ve $\boldsymbol{i}$) yi kullanarak

$$\frac{|c| + |d|}{\|A\|_\infty} \leq k \leq \|A\|_1 \Rightarrow \frac{1}{\|A\|_1} \leq v \leq \frac{\|A\|_\infty}{|c| + |d|}$$

olur.

$\boldsymbol{b}$) $\boldsymbol{v < 0}$ $\boldsymbol{i}$) $\boldsymbol{v \leq -1} \Rightarrow v \leq -1 \leq -\frac{|c|+|d|}{\|A\|_\infty}$

$$-\|A\|_1 \leq v \leq -\frac{|c| + |d|}{\|A\|_\infty}$$

$\boldsymbol{ii}$) $\boldsymbol{-1 \leq v < 0} \Rightarrow t^{-1} = v$, $t = \frac{1}{v} \leq -1$ ve $\boldsymbol{i}$) yi kullanarak

$$-\|A\|_1 \leq t \leq -\frac{|c| + |d|}{\|A\|_\infty} \Rightarrow -\frac{\|A\|_\infty}{|c| + |d|} \leq v \leq -\frac{1}{\|A\|_1}$$

olur.

$\boldsymbol{a}$) ve $\boldsymbol{b}$) ile ispat biter.

Teorem 5.1.10 (İzgi ve Özkaya, 2019) A mxn lik getiri matrisi, v oyun değeri ve B de A nın satır indirgenmiş matrisi olmak üzere,

$$\frac{\|B\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq |v| \leq \|A\|_1 \quad , \qquad |v| \geq 1$$
$$\frac{1}{\|A\|_1} \leq |v| \leq \frac{\|A\|_\infty}{\|B\|_\infty} \quad , \quad |v| \leq 1, v \neq 0$$

dir.

5.2 Özel Tanımlı Matrisler

Tanım 5.2.1 (Horn ve Chonson, 1991) (a_k) bir tamsayı dizisi ve $a_k \neq 0$, $k \geq 1$ iken; (a_k) dizisinden oluşan bir Hankel matrisi, i ve j sırasıyla satır ve sütun numaralarını gösteren indisler olmak üzere, elemanları;

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{i+j-1}}, 1 \leq i\, , j \leq n$$

olan matristir.

Örnek 5.2 $(a_k) = \frac{k+1}{k}$ şeklinde bir dizi olsun. O halde,

$$a_k = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\}$$
$$= \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$$

şeklindedir. Buna göre 3x3 lük Hankel matrisi;

$$a_{11} = \frac{1}{a_{1+1-1}} = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} \qquad a_{12} = \frac{1}{a_{1+2-1}} = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \quad a_{13} = \frac{1}{a_{1+3-1}} = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$a_{21} = \frac{1}{a_{2+1-1}} = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}, a_{22} = \frac{1}{a_{2+2-1}} = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}, a_{23} = \frac{1}{a_{2+3-1}} = \frac{1}{a_4} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$a_{31} = \frac{1}{a_{3+1-1}} = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}, a_{32} = \frac{1}{a_{3+2-1}} = \frac{1}{a_4} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}, a_{33} = \frac{1}{a_{3+3-1}} = \frac{1}{a_5} = \frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6}$$

olduğundan

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 5.2.3 (Richardson, 2001) (f_k) bir tamsayı dizisi ve $k \geq 2$ iken;

$$(f_0) = 0, (f_1) = 1, (f_2) = 1, (f_3) = 2, (f_4) = 3, \dots, (f_k) = (f_{k-1}) + (f_{k-2})$$

şeklindeki diziye Fibonacci dizisi adı verilir. Buna göre;

$$f_k = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \dots\}$$

$$= \{0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 5.2.4 (Richardson, 2001) Hankel matrisi tanımında verilen (a_k) dizisi yerine Fibonacci dizisi alınarak i ve j sırasıyla satır ve sütun numaralarını gösteren indisler olmak üzere, f_{ij} elemanları;

$$f_{ij} = \frac{1}{f_{i+j-1}}$$

olan matrise Filbert matrisi denir.

Örnek 5.2.5 F_3 **,** 3x3 lük Filbert matrisi olsun. O halde,

$$f_{11} = \frac{1}{f_{1+1-1}} = \frac{1}{f_1} = 1 \qquad f_{12} = \frac{1}{f_{1+2-1}} = \frac{1}{f_2} = 1 \qquad f_{13} = \frac{1}{f_{1+3-1}} = \frac{1}{f_3} = \frac{1}{2}$$

$$f_{21} = \frac{1}{f_{2+1-1}} = \frac{1}{f_2} = 1 \qquad f_{22} = \frac{1}{f_{2+2-1}} = \frac{1}{f_3} = \frac{1}{2} \qquad f_{23} = \frac{1}{f_{2+3-1}} = \frac{1}{f_4} = \frac{1}{3}$$

$$f_{31} = \frac{1}{f_{3+1-1}} = \frac{1}{f_3} = \frac{1}{2} \qquad f_{32} = \frac{1}{f_{3+2-1}} = \frac{1}{f_4} = \frac{1}{3} \qquad f_{33} = \frac{1}{f_{3+3-1}} = \frac{1}{f_5} = \frac{1}{5}$$

olduğundan

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 5.2.6 (Horn ve Chonson, 1991) nxn tipindeki i ve j sırasıyla satır ve sütun numaralarını gösteren indisler olmak üzere, elemanları;

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

olan matrise Hilbert matrisi denir.

Örnek H_3**,** 3x3 lük Hilbert matrisi;

$$h_{11} = \frac{1}{1+1-1} = 1 \qquad h_{12} = \frac{1}{1+2-1} = \frac{1}{2} \qquad h_{13} = \frac{1}{1+3-1} = \frac{1}{3}$$

$$h_{21} = \frac{1}{2+1-1} = \frac{1}{2} \qquad h_{22} = \frac{1}{2+2-1} = \frac{1}{3} \qquad h_{23} = \frac{1}{2+3-1} = \frac{1}{4}$$

$$h_{31} = \frac{1}{3+1-1} = \frac{1}{3} \qquad h_{32} = \frac{1}{3+2-1} = \frac{1}{4} \qquad h_{33} = \frac{1}{3+3-1} = \frac{1}{5}$$

olduğundan

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

5.3 Matris Normları ve Oyun Değeri

Getiri matrisi 3x3 lük Hankel, Filbert ve Hilbert matrisleri şeklinde verilen oyunlarda saf stratejiler sınıfında oyun değeri bulmak mümkündür. Dikkat edilirse,

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

getiri matrisli oyunlarda sırasıyla $a_{31} = \frac{3}{4}$, $f_{13} = \frac{1}{2}$, $h_{13} = \frac{1}{3}$ elamanları saf stratejilerde oyun değeridir.

Getiri matrisi nxn lik Filbert matris olan oyunun, oyun değeri ve matris normları arasında bir ilişki bulunmaktadır. Bunun için var olan çalışmalar dışında Frobenious ve Spectral normlar kullanılmıştır.

Tanım 5.3.1 A mxn lik bir getiri matrisi olmak üzere A matrisinde mutlak değerce maksimum toplama sahip satır ve sütunun silinmesiyle elde edilen $B \in \mathbb{R}^{(m-1)\text{x}(n-1)}$ matrisine indirgenmiş matris denir.

Teorem 5.3.2 Getiri matrisi $F = \left(f_{ij}\right)_{nxn}$ olan bir matris oyununda oyun değeri v olsun. Bu durumda,

$$\frac{\|B\|_s}{\|F_n\|_F} \leq |v| \leq \|F_n\|_1 \quad , \qquad |v| \geq 1$$
$$\frac{1}{\|F_n\|_F} \leq |v| \leq \frac{\|F_n\|_F}{\|B\|_s} \qquad |v| \leq 1, v \neq 0$$

dir. Burada B matrisi A nın indirgenmiş matris halidir.

Örnek 5.3.3 Getiri matrisi

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

olan F_3 Filbert matris oyununda oyun değeri $v = \frac{1}{2}$ dir. İndirgenmiş B matrisi ise

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

dir. Burada Frobenious ve Spectral norm değerlerine bakılırsa

$$\|F_3\|_F = 2{,}003$$

$$\|F_3\|_S = 1{,}982$$

$$\|B\|_S = 0{,}715$$

olur. Teorem 5.3.2 dikkate alınırsa,

$$\frac{1}{\|F_3\|_F} = \frac{1}{2{,}003} = 0{,}499$$

$$\frac{\|F_3\|_F}{\|B\|_s} = \frac{2{,}003}{0{,}715} = 2{,}801$$

$$\frac{1}{\|F_3\|_F} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{\|F_3\|_F}{\|B\|_s}$$

gerçeklenir.

ALTINCI BÖLÜM
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada oyun teorisinin önemli sınıflarından olan statik oyunlar içinde yer alan iki kişilik, sıfır toplamlı (matris oyunlar) olan ve sıfır toplamlı olmayan (bimatris) oyunlar incelenmiştir. Matris oyunlar ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Bimatris oyunlarda denge kavramı verilmiş ve mahkumlar çıkmazı örneği incelenmiştir. Matris oyunlarda oyun değerinin bulunması ile ilgili literatürdeki mevcut yöntemlerden ziyade getiri matrisinin normu kullanılarak oyun değerinin nasıl bulunacağı gösterilmiştir. Lieratürde mevcut çalışmaların yanında farklı normlar yardımıyla da oyun değeri karakterizasyonu elde edilmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda bimatris oyunlarda matris normları ve matrisin özdeğerleri gibi kavramlar yardımıyla oyun değeri karakterizasyonu ile ilgili farklı çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKÇA

Ahlatçıoğlu, M. ve Tiryaki, F. (1998). *Oyunlar Teorisi.* Yıldız Teknik Üni. Basım Yayın Merkezi: İstanbul.

Barron, E. N. (2008). *Game Theory:An Introduction*. John Wiley & Sons: New Jersey.

Ferguson, T. S. (2014). *Game Theory*. Mathematics Department: UCLA.

Guseinov, K. G,, Akyar, E., Düzce, S.A. (2010). *Oyun Teorisi Çatışma ve Anlaşmanın Matematiksel Modelleri*. Seçkin Yayınları: Ankara

Horn, R.A. and Johnson C. R. (1991). *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press: USA.

İzgi, B. and Özkaya, M. (2019). "A New Perspective to the Solution and Creation of Zero Sum Matrix Game with Matrix Norms". *Applied Mathematics and Computation*, 341, 148-159.

Meyer, C. D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM.

Morris, P. (1994). *Introduction to Game Theory*. Springer-Verlag: New Jersey.

Nash, J. F. (1950). "The Bargaining Problem". *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 18(2), 155-162.

Nash, J. F. (1950). "Equilibrium points in n-person games". *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, 48-49.

Nash, J. F. (1951). "Non-Cooperative Games". *Annals of Mathematics*, 54 (2), 286-295.

Nash, J. F. (1953). "Two-person cooperative games". *Econometrica*, 21, 128-140.

Neumann, J. V. and Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press : New Jersey.

Neumann, J. V. "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele" *Math. Ann*., 100 (1928), 295–320.

Owen, G. (1995). *Game Theory*. Academic Press, Inc.: San Diego.

Richardson, T.M. (2001). "The Filbert matrix". *The Fibonacci Quart*, 39 (3), 268–275.

Savaşkan, G. S. (2018). Bimatris ve Çok Adımlı Oyunların Bazı Problemleri. Doktora Tezi, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Çanakkale.

Uçan O. and Aytekin İ. (2013). "An Emprical Analyses of Dynamic Game Models on Economy in Accordance with Game Theory". *International Journal of Social Science,* 6 (3), 747-757.

Yılmaz, E. (2016). *Oyun Teorisi*. Literatür Yayınları: İstanbul.

UTD (2021). Bimatrix (s. 27-65) Erişim: 8 Aralık 2021, https://www.utdallas.edu/~chandra/documents/6311.